УДК 539.3

© 2003 г. Е. А. Лопаницын

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Дается обзор исследований по расчету геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния тонких, упругих, ортотропных кольцевых и секториальных пластин, находящихся под действием статических нагрузок. Рассматриваемые работы классифицированы по виду нагружения и закрепления пластин и по их геометрическим характеристикам. Показано, что данный раздел теории пластин, невзирая на его кажущуюся исследованность, не может считаться завершенным.

Впервые с явлениями, связанными с геометрической нелинейностью поведения круговой пластины, столкнулся Уилсон [1] в 1877 г., когда проводил испытания плоских днищ стальных цилиндрических паровых котлов. Однако первые теоретические исследования в области расчета на прочность пластин с учетом геометрической нелинейности – конечности их прогибов увидели свет только в 1902 г. Это – работы И.Г. Бубнова [2–5] по расчету стальной обшивки судов, где для получения уравнений равновесия пластины были впервые использованы квадратичные деформационные соотношения Кирхгоффа [6]. Уравнения Бубнова с точностью до констант совпадают с уравнениями Бергера [7] и предваряют собой уравнения Фёппля [8] и Кармана [9–10].

Известно свыше полутора тысяч исследований по расчету упругих круговых и кольцевых пластин различного внутреннего строения на изгиб, устойчивость и колебания с учетом их геометрической нелинейности поведения. Одним из разделов этой массы исследований по нелинейной теории упругих пластин является группа работ по расчету на изгиб упругих ортотропных круговых и кольцевых пластин. Основы линейной теории изгиба тонких ортотропных и анизотропных пластин были заложены Герингом [11], Буссинеском [12] и Губером [13, 14] во второй половине XIX века и в начале XX века. Однако уравнения изгиба ортотропных пластин конечного прогиба на основе деформационных соотношений Кирхгоффа

$$\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{G}-\frac{2\nu_1}{E_1}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q+h\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$(0\le x\le a,\ 0\le y\le b)$$

где F и w – функция напряжений и прогиб пластины, q – распределенная поперечная нагрузка, E_1, E_2, ν_1, ν_2, G – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений упругости материала пластины, $D_1 = E_1h^3/[12(1-\nu_1\nu_2)]$, $D_2 = E_2h^3/[12(1-\nu_1\nu_2)]$, $D_k = Gh^3/12$ – главные жесткости изгиба и кручения, a, b и h – длина, ширина и толщина пластины, $D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k$, были получены Г.Г. Ростовцевым [15] только в 1940 г. В случае изотропной пластины $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G = E/2(1+\nu)$ эти уравнения переходят в уравнения Фёппля–Кармана.

Называя уравнения изгиба ортотропных пластин конечного прогиба именем Ростовцева, следует упомянуть исследования Х.М. Муштари. В 1938 г. в своей диссертации [16] он получил квадратичные деформационные соотношения, удельные усилия и моменты и записал уравнения равновесия в усилиях для тонкой ортотропной оболочки. Эти уравнения при приведении их к случаю пластины и записи в смешанной форме совпадают с уравнениями Ростовцева. Однако в [16] это сделано не было.

Общий взгляд на теорию ортотропных и анизотропных пластин, включающую геометрически нелинейные задачи, и на современное положение дел в этом разделе механики можно найти в книгах [17–23] и обзорах [24–26]. Настоящий обзор посвящен одному из сравнительно небольших разделов нелинейной теории пластин – изгибу ортотропных кольцевых и секториальных пластин. Он является продолжением обзора [27] и охватывает наибольшее количество работ по этому вопросу по сравнению с перечисленными выше исследованиями. Расчет геометрически нелинейных ортотропных пластин на устойчивость и колебания в данном обзоре не затрагивается, но в нем учтены все известные работы по этим разделам, в которых изгиб пластин является частным случаем выполненных исследований.

