УДК 539.3

© 2003 г. Я. И. Бурак, Г. И. Мороз

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

С использованием функционала Гамильтона сформулирована вариационная постановка краевых задач нелинейной динамической теории упругости. Рассмотрена квазистатическая краевая задача для тонких пластин. Исходная система уравнений в двумерной постановке представлена относительно обобщенных сил и перемещений. Установлены достаточные условия существования и единственности слабого решения.

1. Вариационная постановка краевых задач нелинейной теории упругости. Рассматривается упруго деформируемое изотропное твердое тело K^*. В исходной конфигурации тело ненагружено, однородно и в евклидовом пространстве занимает область X_0, ограниченную поверхностью ∂X_0. Положение произвольной точки $k \in K^*$ в исходной конфигурации ($\tau < \tau_1$) характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Во временном интервале $[\tau_1, \tau_2]$ тело находится под воздействием поверхностных и объемных сил и в текущей конфигурации ($\tau_1 \le \tau \le \tau_2$) занимает область $X \cup \partial X$. Положение точки $k \in K^*$ в произвольный момент времени ($\tau_1 \le \tau \le \tau_2$) определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \tau)$.

При вариационном формулировании математической модели нелинейной теории упругости в качестве исходного принимается функционал Гамильтона

$$F[\mathbf{u}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{p}] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \int_{X_0} \left[H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} - \mathbf{f}_0 \right) \right] dV_0 - \int_{\partial X_0} \boldsymbol{\sigma}_n^+ \cdot \mathbf{u} d\Sigma_0 \right\} d\tau -$$

$$- \int_{X_0} \mathbf{u}_{(2)}^* \cdot \mathbf{p}_{(2)} dV_0 \qquad (1.1)$$

где $H = H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})$ – функция Гамильтона, $\mathbf{p} = \int_{\tau_1}^{\tau} (\nabla_0 \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}_0) d\tilde{\tau}$ – вектор плотности силового импульса, $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода, $\boldsymbol{\sigma}_n^+ = \boldsymbol{\sigma}_n^+(\mathbf{r}_0, \tau)$ – вектор поверхностных усилий, $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{r}_0, \tau)$ – вектор плотности массовых сил, действующих в области X_0, $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ – вектор перемещения точки тела из исходной конфигурации в текущую, $\boldsymbol{\upsilon} = \partial \mathbf{u}/\partial \tau$ – вектор скорости, $\nabla_0 \equiv \partial/\partial \mathbf{r}_0$ – оператор Гамильтона, $\nabla_0 \otimes \mathbf{u} = \nabla_0 \otimes \mathbf{r} - \hat{I}$, $\nabla_0 \otimes \mathbf{r}$ – тензор градиента места, $\hat{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{u}_{(2)}^*(\mathbf{r}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, \tau_2)$ – заданное поле вектора перемещения в момент времени τ_2, $\mathbf{p}_{(2)}(\mathbf{r}_0) \equiv \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \tau_2)$.

Здесь и в дальнейшем все аддитивные параметры физически малой области $\delta K \subset K^*$ нормируются по геометрическим параметрам δV_0, $\delta\Sigma_0$ этой области в исходном состоянии. В частности,

$$\delta H = H\delta V_0, \quad \delta \mathbf{P} = \mathbf{p}\delta V_0, \quad \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}_n = \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}{}^*_n \frac{d\Sigma^*}{d\Sigma_0}, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}^*\frac{dV^*}{dV_0}$$

где H и $\mathbf{p}$ – плотности аддитивных параметров δH и $\delta\mathbf{P}$, $\overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}{}^*_n$ и $\mathbf{f}^*$ – векторы поверхностных усилий и массовых сил в текущей конфигурации, dV^*, $d\Sigma^*$ – геометрические параметры физически малой области в текущей конфигурации.

