

УДК 539.3

© 2003 г. П. Я. Носатенко, Ю. Ю. Ширшов

### ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЕРЕКРЕСТНО АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАГРЕВЕ

В пространственной постановке рассматривается механическое поведение перекрестно армированных оболочек вращения при неосесимметричном нагреве с получением в полном объеме всех компонент напряженно-деформированного состояния. Для численного решения задачи используется метод конечных элементов. Исследуются эффекты анизотропии в двухслойной бороэпоксидной цилиндрической оболочке в условиях переменного в окружном направлении нагрева.

Трехмерный характер напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких неортогонально армированных слоистых оболочек установлен в 80-х годах прошлого столетия и подвергался неоднократным исследованиям различными, преимущественно численными методами, что достаточно полно отражено в аналитическом обзоре [1]. Было показано, что наличие распределенных по сложным законам и существенных по значениям компонент напряжений и деформаций, не свойственных ортотропным оболочкам [2], здесь определяется не столько толщиной или большой изменчивостью нагрузок, сколько анизотропией физико-механических свойств жестко скрепленных в единый континуум слоев [3]. Даже при свободном нагреве плоской перекрестно армированной полосы в ней возникает сложное напряженное состояние, сопровождающееся развитием значительных деформаций тангенциального сдвига и криволинейной депланацией поперечного сечения [4].

Будучи необходимым, учет произвольной анизотропии в трехмерных задачах термоупругости армированных оболочек существенно усложняет как получение численных решений, так и анализ НДС. Первые попытки такого анализа с учетом достаточно общих свойств анизотропии (неортотропии) были предприняты для частного случая осесимметричного нагрева оболочек вращения [5, 6].

С использованием принципа Гамильтона–Остроградского и представлений о предварительно деформированном теле были получены [7] самые общие вариационные формулировки и конечно-элементные соотношения пространственных задач термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения с начальной геометрически нелинейной деформацией. Был выполнен [8] детальный анализ уравнений [7] для численного решения линейной неосесимметричной задачи термоупругости и отмечено, что даже при наличии одной гармонической составляющей температурного поля  $T = T_c^{[n]} \cos n\theta$  (или  $T = T_s^{[n]} \sin n\theta$ ) порождаемое в анизотропной оболочке НДС эквивалентно НДС, возникающему при нагружении ее объемными силами с одновременным наличием  $\cos$ - и  $\sin$ -составляющих.

Однако количественный трехмерный анализ влияния анизотропии на механическое поведение оболочек вращения при неосесимметричном нагреве с получением в полном объеме всех компонент НДС до настоящего времени не проводился. Настоящая работа предпринята с целью восполнить этот пробел и продолжает цикл исследований, проведенных [3, 7, 8] для силового нагружения, устойчивости и свободных колебаний перекрестно армированных оболочек. Здесь также устранены допущенные неточности [5, 6] при реализации численных алгоритмов решения осесимметричной задачи термоупругости. На примере рассмотрения НДС неосесимметрично нагретой двухслойной перекрестно армированной бороэпоксидной цилиндрической оболочки [3, 6, 8–10] дан анализ эффектов анизотропии.

**1. Соотношения термоупругости для слоистой перекрестно армированной оболочки.** В цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  рассмотрим оболочку вращения, ограниченную поверхностью  $S$  и имеющую объем  $V$  [7, 8]. Оболочка свободна от поверхностных нагрузок и внешних объемных сил. Полагая приращение температуры по отношению к исходному состоянию  $T_0$  известным и постоянным во времени, процесс деформирования оболочки будем рассматривать как изотермический, при этом напряжения не зависят от предыстории нагружения [11].