1. Кольцевые пластины. *Равномерно распределенная поперечная нагрузка.* Решение задачи об осесимметричном деформировании кольцевой цилиндрически ортотропной пластины постоянной толщины под действием равномерного поперечного давления получено в работах [28–31]. Все авторы использовали уравнения Ростовцева, записанные в цилиндрической системе координат. Л.Е. Андреева [28], рассматривая гофрированную пластину, предварительно привела ее к расчетной схеме цилиндрически ортотропной; пластина считалась жестко защемленной на внешнем контуре и имела абсолютно жесткую центральную вставку, наличие которой соответствует подвижному в поперечном направлении жесткому защемлению. Другими авторами рассматривался случай, когда пластина была либо жестко, либо скользяще защемлена обоими контурами [29], а также случай пластины со свободным от внешних связей внутренним контуром и жестко защемленным или шарнирно опертым внешним [30]. Для решения рассматриваемой задачи был использован [28] прием [32] разделения решения на изгибное (линейное) и мембранное (нелинейное). Автор записала точное решение для изгибной составляющей и решение Бубнова–Папковича для мембранной, представив прогиб полиномом второго порядка. В результате удалось найти кубическую зависимость между величиной поперечного давления и прогибом на внутреннем контуре пластины. Это решение впоследствии приведено в книге [33].

Тромбски [29] также использовал метод Бубнова–Папковича, но целиком для уравнений Ростовцева, записанных в смешанной форме в цилиндрической системе координат. Прогиб был аппроксимирован одним слагаемым в виде полинома третьего порядка, получены зависимости, аналогичные найденным ранее [28].

Рассматриваемая задача также решалась численно [30] методом, который представляет собой пошаговый алгоритм, организованный для линеаризованных разрешающих уравнений. Линеаризованные уравнения решались посредством разложения прогиба и функции напряжений в ряды по полиномам Чебышёва, а начальное приближение при новом значении нагрузки вычислялось с помощью экстраполяции по трем предыдущим точкам. Были приведены [30] графики зависимости прогиба и удельных радиальных и окружных усилий и моментов в характерных точках от величины поперечного давления.

Подобный алгоритм применен [31] для решения осесимметричной задачи о конечных прогибах цилиндрически ортотропной кольцевой пластины, нагруженной равномерным поперечным давлением. Существенным отличием этого алгоритма от использованного ранее [30] является применение метода коллокаций при решении линеаризованных уравнений Ростовцева с полиномиальным представлением прогиба пластины и ее функции напряжений. По результатам расчетов были построены [31] графики зависимости прогиба и радиальных и окружных мембранных и изгибных напряжений от величины приложенной нагрузки для разных вариантов граничных условий при разных значениях относительного размера внутреннего отверстия и отношения модулей упругости в окружном и радиальном направлениях. Упомянутые выше зависимости показаны для свободного внутреннего контура и шарнирно опертого или жестко защемленного внешнего контура, свободного внутреннего контура и жестко защемленного внешнего контура с упругостью в поперечном направлении, свободного внутреннего контура и жестко защемленного внешнего контура с заданными радиальными смещениями, для свободного внутреннего контура и шарнирно опертого внешнего контура с упругостью по отношению к углу поворота нормали, для шарнирно опертой и жестко защемленной пластины с абсолютно жесткой центральной вставкой, для пластины, свободной на внешнем контуре и упруго по углу поворота нормали опертой на внутреннем контуре.

Была рассмотрена цилиндрически ортотропная пластина линейно-переменной толщины, находящаяся под действием равномерной поперечной нагрузки [29]. Посредством метода Бубнова–Папковича с одночленной аппроксимацией прогиба полиномом в работе построено осесимметричное решение уравнений Ростовцева для случаев одновременного либо жесткого, либо скользящего защемления обоих контуров пластины и получена аналитическая зависимость между прогибом пластины и приложенной к ней нагрузки. В этой же работе приведено аналогичное решение для цилиндрически ортотропной жестко или скользяще защемленной обоими контурами кольцевой пластины постоянной толщины, имеющей начальную неправильность, задаваемую с помощью аппроксимации, подобной прогибу.