Необходимым условием минимума функционала Гамильтона является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta F[\mathbf{u}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{p}] =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{X_0}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \boldsymbol{\upsilon}\right)\cdot \delta\mathbf{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial(\nabla_0\otimes\mathbf{u})} - \hat{\sigma}\right)\cdot\cdot\, \delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^T\right]dV_0 + \int_{\partial X_0}(\boldsymbol{\sigma}_n - \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}_n)\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma_0\right\}d\tau +$$

$$+ \int_{X_0}[(\mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}^*_{(2)})\cdot\delta\mathbf{p}_{(2)} - \mathbf{u}_{(1)}\cdot\delta\mathbf{p}_{(1)}]dV_0 = 0 \tag{1.2}$$

Из независимости вариаций $\delta\mathbf{u}$, $\delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^T$, $\delta\mathbf{p}$ получим следующие определяющие соотношения модели:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \equiv \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{p}, \nabla_0\otimes\mathbf{u}), \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial\nabla_0\otimes\mathbf{u}} \equiv \hat{\sigma}(\mathbf{p}, \nabla_0\otimes\mathbf{u}), \quad \mathbf{r}_0 \in X_0 \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n}\cdot\hat{\sigma} = \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}_n, \quad \mathbf{r}_0 \in \partial X_0 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}|_{\tau=\tau_1} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\tau=\tau_2} = \mathbf{u}^*_{(2)}, \quad \mathbf{r}_0 \in X_0 \tag{1.5}$$

Из соотношений (1.3) следует, что функция Гамильтона $H(\mathbf{p}, \nabla_0\otimes\mathbf{u})$ является функцией локального состояния, уравнения (1.3) – (1.5) – это определяющие уравнения модели, и, соответственно, дифференциальная 1-форма

$$dH = \boldsymbol{\upsilon}\cdot d\mathbf{p} + \hat{\sigma}\cdot\cdot\, d(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^T \tag{1.6}$$

будет полным дифференциалом.

Достаточным условием минимума функционала Гамильтона (1.1) является условие его выпуклости

$$\delta^2 F = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_{\partial X_0}\delta\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\delta\mathbf{u}d\Sigma_0\right]d\tau + \int_{X_0}[\delta\mathbf{u}_{(2)}\cdot\delta\mathbf{p}_{(2)} - \delta\mathbf{u}_{(1)}\cdot\delta\mathbf{p}_{(1)}]dV_0 > 0 \tag{1.7}$$

которое можно преобразовать к виду

$$\delta^2 F = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_{X_0}\{\delta\boldsymbol{\upsilon}\cdot\delta\mathbf{p} + \delta\hat{\sigma}\cdot\cdot\,\delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^T + 2(\nabla_0\cdot\delta\hat{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\}dV_0\right]d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{X_0}\{\delta^2 H + 2(\nabla_0\cdot\delta\hat{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\}\delta V_0 d\tau > 0$$

В качестве достаточных условий выпуклости можно принять, в частности, условия

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{X_0} \delta^2 H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})dV_0 d\tau > 0, \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{X_0} (\nabla_0 \cdot \delta\hat{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 d\tau \geq 0 \tag{1.8}$$

Соотношения (1.3) – (1.5), (1.8) составляют полную систему уравнений динамических процессов в упругих телах.

Для получения уравнений движения, записанных относительно вектора перемещения, в функционале (1.1) сделан переход от функции Гамильтона $H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})$ к функции Лагранжа по преобразованию Лежандра [1]

$$L = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{p} - H \tag{1.9}$$

Достаточным условием существования функции $L = L(\boldsymbol{v}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})$ является выполнение условия Лежандра, которое эквивалентно условию

$$I_3\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}}\right) \neq 0; \quad I_3 = I\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}}\right) \equiv \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathbf{p}}\right) \cdot\cdot\, \hat{I}$$

где I_3 – третий алгебраический инвариант тензора $\partial\boldsymbol{v}/\partial\mathbf{p}$.

Дифференциальная 1-форма для функции L представляется в виде

$$dL = \mathbf{p} \cdot d\boldsymbol{v} - \hat{\sigma} \cdot\cdot\, d(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^T$$

Функция L является функцией состояния, заданной на фазовом пространстве параметров $\boldsymbol{v}$, $\nabla_0 \otimes \mathbf{u}$. Сопряженными к ним будут обобщенные силы $\mathbf{p}$, $\hat{\sigma}$, для которых справедливы определяющие уравнения состояния

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \equiv \mathbf{p}(\boldsymbol{v}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}), \quad \hat{\sigma} = -\frac{\partial L}{\partial \nabla_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\sigma}(\boldsymbol{v}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) \tag{1.10}$$

