УДК 532.59:539.3

© 2003 г. И. Т. Селезов

НЕКОТОРЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ ЭЛАСТО- И ГИДРОДИНАМИКИ

Рассматриваются вырожденные по малому параметру модели, описывающие распространение возмущений с конечной скоростью. Приводятся примеры, когда параболические модели вырождаются в гиперболические и наоборот, когда гиперболические модели могут быть получены посредством обобщения параболических. Более подробно рассматривается приведение трехмерной задачи эластодинамики для слоя к двумерной на основе метода степенных рядов, а также построение слабодисперсионных, но сильно нелинейных моделей распространения поверхностных волн на воде, близких к гиперболическим.

Проблема конечности скорости распространения возмущений как условие корректности постановки начально-краевой задачи для гиперболических уравнений и ее разрешимость рассматривалась Гершом [1]. Им были представлены некоторые случаи несуществования решений начально-краевых задач с конечными скоростями, а также исследованы корректно поставленные начально-краевые задачи для гиперболических уравнений в полубесконечной области и установлены условия, гарантирующие конечную скорость. Эти же вопросы рассматривались и другими авторами ([2–9] и др.).

Исследование динамических моделей с точки зрения конечности скорости распространения возмущений при наличии малого параметра β, когда при $\beta \to 0$ исходные модели вырождаются в упрощенные (квазивырожденные или вырожденные по параметру β) модели, представляет интерес в теории волн. Необходимое условие конечности скорости распространения возмущений – это гиперболичность модели, т.е. она должна описываться гиперболической системой дифференциальных уравнений. Необходимо отметить, что при асимптотическом вырождении может изменяться тип уравнения, поэтому представляют интерес только получаемые при этом предельные гиперболические модели, например, когда параболическая модель переходит в гиперболическую, гиперболическая модель эластодинамики для слоя в гиперболическую, а не в классическую параболическую, предсказывающую бесконечную скорость распространения возмущений.

В случае диссипативных моделей, описываемых параболическими уравнениями, предсказывающими бесконечную скорость распространения возмущений, они при сингулярном вырождении переходят в гиперболические модели более низкого порядка.

С другой стороны, диссипативные и диффузионные параболические модели могут быть обобщены на гиперболические посредством расширения (дополнения) параболического оператора до гиперболического на основе обобщенного транспортного уравнения (идеи, ведущей свое начало от Максвелла [9]). Тогда решения параболических уравнений будут представлять собой предельные решения этих обобщенных уравнений [10, 11].

В случае вырождения исходной гиперболической модели эластодинамики для слоя при его малой относительной толщине на основе метода степенных рядов без привлечения дополнительных гипотез, которые вводятся при применении традиционных феноменологических подходов, реализуется приведение трехмерной задачи к двумерной. Это приводит к множеству упрощенных (вырожденных) моделей различного типа, из которого по предложенному алгоритму отбираются только гиперболические модели. В результате могут быть получены аналитически гиперболическая модель изгибных колебаний пластин Тимошенко–Миндлина (двухмодовая аппроксимация) и более точная модель (трехмодовая аппроксимация). Эти модели описывают распространение возмущений с конечной скоростью в отличие от классических моделей. На этой основе может быть получена также точная формула для определения коэффициента сдвига в модели Тимошенко–Миндлина, вводимого во всех традиционных подходах при построении уточненных уравнений колебаний стержней, пластин и оболочек искусственно, и выбор его был предметом многочисленных исследований и дискуссий.

В случае жидкости конечной переменной глубины на основе аналогичного подхода возможно построение квазивырожденных моделей при малой дисперсии β и большой нелинейности α, что приводит к моделям, близким к гиперболической ($\beta = 0$). В отличие от традиционных подходов здесь снято ограничение на параметр нелинейности α, и полученная на этой основе система эволюционных уравнений описывает распространение сильно нелинейных волн. В результате учет таких нелинейных эффектов и переменности глубины приводит к возмущению распространяющейся уединенной волны и образованию "хвостов" в отличие от чисто солитонной волны при $\alpha \sim \beta$ или опрокидывающихся волн при $\beta = 0$.