Численно построено [34] решение задачи о конечных прогибах цилиндрически ортотропной пластины, лежащей на упругом основании и находящейся под действием равномерной поперечной нагрузки. Пластина имеет свободный внутренний контур и жестко защемленный или шарнирно опертый внешний, а в качестве математической модели упругого основания используется модель, имеющая три слагаемых, одно из которых пропорционально прогибу в первой степени, второе – прогибу в кубе, а третье – оператору Лапласа от прогиба. Алгоритм решения поставленной краевой задачи состоит в организации процесса последовательных нагружений в виде экстраполяции начального приближения по трем предыдущим точкам, использующимся совместно с итерационным уточняющим процессом, в основе которого лежит решение линеаризованной краевой задачи для уравнений Ростовцева. Для решения линеаризованных уравнений применен метод коллокаций с аппроксимацией прогиба и функции напряжений полиномами и выбором в качестве точек коллокаций нулей полиномов Лежандра. Построены графики распределения прогиба, радиальных и окружных напряжений вдоль радиуса и зависимость наибольшего прогиба пластины от величины поперечного давления.

Неравномерно распределенная поперечная нагрузка. С помощью уравнений Ростовцева было изучено [35] несимметричное поведение цилиндрически ортотропной кольцевой пластины при действии поперечной нагрузки, которая постоянна по радиусу и меняется по закону косинуса в окружном направлении. Для решения задачи при жестком защемлении внешнего контура пластины и свободном от внешних связей внутреннем контуре был применен метод прямых по окружной координате совместно с методом ортогональной прогонки вдоль радиуса, использующим линеаризацию уравнений методом Ньютона. В качестве иллюстрации расчетов приведены графики распределения радиального изгибающего момента и прогиба вдоль радиуса пластины при нулевом значении окружной координаты и разных значениях отношения модулей упругости в радиальном и окружном направлениях.

Равномерно распределенная поперечная нагрузка на внутреннем контуре (сосредоточенная сила на жесткой вставке). С помощью уравнений Ростовцева были разобраны [28, 36, 37] случаи осесимметричного деформирования кольцевой цилиндрически ортотропной пластины равномерно распределенной по внутреннему контуру поперечной нагрузкой. Случаи приложения распределенной поперечной нагрузки на внутреннем и внешнем контурах пластины рассмотрены в ранее упомянутой работе [31].

Рассматривалась [28] приведенная к расчетной схеме цилиндрически ортотропной пластины гофрированная пластина, которая была жестко защемлена на внешнем контуре и имела абсолютно жесткую центральную вставку с приложенной к ней сосредоточенной силой. Наличие вставки с силой соответствует подвижному в поперечном направлении жесткому защемлению внутреннего контура с распределенной по нему поперечной нагрузкой. Для решения задачи был использован прием [32] разделения решения на изгибное, описываемое линейными уравнениями для ортотропной пластины, и мембранное, которое получается из решения уравнений Фёппля для ортотропной абсолютно гибкой мембраны. Для изгибной составляющей получено точное аналитическое решение, а для мембранной – построено решение методом Бубнова–Папковича с представлением прогиба линейной функцией. В результате найдена зависимость между сосредоточенным усилием и прогибом на внутреннем контуре пластины.

Похожая задача решена В.Н. Долгополовым [36]. Ее отличие от задачи, рассмотренной Л.Е. Андреевой [28], состоит в том, что в ней изначально рассматривалась цилиндрически ортотропная пластина и толщина пластины считалась переменной, изменяющейся по степенному закону. Решение этой задачи построено двумя методами: методом Бубнова–Папковича с одночленной аппроксимацией прогиба линейным решением и методом малого параметра, посредством представления прогиба и радиальных усилий в пластине в виде рядов по степеням величины сосредоточенной силы. Получены зависимости, аналогичные найденным Л.Е. Андреевой [28].