Функционал Гамильтона (1.1) после перехода к функции Лагранжа записывается в виде

$$F^*[\mathbf{u}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_{(2)}] =$$
$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{X_0}\left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{v}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} - \mathbf{f}_0\right)\right]dV_0 - \int_{\partial X_0} \boldsymbol{\sigma}_n^+ \cdot \mathbf{u} d\Sigma_0\right\}d\tau -$$
$$- \int_{X_0} \mathbf{u}_{(2)}^* \cdot \mathbf{p}_{(2)} dV_0 \tag{1.11}$$

Для вариации этого функционала при учете уравнений состояния (1.10) получим

$$\delta F^*[\mathbf{u}, \mathbf{p}_{(2)}] = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{X_0}\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} - \mathbf{f}_0 - \nabla_0 \cdot \hat{\sigma}\right) \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 + \int_{\partial X_0} (\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^+) \cdot \delta\mathbf{u} d\Sigma_0\right\}d\tau +$$
$$+ \int_{X_0} [(\mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)}^*) \cdot \delta\mathbf{p}_{(2)} - \mathbf{u}_{(1)} \cdot \delta\mathbf{p}_{(1)}]dV_0 \tag{1.12}$$

Из равенства нулю вариации функционала F^*, как необходимого условия его экстремума, следуют уравнения локально сформулированной краевой задачи в перемещениях

$$\nabla_0 \cdot \hat{\sigma}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}\right) + \mathbf{f}_0 = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}\right)\right) \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n\big|_{\partial X_0} = \boldsymbol{\sigma}_n^+, \quad \mathbf{u}\big|_{\tau = \tau_1} = 0, \quad \mathbf{u}\big|_{\tau = \tau_2} = \mathbf{u}_{(2)}^* \tag{1.14}$$

Для функции Гамильтона принимается, что

$$H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) = W(\mathbf{p}) + U_0(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})$$

$$W(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\rho}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad \rho = \frac{\delta m}{\delta V_0} = \rho^* \frac{\delta V^*}{\delta V_0}, \quad \rho^* = \frac{\delta m}{\delta V^*}$$

где ρ – плотность массы δm физически малого элемента, отнесенная к его объему δV_0 в исходном состоянии; в линейном приближении $\rho_* \approx \rho(1 - e)$, $e = \nabla_0 \cdot \mathbf{u}$.

Тогда функция Лагранжа и уравнения состояния будут такими:

$$L(\boldsymbol{v}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) = \frac{\rho}{2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} - U_0(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})$$

$$\mathbf{p} = \rho \boldsymbol{v}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial U_0(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})}{\partial \nabla_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\sigma}(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})$$

При этом уравнение (1.13) запишется в виде

$$\nabla_0 \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \tau} \tag{1.15}$$

Для упругих изотропных материалов плотность потенциальной энергии деформации U_0 – функция семи независимых скалярных инвариантов тензоров $\hat{e} = \frac{1}{2}(\nabla_0 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_0)$ и $\hat{c} = \frac{1}{2}(\nabla_0 \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \nabla_0)$ [2]:

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0(I(\hat{e}), I(\hat{e}^2), I(\hat{c}^2), I(\hat{e}^3), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{e}), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{e}^2), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{e} \cdot \hat{c} \cdot \hat{e}^2)) \equiv \\ &\equiv U_0(A_1, A_2, \ldots, A_7) \end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$\hat{c}^i \cdot \hat{e}^j = \underbrace{\hat{c} \cdot \hat{c} \cdot \ldots \cdot \hat{c}}_{i} \cdot \underbrace{\hat{e} \cdot \hat{e} \cdot \ldots \cdot \hat{e}}_{j},$$

$I(\cdot)$ – след тензора второго ранга.

Учитывая формулы (1.16), запишем уравнение состояния для тензора напряжений нелинейной теории упругости

$$\hat{\sigma} \equiv \frac{\partial U_0}{\partial(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})} = \frac{\partial U_0}{\partial A_i}\frac{\partial A_i}{\partial(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})}$$

2. Квазистатическая постановка краевых задач для тонких пластин. Условия существования и единственности. Пусть упругое тело является тонкой пластиной ограниченных размеров. В исходном состоянии пластина характеризуется срединной поверхностью ∂X_0^c и толщиной $2h$. Положение произвольной точки пластины определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0*} + \mathbf{r}_{03}$, где $\mathbf{r}_{0*}$ – радиус-вектор точек срединной поверхности пластины ($\xi^3 = 0$); $\mathbf{r}_{03} = \xi^3 Э_0^3$ – вектор положения точек по нормали к срединной поверхности ($\xi^3 \in [-h, h]$); $Э_0^3$ – единичный вектор в направлении нормали к срединной поверхности.