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) удобнее проводить в связанной с внутренней поверхностью оболочки системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – меридиональная и окружная координаты, ось  $\alpha_3$  направлена по внешней нормали к  $\alpha_1, \alpha_2$ . Оболочка состоит из жестко соединенных однонаправленно армированных слоев, расположенных таким образом, что направления армирования составляют углы  $(-1)^{k+1}\gamma$  с касательной к меридиану ( $k$  – номер слоя, отсчитываемый от внутренней поверхности). В осях, связанных с направлением армирования, каждый слой считается макроскопически трансверсально-изотропным. Приведенные механические характеристики слоя определяются по известным формулам усреднения [12], коэффициенты температурного расширения вычисляются с той же точностью по известным зависимостям [5]. С учетом характера армирования такой слой в связанной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  обладает свойствами цилиндрической анизотропии с одной плоскостью упругой симметрии, касательной к поверхности, эквидистантной к координатной. Материал слоев отвечает физическим соотношениям Дюгамеля–Неймана

$$\sigma^{(k)} = C^{(k)}\varepsilon^{(k)} - T\beta^{(k)} \quad (1.1)$$

представленным в матричной форме. Здесь  $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T$  – вектор напряжений,  $C_{ij} = C_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) – матрица жесткости обобщенного закона Гука (содержит 13 различных ненулевых компонент),  $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{12}]^T$  – вектор деформаций,  $T$  – приращение температуры относительно исходного состояния  $T_0$  (скалярное поле),  $\beta$  – вектор температурных напряжений при стесненных деформациях, равный  $\beta = C\alpha$ , где  $\alpha = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 0, 0, \alpha_{12}]^T$  – вектор температурных удлинений и сдвигов.

Для ненулевых упругих постоянных и компонент вектора  $\alpha$   $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев справедливы равенства

$$C_{ii}^{(k)} = C_{ii}^{(k+1)}, \quad C_{jq}^{(k)} = C_{jq}^{(k+1)}, \quad C_{j6}^{(k+1)} = -C_{j6}^{(k+1)}, \quad \alpha_{jj}^{(k)} = \alpha_{jj}^{(k+1)}$$

$$i = 1, 2, \dots, 6; \quad j, q = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$C_{45}^{(k)} = -C_{45}^{(k+1)}, \quad \alpha_{12}^{(k)} = -\alpha_{12}^{(k+1)}$$

На границе слоев имеют место следующие условия непрерывности:

$$u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)}, \quad \sigma_{i3}^{(k)} = \sigma_{i3}^{(k+1)}, \quad \varepsilon_{pl}^{(k)} = \varepsilon_{pl}^{(k+1)}$$

$$i = 1, 2, 3; \quad p, l = 1, 2 \quad (1.3)$$

При переходе к цилиндрической системе координат рассматриваемые слои обладают анизотропией общего вида и вместо (1.1) для

$$\sigma = [\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_{rr}, \dots, \varepsilon_{r\theta}]^T$$

имеем

$$\sigma^{(k)} = B^{(k)}\varepsilon^{(k)} - T\beta^{(k)}, \quad \beta^{(k)} = B^{(k)}\alpha^{(k)} \quad (1.4)$$

Компоненты вектора  $\varepsilon$  определяются по известным соотношениям [11], матрица жесткости  $B$  имеет 21 ненулевую компоненту,  $\alpha = [\alpha_{rr}, \dots, \alpha_{r\theta}]^T$ .

Характеристики цилиндрической оболочки определяются как частный случай:

$$\begin{aligned}
 B_{ii}^{(k)} &= B_{ii}^{(k+1)}, & B_{jq}^{(k)} &= B_{jq}^{(k+1)}, & B_{j4}^{(k)} &= -B_{j4}^{(k+1)}, & B_{56}^{(k)} &= -B_{56}^{(k+1)} \\
 i &= 1, 2, \dots, 6; & j, q &= 1, 2, 3 \\
 \alpha_{rr}^{(k)} &= \alpha_{rr}^{(k+1)}, & \alpha_{\theta z}^{(k)} &= -\alpha_{\theta z}^{(k+1)} \quad (rr \Leftrightarrow \theta\theta \Leftrightarrow zz)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Остальные компоненты матрицы жесткости  $B$  и вектора температурных удлинений и сдвигов  $\alpha$  физических соотношений Дюгамеля–Неймана (1.4) равны нулю.

Различия в знаках компонент  $C_{j6}$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $C_{45}$  и  $\alpha_{12}$  (1.2) смежных слоев вызывают эффекты неоднородности полей напряжений и деформаций. Наиболее сильно эффекты, связанные с анизотропией, для оболочек равной толщины проявляются при малом количестве слоев, и слабее – при его увеличении [9].