Была также рассмотрена [37] кольцевая цилиндрически ортотропная пластина постоянной толщины с абсолютно жесткой центральной вставкой, в центре которой приложена сосредоточенная сила. Использована та же постановка задачи, но учтена начальная осесимметричная погибь пластины, которая описывалась полиномом третьего порядка, и разобраны все классические граничные условия на внешнем контуре пластины. Решение задачи получено методом Бубнова–Папковича с одночленной аппроксимацией прогиба аналогично представлению начального прогиба и построен график зависимости прогиба на внутреннем контуре пластины от величины приложенной силы.

Думир и др. [31], решение которых описано выше, по результатам своих расчетов построили графики зависимости прогиба и радиальных и окружных мембранных и изгибных напряжений от величины приложенной нагрузки для шарнирного опирания и жесткого защемления пластин по внешнему контуру и нагружения поперечной нагрузкой на свободно смещающемся внутреннем контуре. Это же сделано для пластины, упруго опертой по углу поворота нормали на внутреннем контуре и нагруженной поперечной нагрузкой на свободном внешнем контуре, и для шарнирно опертой и жестко защемленной пластины с абсолютно жесткой вставкой с поперечной сосредоточенной силой.

Выворачивающий момент на центральной вставке. Была решена [38] задача о выворачивании из плоскости жестко или скользяще защемленной по внешнему контуру кольцевой пластины моментом, вектор которого лежит в плоскости пластины и который приложен к абсолютно жесткой центральной вставке, соответственно жестко или скользяще соединенной с пластиной на ее внутреннем контуре. Для описания задачи использованы уравнения Ростовцева в несимметричной постановке в цилиндрической системе координат для пластины постоянной толщины. Решение этих уравнений построено методом Бубнова–Папковича, для чего прогиб пластины представлялся произведением полинома третьего порядка от текущего радиуса пластины и косинуса от окружной координаты. Результаты расчета пластины представлены графиком изменения приложенного к вставке момента от угла ее поворота из плоскости пластины.

Нагрев пластины. Уравнения Ростовцева в смешанной форме использованы [39, 40] для описания процесса осесимметричного деформирования кольцевой густоперфорированной пластины в условиях неравномерного по толщине и вдоль радиуса нагрева. Учтена начальная осесимметричная неправильность пластины и изменяемость коэффициента линейного расширения и модулей упругости материала пластины в радиальном и окружном направлениях. Методом последовательных приближений получено решение для пластины, которая упруго по отношению радиальных перемещений и углу поворота нормали закреплена на обоих контурах и жестко оперта по отношению к прогибу на одном из них и упруго на другом. Расчеты в этих публикациях отсутствуют.

Окружные радиальные усилия и начальная погибь. В осесимметричной постановке с помощью уравнений Ростовцева рассматривался вопрос о конечных прогибах кольцевых цилиндрически ортотропных пластин с начальной осесимметричной погибью, которые появляются при действии равномерной радиальной нагрузки, приложенной на одном или двух контурах пластины [29, 41].

Эта задача решалась для густоперфорированной пластины посредством приведения ее к схеме цилиндрически ортотропной при ее скользящем защемлении по внешнему контуру, приложении к нему радиальной нагрузки и при наличии свободного от внешних связей внутреннего контура [41]. Была также рассмотрена пластина, нагруженная радиальной нагрузкой на обоих контурах и имеющая на них скользящее защемление [29]. В обеих работах для решения задачи использован метод Бубнова–Папковича с одночленным представлением прогиба и начальной неправильности пластины полиномами. В результате получены зависимости прогиба от величины нагрузки и амплитуды начальной неправильности и построены их графики.