Для квазистатического нагружения

$$\int\limits_{X_0} \mathbf{f}_0 dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \boldsymbol{\sigma}_n^+ d\Sigma_0 = 0$$

краевая задача (1.15), (1.14) состоит из уравнения равновесия и граничного условия на поверхности ∂X_0

$$\nabla_0 \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_n\big|_{\partial X_0} = \boldsymbol{\sigma}_n^+ \tag{2.1}$$

При этом функционал Гамильтона (1.1) совпадает с функционалом Лагранжа

$$J[\mathbf{u}] = \int\limits_{X_0} [U_0(\nabla_0 \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{u}] dV_0 - \int\limits_{\partial X_0} \boldsymbol{\sigma}_n^+ \cdot \mathbf{u} d\Sigma_0 \tag{2.2}$$

Достаточные условия выпуклости функционала (2.2) аналогичны условиям (1.8) и записываются в виде

$$\int\limits_{X_0} \delta^2 U_0(\nabla_0 \otimes \mathbf{u}) dV_0 > 0, \quad \int\limits_{X_0} (\nabla_0 \cdot \delta\hat{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 \geq 0 \tag{2.3}$$

Для исследования первого условия (2.3) используется выражение (1.16) для потенциала U_0 как функции скалярных инвариантов тензоров $\hat{e}$ и $\hat{c}$. В этом случае первый дифференциал Гато функционала $J[\mathbf{u}]$ в направлении вектора $\boldsymbol{\varphi}$ записывается следующим образом:

$$J'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int\limits_{X_0} \left[\frac{\partial U_0(A_1, \ldots, A_7)}{\partial A_i} \left(\frac{d}{d\theta} A_i(\nabla_0 \otimes \mathbf{u} + \theta \nabla_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}) \right)\bigg|_{\theta = 0} - \mathbf{f}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \right] dV_0 -$$

$$- \int\limits_{\partial X_0} \boldsymbol{\sigma}_n^+ \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Sigma_0, \quad \theta \in (0, 1), \quad i = 1, \ldots, 7 \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Второй дифференциал Гато в направлениях $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ при $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$ представляется в виде

$$J''(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) = \int\limits_{X_0} \left[\frac{\partial^2 U_0(A_1, \ldots, A_7)}{\partial A_i \partial A_j} \left(\frac{d}{d\theta} A_i(\nabla_0 \otimes \mathbf{u} + \theta \nabla_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}) \right)\bigg|_{\theta = 0} + \right.$$

$$+\frac{\partial U_0(A_1,\ldots,A_7)}{\partial A_i}\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\left(\frac{d}{d\theta}A_i(\nabla_0\otimes\mathbf{u}+\theta\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})\right)\bigg|_{\theta=0}\right)\Bigg]\times$$

$$\times\left(\frac{d}{d\gamma}A_j(\nabla_0\otimes\mathbf{u}+\gamma\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})\right)\bigg|_{\gamma=0}dV_0\equiv\int\limits_{X_0}\frac{\partial^2 U_0}{\partial q^{mn}\partial q^{ts}}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi^n}\frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi^s}\right)dV_0 \tag{2.5}$$

$$\theta,\gamma\in(0,1);\quad m,n,t,s=1,2,3;\quad i,j=1,\ldots,7;\quad q^{mn}=\frac{\partial u_n}{\partial\xi^m},\quad q^{ts}=\frac{\partial u_s}{\partial\xi^t}.$$

Таким образом, в соответствии с выражением (2.5) локальным достаточным условием выпуклости функционала является положительная определенность квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial q^{mn}\partial q^{ts}}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi^n}\frac{\partial\varphi_t}{\partial\xi^s}\right)>0,\quad\forall\boldsymbol{\varphi}\in V;\quad m,n,t,s=1,2,3 \tag{2.6}$$

Согласно критерию Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы неравенство (2.6) эквивалентно условию положительности всех девяти главных миноров $\Delta_1,\ldots,\Delta_9$ матрицы квадратичной формы (2.6).