Сингулярное вырождение по параметру параболических моделей в гиперболические. Типичный пример – уравнение Навье–Стокса для сжимаемой жидкости при вязкости, стремящейся к нулю. Другие примеры – уравнение Бюргерса $u_t + uu_x = \gamma u_{xx}$ при $\gamma \to 0$ и уравнение Кортевега–де Вриза $u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0$ при $\beta \to 0$, а также вырождение гиперболопараболических моделей магнитной гидродинамики и магнитоупругости в гиперболические при стремлении магнитного числа Рейнольдса к бесконечности [12, 12a]. Эти и многие другие эволюционные уравнения описывают распространение волн благодаря тому, что они включают в себя как ядро гиперболический оператор более низкого порядка [13]. Недиссипативное уравнение Кортевега–де Вриза тоже вырождается в гиперболическое, но, кроме того, при балансе нелинейных и дисперсионных эффектов предсказывает распространение солитонов с конечной скоростью.

Гиперболические модели как обобщения параболических моделей. Были представлены [5–14] примеры обобщения (расширения) параболических уравнений, описывающих распространение возмущений с бесконечной скоростью, в гиперболические уравнения. Отметим также модель теплопроводности, модель диффузии, уравнение Смолуховского, модель эволюции донных наносов [13, 14], модель упругого релятивистского тела, модель турбулентной. Одна из наиболее характерных – гиперболическая модель [14], которая обобщает уравнения Навье–Стокса расширением параболического оператора до гиперболического. Было представлено гиперболическое обобщение в виде транспортного уравнения, предсказывающее наличие фронта, распространяющегося с конечной скоростью, в решении типа бегущих волн, что не предсказывают известные уравнения типа реакция–диффузия.

Построение уточненных волновых моделей теории пластин. Обычно уравнения продольных и изгибных колебаний пластин, включая и известные уточненные уравнения, выводятся с привлечением физических и геометрических гипотез. Эти уравнения по существу представляют собой приближенные конструкции (аппроксимации) задачи эластодинамики для упругого слоя в точной постановке. Здесь приближенные уравнения выводятся исходя из этой точной постановки без привлечения каких-либо гипотез физического характера на основе аналитического алгоритма приведения трехмерной задачи к двумерной в предположении, что толщина слоя мала по сравнению с горизонтальным масштабом. Такой алгоритм может быть реализован либо методом степенных рядов, либо методами асимптотических разложений. Это, естественно, приводит к бесконечным системам, редукция которых приводит к множеству приближенных моделей, которые можно понимать как вырожденные (квазивырожденные) по малой поперечной координате или малому параметру. Таким образом, аналитически можно получить все известные феноменологические модели и новые более точные (обобщенные), которые практически не могут быть построены на основе гипотез физического и геометрического характера. Наша цель из множества аппроксимаций отобрать только такие, которые дают гиперболические модели, описывающие распространение возмущений с конечной скоростью.

Рассмотрим задачу эластодинамики для бесконечного слоя толщиной $2h$, ограниченного лицевыми поверхностями $x_3 = \pm h$, в области

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in \left[-\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}\right]\right\}; \quad \xi = \frac{2h}{l} \tag{1}$$

в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), где l – горизонтальный масштаб слоя. Начально-краевая задача для вектора перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3 = w)$ формулируется следующим образом: найти вектор-функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(x_1, x_2, x_3, t)$ как решение гиперболических уравнений в области $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$

$$\nabla^2 u_k + (1 + \lambda/G)\partial_k(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \partial_{tt} u_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2}$$

удовлетворяющее граничным условиям для компонент тензора напряжений на лицевых поверхностях слоя

$$x_3 = \pm\xi/2: \quad \sigma_{33} = q^{\pm}(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{3i} = p_i^{\pm}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

и начальным условиям

$$t = 0: \quad u_k = 0, \quad \partial_t u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3 \tag{4}$$

Всюду введены безразмерные величины, в качестве масштабов приняты характерная длина l, модуль сдвига G и скорость распространения волн сдвига c_s. Предполагается, что λ и G – постоянные величины.

В дальнейшем предполагаем, что толщина слоя мала, $\xi \ll 1$, поэтому естественно применить разложение по безразмерной координате x_3 относительно срединной поверхности $x_3 = 0$, понижая таким образом размерность задачи [15–17]. Это приводит к вырождению исходной гиперболической модели, причем возможны три случая вырождения, приводящие к уравнениям параболического, гиперболического и смешанного типа. При условии конечности скорости распространения возмущений только вырождение гиперболической модели в гиперболическую корректно и имеет физический смысл.