Комбинации нагрузок. Рассматривали осесимметричное деформирование цилиндрически ортотропной кольцевой пластины при совместном действии на нее равномерного поперечного давления и равномерно распределенных по внешнему контуру радиальных усилий [42]. Поведение пластины при свободном внутреннем контуре и свободном опирании или скользящем защемлении внешнего описывалось с помощью уравнений Ростовцева, для которых краевая задача решалась посредством пошагового алгоритма, основанного на линеаризации разрешающих уравнений. Сами линеаризованные уравнения решались с помощью разложения прогиба и функции напряжений в ряды по полиномам Чебышёва, а начальное приближение решения при новом значении нагрузки экстраполировалось по трем предыдущим точкам. По результатам расчетов были построены графики, показывающие зависимости прогиба от величины сжимающей силы и радиальных и окружных мембранных и изгибных напряжений от величины прогиба на внутреннем контуре пластины.

В качестве исследований, в которых рассматривалось осесимметричное поведение кольцевых цилиндрически ортотропных пластин постоянной толщины при одновременном действии на внутреннем контуре поперечных контурных усилий, изгибающего контурного момента и окружных радиальных усилий, а также поперечных контурных усилий, изгибающего контурного момента, окружных радиальных усилий и распределенной поперечной нагрузки, можно считать исследования, проведенные Лю Рен-хуаем [43, 44]. В них для решения задачи о деформировании составной жестко защемленной круговой гофрированной пластины под действием центральной сосредоточенной силы или сосредоточенной силы и равномерного поперечного давления автору пришлось с помощью метода малого параметра построить решение для кольцевой цилиндрически ортотропной пластины с жестким защемлением на внешнем контуре и произвольными значениями силовых факторов на внутреннем контуре. Это решение может быть использовано при выполнении расчетов для рассматриваемых случаев нагружения кольцевой пластины.

2. Секториальные пластины. Решалась задача о конечных прогибах цилиндрически ортотропной пластины, выполненной в виде кольцевого сектора [45]. Пластина считалась жестко защемленной по всему контуру и была нагружена равномерным поперечным давлением. Ее напряженно-деформированное состояние описывалось уравнениями Ростовцева в перемещениях. Для дискретизации задачи применялся следующий вариант метода конечных разностей. На плоскую область, занимаемую пластиной, наносится полярно-ортогональная сетка, в узлах которой в качестве неизвестных решения принимаются производные перемещений по окружной координате: $\partial^2 u/\partial\theta^2$, $\partial^2 v/\partial\theta^2$ и $\partial^4 w/\partial\theta^4$. С помощью функции Грина для линейной задачи в долях значений этих производных в узлах сетки находятся сами перемещения и оставшиеся производные, а затем вся информация о перемещениях подставляется в разрешающие уравнения, записанные также для каждой узловой точки сетки. В результате получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно выбранных неизвестных, которая решается методом последовательных нагружений с уточнением решения для каждого значения нагрузки методом Ньютона. В качестве иллюстраций проведенных расчетов авторы привели графики зависимости прогиба пластины и ее радиальных и окружных мембранных и изгибных напряжений от величины поперечной нагрузки при разных значениях полярного угла раствора пластины и отношения радиусов ее большего и меньшего оснований, а также в виде таблиц показали сходимость вычислений прогиба и удельных усилий и моментов в зависимости от густоты используемой сетки.

3. Заключение. Количество работ по расчету геометрически нелинейного поведения кольцевых ортотропных пластин при действии статических нагрузок значительно меньше, чем для круговых (см. [27]). Приоритет в этой области также принадлежит отечественным ученым, чьи работы были опубликованы в конце 1950-х годов, в то время как основная масса работ по этой тематике приходится на 1970-е и 1980-е гг.