Предполагается, что в рассматриваемом диапазоне изменения внешней нагрузки выполняется второе условие (2.3). В этом случае справедлива [3, 4] следующая теорема о существовании и единственности минимума функционала $J[\mathbf{u}]$.

Теорема 1. Пусть Y – слабо замкнутое подпространство рефлексивного банахового пространства W, а функционал $J[\mathbf{u}]$ дважды непрерывно дифференцируем по Гато. Тогда

А. Если для всех $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}\in Y$ первый дифференциал Гато $J'(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})$ функционала $J[\mathbf{u}]$ в направлении $\boldsymbol{\varphi}$ линейный и непрерывный по $\boldsymbol{\varphi}$, а второй дифференциал Гато $J''(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})$ удовлетворяет условию $J''(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})\geq 0$, то существует минимум функционала $J[\mathbf{u}]$ в пространстве Y.

Б. Если минимум функционала существует и, кроме этого, функционал $J[\mathbf{u}]$ строго выпуклый, то в пространстве Y этот минимум единственный.

Доказательство предполагает построение решения краевой задачи (2.1) в виде слабо сходящейся минимизирующей последовательности. Вариант построения такого решения для тонких пластин предлагается ниже.

3. Математическая модель теории пластин. Достаточные условия существования и единственности. Функционал Лагранжа (2.2) вариационной постановки краевой задачи (2.1) рассматривается в рефлексивном банаховом пространстве обобщенных функций

$$W=\left\{\mathbf{u}\in W_2^1(X_0)\times W_2^1(X_0)\times W_2^1(X_0)\colon\frac{l}{V_0}\int\limits_{X_0}\mathbf{u}dV_0=\boldsymbol{\alpha},\ \frac{1}{V_0}\int\limits_{X_0}\nabla_0\times\mathbf{u}dV_0=\boldsymbol{\beta}\right\} \tag{3.1}$$

Здесь $W_2^1(X_0)\times W_2^1(X_0)\times W_2^1(X_0)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{[W_2^1(X_0)]^3}=\left\{\frac{1}{V_0}\left[\int\limits_{X_0}\frac{1}{l^2}(u_1^2+u_2^2+u_3^2)dV_0+\int\limits_{X_0}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j}\right)^2dV_0\right]\right\}^{1/2}$$

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – заданные постоянные векторы, l – характерный размер срединной поверхности пластины.

В качестве минимизирующей для функционала $J[\mathbf{u}]$ принимается следующая последовательность вектор-функций:

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(i-1)} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\mathbf{r}_{0*}),\quad m \in \mathbf{N};\quad \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(i-1)} \equiv \frac{1}{l^{i-1}}\underbrace{\mathbf{r}_{03}\otimes\ldots\otimes\mathbf{r}_{03}}_{i-1} \tag{3.2}$$

Здесь $\left\{\left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(i-1)}\right\}$ $(i \in \mathbf{N})$ – заданный базис тензоров возрастающей валентности, индексы $(i-1)$ и (i) указывают на валентность тензорных функций, $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

В этом случае функционал Лагранжа (2.2) для функции $\mathbf{u}_m$ и его первая вариация представляются в виде

$$J[\mathbf{u}_m] = \int_{\partial X_0^c}\left[\tilde{U}_0 - \sum_{i=1}^{m}\hat{F}^{(i)} \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)}\right]d\Sigma_0^c + \oint_s \sum_{i=1}^{m}\hat{Q}_{21}^{(i)+} \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)}dl_0$$

$$\delta J[\mathbf{u}_m] = \int_{\partial X_0^c}\sum_{i=1}^{m}\left(Э_0^3\cdot\hat{Q}_{22}^{(i+1)} - \nabla_{0*}\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)} - \hat{F}^{(i)}\right)\overset{i}{\cdot}\delta\hat{u}^{(i)}\delta\Sigma_0^c +$$

$$+\oint_s\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{n}\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)} - \hat{Q}_{21}^{(i)+})\cdot\delta\hat{u}^{(i)}dl_0^i \tag{3.3}$$