Искомые функции представляются в виде степенного ряда

$$u_k(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{km}(x_1, x_2, t) x_3^m, \quad k = 1, 2, 3$$

В результате исходная задача (1)–(4) сводится к определению бесконечного числа функций u_{km}, удовлетворяющих бесконечной системе дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений, которая распадается на две независимые подсистемы, соответствующие симметричным (планарным) и несимметричным (изгибным) деформациям относительно срединной поверхности $x_3 = 0$. Здесь ограничимся случаем несимметричных деформаций, для которого после громоздких выкладок получаем (суммирование ведется от $s = 0$ до $s = \infty$)

$$
\begin{aligned}
& e(x_1, x_2, x_3, t) = \sum \tilde{e}_{2s+1}(x_1, x_2, t) x_3^{2s+1}, \quad e = u_{i,i}, \quad i = 1, 2 \\
& w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum \tilde{w}_{2s}(x_1, x_2, t) x_3^{2s} \\
& \sum [(2s+1)\tilde{e}_{2s+1} + \nabla^2 \tilde{w}_{2s}] 2^{-2s} \xi^{2s} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}(p_1^+ + p_1^-) + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}(p_2^+ + p_2^-) \\
& \sum \left[-\tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{2s+1} L_s \tilde{w}_{2s} \right] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} = \frac{1}{2}(q^+ - q^-) \qquad (5) \\
& \tilde{w}_{2s+2} = -\frac{1+\lambda/G}{(2s+2)(2+\lambda/G)} \tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2+\lambda/G)} L_s \tilde{w}_{2s} \\
& \tilde{e}_{2s+3} = \frac{1}{(2s+2)(2s+3)} \left[-L_e + \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} \nabla^2 \right] \tilde{e}_{2s+1} + \\
& + \frac{1+\lambda/G}{(2s+1)(2s+2)(2s+3)(2+\lambda/G)} \nabla^2 + L_s w_{2s}
\end{aligned}
$$

где

$$
L_s = c_s^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_e = c_e^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}
$$

e – дивергенция планарных перемещений, w – прогиб, $p_i^{\pm}$ и $q^{\pm}$ – касательные и нормальные нагрузки на лицевых поверхностях слоя, c_s и c_e – скорости распространения сдвиговых и дилатационных волн.

Система (5) дает точное решение задачи. Редукция этой системы позволяет получить множество различного рода аппроксимаций. Было рассмотрено [17] гиперболическое вырождение начально-краевой задачи для конечной гиперболической системы уравнений произвольного порядка в R^n на основе метода степенных рядов и установлены необходимые и достаточные условия такого вырождения: замкнутость редуцированной системы и сохранение всех пространственно-временных дифференциальных операторов до определенного порядка.

Усечение системы (5) до седьмого порядка включительно приводит к трехмодовой (толщинные волновые моды) аппроксимации, которая может быть сведена к уравнению

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \left[\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \nabla^2 \nabla^2 \right)_K - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right]_{TM} - \xi^5 b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \right. \\
& \left. + \xi^5 b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 - \xi^5 b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \nabla^2 + \xi^5 b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \right\}_{TMS} w = \left\{ \left[1 - \xi^2 d_1 \nabla^2 + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]_{TM} + \right. \\
& \left. + \xi^4 d_3 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^4 d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^4 d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\}_{TMS} (q^+ - q^-) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Тимошенко [18] обобщил параболическую модель Бернулли – Эйлера изгибных колебаний балки на гиперболическую на феноменологической основе посредством введения поправок, ответственных за толщинно-сдвиговые деформации и инерцию вращения. На этой основе Миндлин [19] обобщил параболическую модель Кирхгофа изгибных колебаний пластин [20] (оператор K в уравнении (6)) на гиперболическую (двухмодовая модель – операторы ТМ). Была построена [21] более общая гиперболическая модель как математическая аппроксимация без введения каких-либо феноменологических предположений (трехмодовая аппроксимация – операторы TMS), включающая как частный случай и двухмодовую. Необходимо отметить, что коэффициенты a_p, b_q и d_r в уравнении (6) зависят только от коэффициента Пуассона ν, и это дает возможность определить из уравнения (6) точную величину коэффициента сдвига из соотношения $k^2 = 2/(2 - \nu + \sqrt{1/2 + \nu^2})$.

Было дано развитие теории построения уточненных моделей динамики стержней, пластин и оболочек и представлены [22] их обширные приложения.