**2. Конечно-элементное решение задачи неосесимметричного деформирования оболочки вращения при нагреве.** Численное решение трехмерной задачи теории упругости для слоистых анизотропных оболочек вращения при силовом неосесимметричном деформировании впервые реализовано Э.И. Григолюком и П.Я. Носатенко [3]. Здесь будем использовать частный случай линейных уравнений статического равновесия [7, 8], следующий из вариационного принципа минимума полной энергии для изотермического состояния произвольно нагретого (но ненагруженного поверхностными и объемными силами) упругого тела. НДС перекрестно армированных оболочек характеризуется перемещениями  $u_\alpha(r, \theta, z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ), векторами линейных деформаций  $\varepsilon(r, \theta, z)$  и напряжений  $\sigma(r, \theta, z)$ , составленных из компонент соответствующих тензоров [11] и связанных соотношениями Дюгамеля–Неймана (1.4).

Компоненты  $u_\alpha$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ),  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , а также приращение температуры  $T$  представлены в виде рядов Фурье по окружной координате

$$u_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} u_\alpha^{[n]} \quad (\alpha = r, \theta, z), \quad \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{[n]} \quad (\varepsilon \Leftrightarrow \sigma)
 \tag{2.1}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (T_c^{[n]} \cos n\theta + T_s^{[n]} \sin n\theta)
 \tag{2.2}$$

В соотношениях (2.1)

$$\begin{aligned}
 u_r^{[n]} &= v_r^{[n]}(r, z) \cos n\theta + w_r^{[n]}(r, z) \sin n\theta \quad (r \Leftrightarrow z) \\
 u_\theta^{[n]} &= v_\theta^{[n]}(r, z) \sin n\theta + w_\theta^{[n]}(r, z) \cos n\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Компоненты векторов  $\sigma^{[n]}$  и  $\varepsilon^{[n]}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{[n]} &= \tau_{rr}^{[n]}(r, z) \cos n\theta + t_{rr}^{[n]}(r, z) \sin n\theta \quad (rr \Leftrightarrow \theta\theta \Leftrightarrow zz \Leftrightarrow rz) \\
 \sigma_{\theta z}^{[n]} &= \tau_{\theta z}^{[n]}(r, z) \sin n\theta + t_{\theta z}^{[n]}(r, z) \cos n\theta \quad (\theta z \Leftrightarrow r\theta) \\
 (\sigma \rightarrow \varepsilon \Rightarrow \tau \rightarrow e, t \rightarrow g)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

В случае ортотропной оболочки, у которой для каждого слоя направления ортотропии совпадают с криволинейными координатами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , из выражений (1.4) следуют равенства

$$\tau^{[n]} = B e^{[n]} - T_c^{[n]} \beta, \quad t^{[n]} = B g^{[n]} - T_s^{[n]} \beta
 \tag{2.5}$$

При учете анизотропии более общего вида, чем криволинейная ортотропия, равенства типа (2.5) невозможны, поскольку компоненты  $\tau$  и  $t$  связаны посредством соотношений (1.4) как с компонентами  $e$ , так и  $g$ .

Решение задачи осуществляется методом конечных элементов с линейными локальными аппроксимациями коэффициентов разложения (2.3)  $v_\alpha^e(r, z)$  и  $w_\alpha^e(r, z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) на треугольниках  $\Omega_e$  (здесь и ниже индекс  $e$  означает принадлежность  $e$ -му конечному элементу, индекс  $n$  опускаем, подразумевая, что все соотношения относятся к гармонике  $n$  разложений (2.1)–(2.4)). Для вычисления вектора температурных напряжений предполагается, что температурное поле (коэффициенты разложения (2.2)) задано значениями в узлах дискретной модели; в области  $r, z \in \Omega_e$  принята линейная аппроксимация поля температур. Как было показано [5], это обеспечивает согласованность расчетных моделей для силового и термического нагружения.