Несмотря на ограниченное количество найденных работ по кольцевым пластинам, в них разобраны практически все классические случаи их нагружения и закрепления, случаи переменности их толщины, а также случаи наличия у них начальных прогибов. Исключение составляют лишь некоторые случаи приложения комбинированных нагрузок с присутствием в них сдвиговых нагрузок в плоскости пластины. С этой точки зрения, можно утверждать, что подобные задачи уже перешли из сферы научных интересов в сферу интересов практических расчетов инженерных конструкций, если таковые появляются.

Однако, принимая во внимание отсутствие решений задач для кольцевых пластин большого прогиба при малых и конечных деформациях, исследований, учитывающих упрощающие гипотезы Бергера, а также исследований поведения пластин с нецилиндрической (прямоугольной) ортотропией материала, считать данный раздел теории пластин завершенным нельзя, и необходимость дополнительных исследований в этом направлении вполне очевидна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilson R.* The strenght of unstayed flat surfaces // Engineering. 1877. V. 24. Sept. 28. P. 239–240.
2. *Бубнов И.Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды // Морской сб. 1902. Т. 311. № 8. С. 117–141; Т. 312. № 9. С. 111–139; № 10. С. 119–138; № 12. С. 107–130.
3. *Бубнов И.Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды. Санкт-Петербург: Типолитография А.Э. Винеке, 1904. 93 с. = *Boobnoff I.G.* On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure // Trans. Inst. of Naval Arch. 1902. V. 44. P. 15–46; 51–52. Отдельный оттиск: 1902. 32 pp.
4. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля. Санкт-Петербург: Тип. Морского министерства, 1914. Ч. 2. С. 331–640.

5. *Бубнов И.Г.* Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. 423 с.
6. *Kirchhoff G.* Volsungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876 = *Кирхгофф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 402 с.
7. *Berger H.M.* A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 4. P. 465–472.
8. *Föppl A.* Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Leipzig: Teubner, 1907. 391 S.
9. *Kármán Th.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 4. Mechanik. T. 4. H. 3. A. 27. Leipzig: Teubner, 1910. S. 311–385.
10. *Kármán Th.* Collected works. L..n: Batterworths Scient. Publ. 1956. V. 1. 530 p.
11. *Gehring F.* De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur. Berolini [Berlin]: 1859. 30 p.
12. *Boussinesq J.* Compléments à une étude sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solids élastiques // J. Math. Pures. et Appl. 1879. Ser. 3. T. 5. P. 163–194; 329–344.
13. *Huber M.T.* Teorja Plyt. Lwow: Tow. Naukowe, 1921. 249 s.
14. *Huber M.T.* Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten // ZAMM. 1926. Bd. 6. H. 3. S. 228–231.
15. *Ростовцев Г.Г.* Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости, при нагружении силами, лежащими в ее плоскости и перпендикулярными к ней // Тр. Ленингр. ин-та инж. гр. возд. флота. 1940. Вып. 20. С. 3–109.
16. *Муштари Х.М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия // Изв. Физ. – мат. о-ва и НИИ математики и механики при Казан. ун-те. Сер. 3. 1938. Т. 11. С. 71–150.
17. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
18. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
19. *Бурмистров Е.Ф.* Симметричная деформация конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Саратов: Изд-во СГУ, 1962. 108 с.
20. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plate and Shells. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1959 = *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
21. *Kaczkowski Z. Płyty.* Obliczenia statyczne. Warszawa: Arkady, 1968. 512 s.
22. *Marguerre K., Woernle H.-T.* Elastic plates. Waltham, Mass.: Blaisdell Publ. Co., 1969. 214 c.
23. *Chia C.-Y.* Nonlinear Analysis of Plates. N.Y.: McGraw-Hill, 1980. 422 p.
24. *Sliter G.E., Nikolai R.I., Boresi A.P.* Elastic plates: Annotated bibliography 1930–1962. Urbana: Univ. Illinois, 1964. Techn. Rept. № 10. 224 p.
25. *Bert C.W.* Analysis of plates // Compos. Materials. Struct. Design and Anal. 1975. V. 7. Pt 1. P. 149–206.
26. *Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Вып. 15. С. 3–68.
27. *Лопаницын Е.А.* Геометрически нелинейные задачи изгиба ортотропных круговых пластин // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 246–269.
28. *Андреева Л.Е.* Определение характеристик и эффективной площади гофрированной мембраны с жестким центром // Научн. докл. высш. школы. Сер. Машиностроение и приборостроение. 1958. № 1. С. 218–227.
29. *Trombski M.* Zagadnienia płyt pierścieniowych o ortotropii cyłindricznej w ujęciu nieliniowym // Zesz. Nauk. Pol. Łodz. – 1972. V. 25. № 156. P. 5–81.
30. *Alwar R.S., Reddy B.S.* Large deflection static and dynamic analysis of isotropic and orthotropic annular plates // Intern J. Non-Linear Mech. 1979. V. 14. № 5–6. P. 347–359.
31. *Dumir P.C., Nath Y., Gandhi M.L.* Non-linear axisymmetric static analysis of orthotropic thin annular plates // Intern. J. Non-Linear Mech. 1984. V. 19. № 3. P. 255–272.
32. *Föppl A., Föppl L.* Drang und Zwang. Bd. 1. München; Berlin: Oldenbourg, 1920. 359 S.