Вырожденная по параметру дисперсии модель распространения нелинейных волн на воде. Здесь для решения задачи применяется такой же подход, как и в случае колебаний пластин. Рассматривается задача распространения поверхностных гравитационных волн, которая, как известно, в большинстве случаев хорошо описывается моделью идеальной несжимаемой жидкости при ее потенциальном движении. В результате определение векторного поля сводится к скалярной задаче для потенциала скоростей φ и отклонения свободной поверхности η. Задача рассматривается в полной нелинейной постановке для жидкости переменной глубины с невозмущенной свободной поверхностью $z = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z.

Далее рассматривается плоская задача, т. е. решения не зависят от координаты y. Задача характеризуется тремя определяющими безразмерными параметрами

$$\alpha = a/H_0, \quad \beta = (H_0/l)^2, \quad \gamma = \mathrm{tg}\theta = H_0/l, \quad \mathrm{Ur} = \alpha/\beta$$

где θ – угол донного отклонения, Ur – число Урселла (производный параметр), H_0 – глубина (вертикальный масштаб), l – характерный горизонтальный масштаб, a – максимальное отклонение свободной поверхности (амплитуда). Задача рассматривается в области

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 | \tilde{x} \le x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ -H(x) \le z \le \alpha\eta(x, t)\} \tag{7}$$

где $x = \tilde{x}$ – линия перед зоной разрушения волн.

В безразмерных переменных

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t = \frac{\sqrt{gH_0}}{l}t, \quad \varphi^* = \frac{c_0}{gla}\varphi, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}$$

задача формулируется относительно двух искомых функций φ и η следующим образом (далее звездочки опущены):

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \ \text{ в области } \Omega \tag{8}$$

$$z = -H(x)\colon \varphi_z + \beta H_x\varphi_x = 0 \tag{9}$$

$$z = \alpha\eta\colon \eta_t + \alpha\eta_x\varphi_x - \beta^{-1}\varphi_z = 0, \quad \eta + \varphi_t + (\alpha/2)\varphi_x^2 + (\alpha/(2\beta))\varphi_z^2 = 0 \tag{10}$$

$$t = 0\colon \varphi(x, z, t) = f_1(x, z), \quad \varphi_t(x, z, t) = f_2(x, z) \tag{11}$$

Следует отметить, что были введены три параметра масштабирования H_0, l, a, а не один (достаточный), что необходимо для асимптотического анализа.

Решение задачи (8)–(11) для случая распространяющихся волн в полной нелинейной постановке не известно. Эта задача описывает нелинейно-дисперсионную систему, для которой типично распространение уединенных волн. Здесь приближенный анализ проводится асимптотическим методом [23, 24], позволяющим свести задачу к анализу системы двух эволюционных уравнений. Предполагается, что параметр дисперсии β и градиент донной поверхности γ малы, в то время как нелинейный параметр α считается произвольным в отличие от традиционных подходов, в которых предполагается, что $\alpha \sim \beta$.

Двумерная по координатам x, z задача приводится к одномерной по x на основе метода степенных рядов, что сводит задачу к бесконечной системе, включающей члены β^q и α^n (q, n – целые конечные) и их произведения. Введение предположений о малости параметров β и γ позволяет проводить редукцию бесконечных систем, сохраняя члены порядка β, β^2,..., что соответствует длинноволновым приближениям. Далее мы сохраняем в бесконечной системе члены только первого порядка по β и все члены с нелинейным параметром α^n. Это соответствует сильно нелинейной слабодисперсионной модели, вырожденной по параметру дисперсии β [25]. Противоположный предельный случай $\beta \gg \alpha$ приводит к параболическим моделям, когда дисперсионные эффекты учитываются полностью, а нелинейные эффекты малы и здесь не рассматриваются.

Функцию φ представим в виде разложения

$$\varphi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+H)^n \beta^n f^{(n)}(x, t) \tag{12}$$

Видно, что разложения по параметру β и $z + H$ эквивалентны.