$$\tilde{U}_0 = \int_{-h}^{h}U_0 d\xi^3,\quad \hat{F}^{(i)} = \int_{-h}^{h}\mathbf{f}_0\otimes\left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(i-1)}d\xi^3 + \boldsymbol{\sigma}_{3+}\otimes\left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)_+^{(i-1)} - \boldsymbol{\sigma}_{3-}\otimes\left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)_-^{(i-1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = Э_0^3\cdot\hat{\sigma},\quad \nabla_{0*} \equiv \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_{0*}}\quad \hat{Q}_{21}^{(i+1)} = \int_{-h}^{h}\hat{\sigma}\otimes\left(\frac{\mathbf{r}_{30}}{l}\right)^{(i-1)}d\xi^3,$$

$$\hat{Q}_{22}^{(i+1)} = \int_{-h}^{h}\hat{\sigma}\otimes\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\mathbf{r}_{30}}{l}\right)^{(i-1)}d\xi^3,\quad \hat{Q}_{21}^{(i)+} = \int_{-h}^{h}\boldsymbol{\sigma}_n^+\otimes\left(\frac{\mathbf{r}_{30}}{l}\right)^{(i-1)}d\xi^3$$

Нижними индексами плюс и минус обозначены граничные значения соответствующих величин на верхнем и нижнем основаниях пластины; $\hat{e}_1^{(i+1)} = \nabla_{0*}\otimes\hat{u}^{(i)}$, $\hat{e}_2^{(i+1)} = Э_0^3\otimes\hat{u}^{(i)}$ – обобщенные координаты, $\hat{Q}_{21}^{(i+1)}$, $\hat{Q}_{22}^{(i+1)}$ – сопряженные к ним обобщенные силы; s – замкнутый контур срединной поверхности пластины, dl_0 – элемент дуги.

Из условий минимума функционала (3.3) в пространстве W следует краевая задача, сформулированная относительно введенных обобщенных координат и обобщенных сил:

$$\nabla_0\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)} - Э_0^3\cdot\hat{Q}_{22}^{(i+1)} + \hat{F}^{(i)} = 0;\quad [\mathbf{n}\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)}]_{\partial X_0^c} = \hat{Q}_{21}^{(i)+};\quad i = 1,\ldots,m \tag{3.4}$$

Условия выпуклости функционала (3.3) следуют из условий (2.3) и представляются в виде

$$\int\limits_{\partial X_0^c} [\delta\hat{Q}_{21}^{(i+1)} \,{}^{i+1}_{\cdot}\, \delta\hat{e}_1^{(i+1)} + \delta\hat{Q}_{22}^{(i+1)} \,{}^{i+1}_{\cdot}\, \delta\hat{e}_2^{(i+1)}] d\Sigma_0^c > 0$$

$$\int\limits_{\partial X_0^c} \Bigg[\delta\hat{Q}_{21}^{(i+1)} \,{}^{i+1}_{\cdot}\, \delta\hat{e}_1^{(i+1)} - \delta\hat{Q}_{22}^{(i+1)} \,{}^{i+1}_{\cdot}\, \delta\hat{e}_2^{(i+1)} + \tag{3.5}$$

$$+\left(\delta\boldsymbol{\sigma}_{3+} \otimes \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)_+^{(i-1)} - \delta\boldsymbol{\sigma}_{3-} \otimes \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)_-^{(i-1)}\right) \,{}^{i}_{\cdot}\, \delta\hat{u}^{(i)}\Bigg] d\Sigma_0^c > 0$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему о достаточных локальных условиях существования и единственности слабого минимума функционала Лагранжа.

Теорема 2. А. Пусть

1) на слабо замкнутом подпространстве W рефлексивного банахового пространства $[W_2^1(X_0)]^3$ функционал Лагранжа $J[\mathbf{u}]$ дважды непрерывно дифференцируем по Гато;

2) в пространстве функций W существует единственное решение $\mathbf{u}^l$ соответствующей (2.1) линейной краевой задачи теории упругости;

3) для тензоров $\hat{\sigma}^*$, $\hat{\sigma}^l$ ($\hat{\sigma}^* \equiv \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^l$, $\hat{\sigma}^l$ – тензор напряжений линейной теории упругости) выполняется условие

$$\left|\int\limits_{X_0} \hat{\sigma}^*(\mathbf{u}) \cdot\cdot (\nabla_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^T dV_0\right| \le \left|\int\limits_{X_0} (\hat{\sigma}^l(\mathbf{u}) \cdot\cdot (\nabla_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^T dV_0)\right| \quad \text{для всех } \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in W$$