33. *Андреева Л.Е.* Упругие элементы приборов. М.: Машгиз, 1962. 455 с.
34. *Dumir P.C.* Large deflection axisymmetric analysis of orthotropic annular plates on elastic foundations // J. Solids and Struct. 1988. V. 24. № 8. P. 777–787.
35. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* О неосесимметричной деформации гибких круговых слоистых ортотропных пластин с переменными жесткостными параметрами // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 3. С. 49–54.
36. *Долгополов В.Н.* Большие прогибы круглой кольцевой ортотропной пластинки переменной толщины // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов: Изд-во СГУ, 1971. Вып. 6. С. 89–97.
37. *Trombski M., Pawicki Z.* Przyblizona analiza teoretyczna i doswiadczalna duzych ugięl plyt pierscieniowych // Zesz. Nauk. Pol. Łodz. 1985. V. 69. № 446. P. 85–99.
38. *Strzelczyk A., Trombski M.* Antysymetryczne zginanie kołowej płyty ortotropwej w ujeciu nieliniowym // Arch. Bud. Masz. 1974. V. 21. № 4. P. 593–601.
39. *Федоров В.А.* Исследование термоустойчивости закритического поведения и нелинейного изгиба густо перфорированных кольцевых пластин переменной жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 197.
40. *Федоров В.А.* Исследование температурного выпучивания и изгиба густо перфорированных пластин круговой формы с учетом геометрической нелинейности // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будiвельник, 1980. № 36. С. 24–27.
41. *Klemm P.* Statecznośċ pierścieniowych plyt perforowanych wstepnie wygietych // Zesz. Nauk. Pol. Łodz. 1970. V. 4. № 127. P. 47–65.
42. *Sekhar Reddy B., Alwar R.S.* Post-buckling analysis of orthotropic annular plates // Acta mech. 1981. V. 39. № 3–4. P. 289–296.
43. *Liu Ren-huai.* Large deflection of corrugated circular plate with a plane central region under the action of concentrated loads at the center // Intern. J. Non-Linear Mech. 1984. V. 19. № 5. P. 409–419.
44. *Liu Ren-huai.* Nonlinear bending of corrugated circular plate under the combined action of uniformly distributed load and concentrated load at the center // Proc. Intern. Conf. Non-Linear Mech., Shanghai, 1985. Beijing: 1985. P. 271–278.
45. *Srinivasan R.S., Thiruvenkatachari V.* Non-linear bending of annular sector plates using a matrix method // Comput. and Structures. 1984. V. 18. № 5. P. 803–812.

Москва
e-mail: eal@mami.ru

Поступила в редакцию
27.XI.2002