Разложение (12) подставим в систему (8)–(11). Подстановка в уравнение (8) приводит к рекуррентному соотношению

$$\frac{1}{\beta} f_{xx}^{(k)} = 2(k+1) H_x f_x^{(k+1)} + (k+1) H_{xx} f^{(k+1)}$$

Условие на дне (9) позволяет выразить $f^{(1)}$ через $f^{(0)} = f$

$$f^{(1)} = -H_x f^0 - \beta H_x^3 f^0 + O(\beta^2)$$

Окончательное выражение для φ имеет вид

$$\varphi = f - \beta\left[\left((z+H) H_x f_x + \frac{(z+H)^2}{2} f_{xx}\right)\right] +$$

$$+ \beta^2\left[-H_x^3 f_x (z+H) + \frac{3}{2}(z+H)^2 (H_x H_{xx} f_x + H_x^2 f_{xx}) = \right.$$

$$\left. = \frac{(z+H)^3}{2}\left(\frac{1}{3} H_{xxx} f_x + \ldots + \frac{(z+H)^4}{24} f_{xxxx}\right)\right] + O(\beta^3) \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в первое граничное условие (10), удерживая члены порядка β и $\alpha^n\beta$ и учитывая, что $h = H + \alpha\eta$, $\omega = f_x$, получим уравнение

$$\eta_t + h_x \omega + h \omega_x - \beta\left[h_x\left(\frac{3}{2} H_{xx} \omega_x + \frac{3}{2} H_x \omega_{xx} + \frac{1}{2} H_{xxx} \omega + \frac{\alpha}{2} \eta_x \omega_{xx}\right) + \right.$$

$$\left. + h(\alpha \eta_x H_{xx} \omega + 3 H_x^2 \omega_x + 2\alpha \eta_x H_x \omega_x + 3 H_x H_{xx} \omega) + \frac{1}{6} h^3 \omega_{xxx} + \alpha \eta_x H_x^2 \omega)\right] = O(\beta^2) \tag{14}$$

Второе условие (10) после дифференцирования по x и подстановки в него выражения (13) сводится к следующему уравнению:

$$\omega_t + \eta_x + \alpha\frac{1}{2}(\omega_x^2)_x - \beta\Big\{\frac{1}{2}h^2[\omega_{xt} + \alpha(\omega\omega_{xx} - \omega_x^2)] + \omega_t(hH_x)_x + \omega_{xt}hH_x +$$

$$+ \alpha\omega\omega_x(h_xH_x + H_x^2 + 3hH_{xx}) +$$

$$+ \alpha hH_x\omega_x^2 + \alpha\omega\omega_{xx}hH_x + \omega^2[H_{xx}(h_x + H_x) + hH_{xxx}]\Big\}_x = O(\beta^2) \qquad (15)$$

Эволюционные уравнения (14), (15) составляют замкнутую систему связанных уравнений, не зависящих от z.

В дальнейшем вводится средняя скорость (осредненная по глубине)

$$u = \frac{1}{h}\int\limits_{-H}^{\alpha\eta}\phi_z dz = \omega - \beta\left[\frac{1}{2}hH_{xx}\omega + hH_x\omega_x + H_x^2\omega + \frac{1}{6}H^2\omega_{xx}\right] + O(\beta^2) \qquad (16)$$

Эволюционные уравнения (14), (15) после некоторых преобразований с использованием выражения (16) принимают вид

$$\eta_t + (hu)_x = 0 \qquad (17)$$

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = \beta\left(\frac{H^3}{3}u_{xxt} + HH_xu_{xt} + \frac{H}{2}H_{xx}u_t\right) +$$

$$+ \alpha\beta\Big[(\eta H)_xu_{xt} + HH_xuu_{xx} + \frac{2}{3}\eta Hu_{xxt} + \frac{H^2}{3}uu_{xxx} - \frac{H^2}{3}u_xu_{xx} + \frac{H}{2}H_{xx}u_t +$$

$$+ \frac{3}{2}HH_{xx}uu_x + \frac{H}{2}H_{xxx}u^2 + \eta_xH_xu_t\Big] + L_1 + O(\beta^2) \qquad (18)$$

где L_1 – оператор, учитывающий нелинейности более высокого порядка, т.е. $O(\alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta)$.

В случае, когда параметр нелинейности α мал и он такого же порядка, как параметр дисперсии β, $\alpha \sim \beta \ll 1$, система уравнений (17), (18) сводится к известным уравнениям [26]

$$\eta_t + (hu)_x = 0$$

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = \beta\left(\frac{H^3}{3}u_{xxt} + HH_xu_{xt} + \frac{H}{2}H_{xx}u_t\right) + O(\beta^2)$$

В случае $\beta = 0$ система (17), (18) сводится к системе квазилинейных уравнений для волн на мелкой воде

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x = 0, \quad \eta_t + (hu)_x = 0$$

из которого при $\alpha = 0$ следуют линеаризованные уравнения

$$u_t = -\eta_x, \quad \eta_t = -(Hu)_x$$

и при обозначении $u = \partial\varphi/\partial x$ они сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Эволюционные уравнения (17), (18) представляют интерес для анализа распространения волн в прибрежной зоне, где характерные расстояния довольно малы, так что дисперсионные эффекты не накапливаются, в то время как нелинейные эффекты значительны. Анализ начально-краевой задачи на основе уравнений (17), (18), описывающей трансформацию уединенных волн при набегании на берег, обнаруживает, что учет больших нелинейных эффектов и переменности глубины при распространении солитонов сопровождается искажением профиля волны и появлением осциллирующих хвостов [25].