Проблема отыскания НДС для случая неосесимметричного нагрева сводится к линейной алгебраической [8]

$$K_L U = Q_T \quad (2.6)$$

с последующим вычислением деформаций  $\epsilon$  и напряжений  $\sigma$  в узлах дискретной модели и преобразованием их к координатам  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

В соотношениях (2.6)

$$U = [v_r^1, w_\theta^1, v_z^1, w_r^1, v_\theta^1, w_z^1, v_r^2, \dots, w_z^{N_p}]^T \quad (\dim U = 6N_p)$$

$$[K_{L_{ij}}] = \left[ \frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \int \int_{\Omega_e} \{(\epsilon_c^e)^T B^e \epsilon_c^e + (\epsilon_s^e)^T B^e \epsilon_s^e\} r dr dz \right]$$

$$\{Q_{T_i}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial U_i} \sum_{e=1}^{N_e} \int \int_{\Omega_e} [T_c^e(\beta^e)^T \epsilon_c^e + T_s^e(\beta^e)^T \epsilon_s^e] r dr dz \right\}$$

$$\epsilon_c^e = [e_{rr}^e, e_{\theta\theta}^e, e_{zz}^e, g_{\theta z}^e, e_{rz}^e, g_{r\theta}^e]^T \quad (c \rightarrow s \Rightarrow e \Leftrightarrow g)$$

$U$  – глобальный вектор обобщенных перемещений,  $N_p$  – общее количество узлов дискретной модели,  $[K_{L_{ij}}]$  – квадратная симметричная положительно определенная матрица жесткости,  $N_e$  – общее количество конечных элементов,  $\{Q_{T_i}\}$  – вектор температурных нагрузок.

Заметим, что при  $n = 0$  из соотношений (2.1)–(2.6) следует решение осесимметричной линейной задачи термоупругости.

При анализе нагрева перекрестно армированной оболочки, рассматриваемой как ортотропная, в силу соотношений (2.5) задачи по определению коэффициентов  $v_\alpha(r, z)$  и  $w_\alpha(r, z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) в разложении (2.1), (2.3) являются независимыми. Это, конечно, позволяет снизить размерность разрешающих уравнений (2.6) вдвое, однако исключает учет взаимовлияния различных гармонических составляющих НДС, свойственного именно анизотропии [3].

При использовании вместо (2.2) разложения поля температур только по косинусам ( $T_s^{[n]} = 0$ ) расчет по ортотропной модели приводит к появлению лишь перемещений  $v_\alpha(r, z)$  и связанных с ними деформаций  $e_{\alpha\beta}(r, z)$  и напряжений  $\tau_{\alpha\beta}(r, z)$  ( $\alpha, \beta = r, \theta, z$ ), которые будем называть “основными” составляющими НДС. Вклад анизотропии тогда, кроме изменения значений “основных” компонент НДС, характеризуется ве-

личинами “дополнительных” перемещений  $w_\alpha(r, z)$ , деформаций  $g_{\alpha\beta}(r, z)$  и напряжений  $t_{\alpha\beta}(r, z)$  ( $\alpha, \beta = r, \theta, z$ ).

Соотношения для компонент вектора  $Q_T$  и матрицы  $K_L$  задачи (2.6) получены в аналитической форме, что обеспечивает в рамках принятой постановки и аппроксимации наибольшую точность численного решения (использование численного интегрирования в задачах линейной статики приводит к ухудшению сходимости для отдельных случаев в несколько раз).

**3. Анализ влияния анизотропии на НДС перекрестно армированной оболочки при нагреве.** Исследование свойств НДС проведем на примере расчета цилиндрической оболочки, состоящей из двух жестко скрепленных однонаправленно армированных под углами  $\gamma^{(1)} = 30^\circ$  и  $\gamma^{(2)} = -30^\circ$  слоев одинаковой толщины  $H/2$ . Каждый слой оболочки выполнен из боропластика. Механические характеристики структурных составляющих полностью соответствуют принятым в работах [3, 6, 8, 9]:  $E_f = 4.2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_f = 0.21$ ,  $E_m = 3.5 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_m = 0.33$ , объемный коэффициент армирования  $\psi = 0.5$ . Коэффициенты линейного температурного расширения связующего  $\alpha_m = 1.14 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  и волокон  $\alpha_f = 8.25 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  приняты по данным работ [13, 14]. Геометрические размеры оболочки такие же, как в [3, 6, 8, 9].