4) коэффициенты

$$[(\mathrm{Э}_0^3)^{j-1} \,{}^{j-1}_{\cdot}\, \hat{f}_0^{(j)}] \cdot \mathrm{Э}_0^i, \quad [(\mathrm{Э}_0^3)^{j-1} \,{}^{j-1}_{\cdot}\, \hat{\sigma}^{+(j)}] \cdot \mathrm{Э}_0^i$$

функций

$$\mathbf{f}_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(j-1)} \,{}^{j-1}_{\cdot}\, \hat{f}_0^{(j)}(\mathbf{r}_{0*}), \quad \boldsymbol{\sigma}_n^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(j-1)} \,{}^{j-1}_{\cdot}\, \hat{\sigma}_n^{+(j)}(\mathbf{r}_{0*})$$

принадлежат пространству $L_2(X_0^c)$($j \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, 3$);

5) выполняются достаточные условия выпуклости функционала Лагранжа

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_9 > 0 \ \text{для всех } \boldsymbol{\varphi} \ne 0, \quad \forall \mathbf{u} \in W$$

$$\int\limits_{X_0} (\nabla_0 \cdot \delta\hat{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 > 0 \ \text{для всех } \mathbf{u} \in W$$

Тогда существует минимум функционала $J[\mathbf{u}]$ в пространстве функций W.

Б. Пусть выполняются перечисленные выше условия и функционал $J[\mathbf{u}]$ – строго выпуклый.

Тогда в пространстве W минимум функционала единственный.

Доказательство. А. *Существование*. В качестве минимизирующей принимается последовательность функций $\mathbf{u}_m \in W$, для которой

$$J[\mathbf{u}_m] \to \inf_{\mathbf{u} \in W} J[\mathbf{u}] \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

Для функций внешних силовых нагрузок, для которых выполняются условия 4, последовательность $\mathbf{u}_m$ – слабо сходящаяся при $m \to \infty$ к функции

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{r}_{03}}{l}\right)^{(i-1)} {}^{i-1}_{\cdot}\hat{u}^{(i)}(\mathbf{r}_{0*})$$

в пространстве W [5].

Из условия слабой замкнутости W в пространстве $[W_2^1(X_0)]^3$ следует, что граничный элемент $\tilde{\mathbf{u}}$ последовательности $\mathbf{u}_m$ принадлежит W.

Выполнение условия 3 теоремы для тензоров $\hat{\sigma}^*$, $\hat{\sigma}^l$ обеспечивает непрерывность первого дифференциала Гато функционала $J[\mathbf{u}]$. Из этих условий и условий выпуклости функционала Лагранжа следует полунепрерывность снизу $J[\mathbf{u}]$, выполняется неравенство [4]

$$J[\tilde{\mathbf{u}}] \le \underline{\lim} J[\mathbf{u}_m]$$

Поэтому $J[\tilde{\mathbf{u}}] = \inf\limits_{\mathbf{u}_m \in W} J[\mathbf{u}_m]$, и функция $\tilde{\mathbf{u}}$ реализует минимум функционала $J[\mathbf{u}]$ в пространстве W.

Б. *Единственность*. Строгая выпуклость функционала обеспечивается выполнением условий 5. Поскольку минимум $J[\mathbf{u}]$ существует, то этот минимум единственный.

Из использования вариационного формулирования задачи (2.1) следует, что условия теоремы являются достаточными для существования и единственности слабого решения краевой задачи.

Полученные здесь результаты могут быть использованы, например, при постановке и решении соответствующих экстремальных задач нелинейной теории упругости для тонких пластин и оболочек [6].

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Министерства науки и образования Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Münster A.* Chemische Thermodynamik. Berlin: Akademie–Verlag, 1969 = *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. М.: Мир, 1971. 296 с.
2. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 262 с.
3. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 366 с.
4. *Céa J.* Optimization. Theorie et Algorithmes. Paris: Dunod, 1971 = *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
5. *Мороз Г.* Про умови коректності крайових задач лінійної теорії пружності // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 2002. № 3. С. 60–67.
6. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.

Львов
e-mail: burak@cmm.lviv.ua
moros@cmm.lviv.ua

Поступила в редакцию
29.XI.2002