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (01.07/00079).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hersh R.* Boundary conditions for equations of evolution // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 16. № 4. P. 243–264.
2. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
3. *Kythe P.K.* Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications. Boston: Birkhauser, 1996. 414 p.
4. *Bona C.* Old and new hyperbolic approaches in general relativity // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Intern. Series of Numer. Mathematics / Eds. M. Fey and R. Jeltsche. Basel/Switzerland: Birkhauser, 1999. V. 129. P. 105–112.
5. *Селезов И.Т.* Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычисл. техника. Киев: Наук. думка, 1969. Вып. 1. С. 131–137.
6. *Selezov I.T.* Wave hydraulic models as mathematical approximations // Proc. 22nd Congress of Intern. Assoc. Hydr. Res. Techn. Session B. Lausanne, 1987. P. 301–306.
7. *Leander J.L.* On the relation between the wavefront speed and the group velocity concept // J. Acoust. Soc. America. 1996. V. 100. № 6. P. 3503–3507.
8. *Selezov I.* Some hyperbolic models for ware propagation // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Intern. Series of Numer. Mathematics / Eds. M. Fey and R. Jeltsch. Base/Switzerland: Birkhauser, 1999. V. 130. P. 833–842.
9. *Селезов И.Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев: Наук. думка, 1989. 204 с.
10. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les equations aux dérivées partielles lineaires hyperboliques. Paris: Hermann, 1932 = *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука. 1978. 351 с.
11. *Zlamal M.* The parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations // Differential Equations and their Applications: Proc. Conf. Prague. 1962. Prague: Publ. Houdse Czech. Acad. Sci.: N.Y.: Acad. Press, 1963. P. 243–247.
12. *Селезов И.Т.* Некоторые модели связанных магнитоупругих полей и их приложения к исследованию распространения и дифракции волн // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. № 3. С. 76–84.
12a. *Selezov I.T.* Some models of coupled magnetoelastic fields and their application to the investigation of propagation and diffraction of waves // J. Math. Sci. 2001. V. 104. № 5. P. 1490–1500.
13. *Engelbrecht J.* On the finite velocity of wave motion modelled by nonlinear evolution equations // Notes on Numerical Fluid Mechanics / Eds. J. Ballmann and R. Jeltsch. Braunschweig: Vieweg, 1989. V. 24. P. 115–127.
14. *Wilhelm H.E., Hong S.H.* Stress relaxation waves in fluids // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. № 3. P. 1266–1271.
15. *Cauchy A.L.* Sur l'equilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercices Math. 1828. V. 3. P. 245–326.

16. *Poisson S.D.* Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Sci. 1829. V. 8. P. 357–570.
17. *Selezov I.* Degenerated hyperbolic approximations of the wave theory of elastic plates // Operator Theory. Advences and Applications. V. 117. Differential Operators and Related Topics: Proc. of mark Krein Intern. Conf., Odessa, Ukraine, 1997. Basel: Birkhauser, 2000. P. 339–354.
18. *Timoshenko S.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. mag. 1921. Ser. 6. V. 41. № 245. P. 744–746.
19. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
20. *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine und Angew. Math. 1850. V. 40. № 1. P. 51–58.
21. *Селезов I.T.* Дослiдження поперечних коливань пластин // Прикл. механiка. 1960. Т. 6. № 3. С. 319–327.
22. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
23. *Lagrange J.L.* Memoire sur la theorie du mouvement des fluides // Oeuvres. 1869. V. 4. 749 p.
24. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. N.Y.: Willey. 1974 = *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
25. *Selezov I.* Nonlinear ware propagation in close to hyperbolic systems // Intern. Series of Numer. Math. 2001. V. 141, 142. P. 851–860.
26. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 4. P. 15–827.

Киев
e-mail: selezov@uninet.kiev.ua

Поступила в редакцию
4.I.2003