С целью оценки влияния анизотропии на НДС перекрестно армированных оболочек аналогично тому, как это сделано ранее [8], специально был рассмотрен случай макроскопически однородной ортотропной оболочки. Для этого компоненты матрицы жесткости и вектора температурных удлинений и сдвигов (1.2), (1.5) физических соотношений Дюгамеля–Неймана, различающиеся знаком для смежных слоев, принимались равными нулю (как это следует из принципа усреднения значений физико-механических характеристик по объему):

$$C_{j6}^{(k)} = C_{45}^{(k)} = 0, \quad B_{j4}^{(k)} = B_{56}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\alpha_{12}^{(k)} = 0, \quad \alpha_{\theta z}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2$$

Расчет произведен для случая жесткого защемления оболочки по торцам  $z = 0$  и  $z = L$  и поля температур, переменного лишь в окружном направлении,  $T = 100 \cos n\theta \text{ }^\circ\text{C}$  в диапазоне изменяемости нагрузки  $0 \leq n \leq 15$ .

Такая упругая система по своей геометрии и закреплению симметрична относительно центрального сечения оболочки  $z = L/2$  плоскостью, нормальной к ее оси.

В таблицах и на фигурах, отражающих результаты расчета, размерность линейных размеров – мм, размерность угловых величин – градусы, размерность напряжений – МПа. На фигурах сплошная линия соответствует решению для анизотропной оболочки, штриховая – для ортотропной.

Максимальные абсолютные значения основных  $v_\alpha$  и дополнительных  $w_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) перемещений сопоставлены в табл. 1 (здесь и ниже верхний индекс  $a$  соответствует анизотропной оболочке, индекс  $o$  – ортотропной). Как и следовало ожидать, ввиду наличия ненулевых стесненных деформаций тангенциального сдвига  $T\alpha_{12}$ , анизотропия влияет в большей мере на значения основных окружных перемещений  $v_2$  и прогибов  $v_3$ . Эффект анизотропии проявляется сильнее для  $n = 8$  (в этом случае  $v_3^a/v_3^o = 1.78$ ) и слабее – для  $n = 0$  ( $v_3^a/v_3^o = 1.19$ ). Существенно, что при росте параметра изменяемости нагрузки ( $n > 10$ ) дополнительные перемещения  $w_3$  уже превосходят основные прогибы  $v_3$ .

При осесимметричном нагружении ( $n = 0$ ) НДС было рассчитано как по представленной здесь методике, так и по уточненному алгоритму AAMS [5] с учетом геометрической нелинейности. Различия линейного и нелинейного решений здесь состави-

Таблица 1

$n$	$v_1^o \cdot 10^4$	$v_1^a \cdot 10^4$	$w_1^a \cdot 10^5$	$v_2^o \cdot 10^4$	$v_2^a \cdot 10^4$	$w_2^a \cdot 10^4$	$v_3^o \cdot 10^3$	$v_3^a \cdot 10^3$	$w_3^a \cdot 10^4$
0	61.2	72.3	—	—	—	163	263	313	—
1	61.8	72.7	248	76.4	47.9	158	254	306	57.2
2	63.9	73.9	457	155	100	144	229	284	101
4	76.7	81	644	312	226	94	146	203	129
5	86.8	87.7	599	376	290	66.4	101	151	121
7	102	101	338	433	372	26.1	35.4	60.2	102
8	103	104	200	425	378	16	17.6	31.4	96.5
11	81.7	85.9	48.4	329	304	5.99	4.75	6.8	74.7
15	54.4	56.6	43.3	209	189	3.29	2.39	3.42	39.7

Таблица 2

$n$	$u_3^o \cdot 10^3$	$u_3^a(\theta^*) \cdot 10^3$	$\theta^*$
1	128	149	-1.96
2	118	140	-1.85
5	58.2	82.6	-1.56
6	38.9	58.8	-1.68
8	14.9	25.1	-2.70
11	4.44	9.92	-4.38
15	1.66	4.62	-3.58

ли менее 5% (что вполне объяснимо малостью коэффициента линейного температурного расширения весьма жесткого наполнителя).

Максимальные прогибы  $u_3^*$  для ортотропного тела в силу разложения (2.3) соответствуют  $\theta = 0$ , что не так для анизотропной оболочки, в каждом конкретном сечении которой максимальный прогиб  $u_3^*$  реализуется при вполне определенной угловой координате

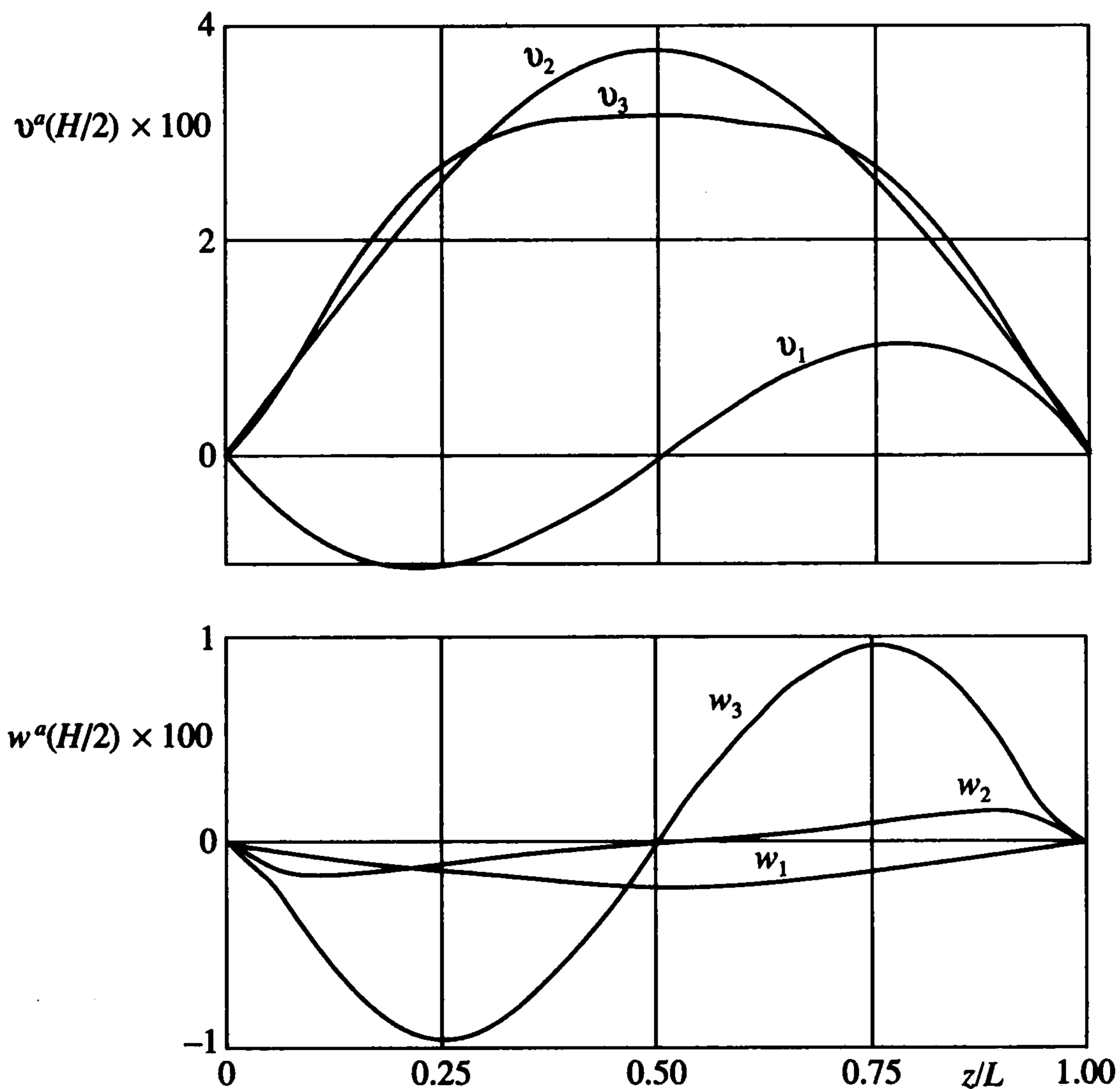
$$\theta^* = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{w_3}{v_3}$$

В табл. 2 для сечения  $z = 0.2L$ , в котором дополнительные составляющие перемещений достигают существенных значений, сопоставлены максимальные величины прогибов в ортотропной  $u_3^o$  и анизотропной  $u_3^a(\theta^*)$  оболочках. Для  $n > 10$ , когда дополнительные перемещения  $w_3$  соизмеримы по величине с основными прогибами  $v_3$ , пренебрежение анизотропией вносит погрешность в расчетные значения прогибов до 100% и более.

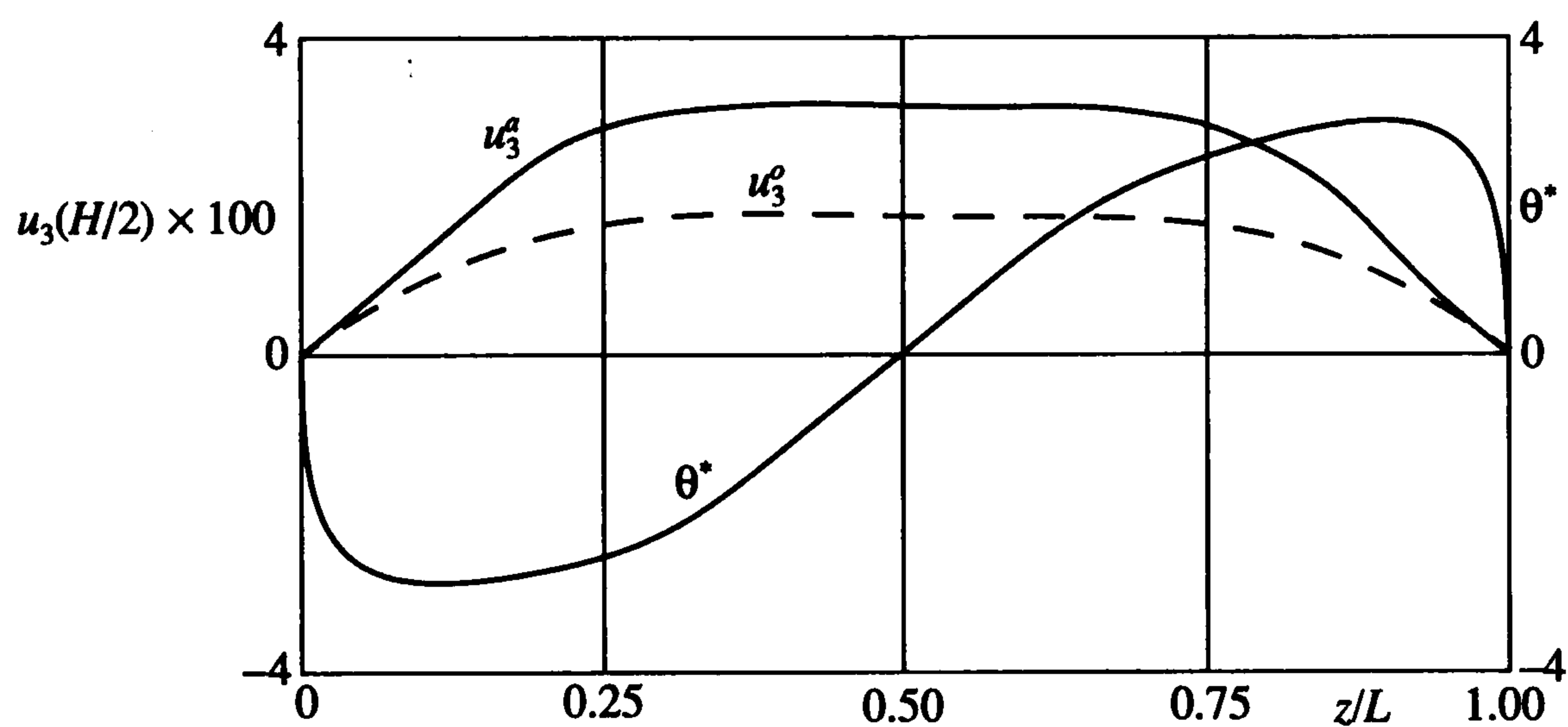
Дальнейший анализ проведем для случая  $n = 8$ .

На фиг. 1 представлены распределения основных и дополнительных перемещений срединной поверхности анизотропной оболочки по длине (для ортотропной оболочки перемещения имеют тот же характер, что и  $v_\alpha^a$ ). Для  $v_2$ ,  $v_3$  и  $w_1$  центральное сечение — плоскость симметрии. Компоненты  $w_2$ ,  $w_3$  и  $v_1$  антисимметричны относительно того же сечения.

Распределения максимальных прогибов срединной поверхности ортотропной и анизотропной оболочек по длине сопоставлены на фиг. 2. Здесь кривая  $\theta^*$  характеризует скручивание анизотропной оболочки, когда линия максимальных прогибов



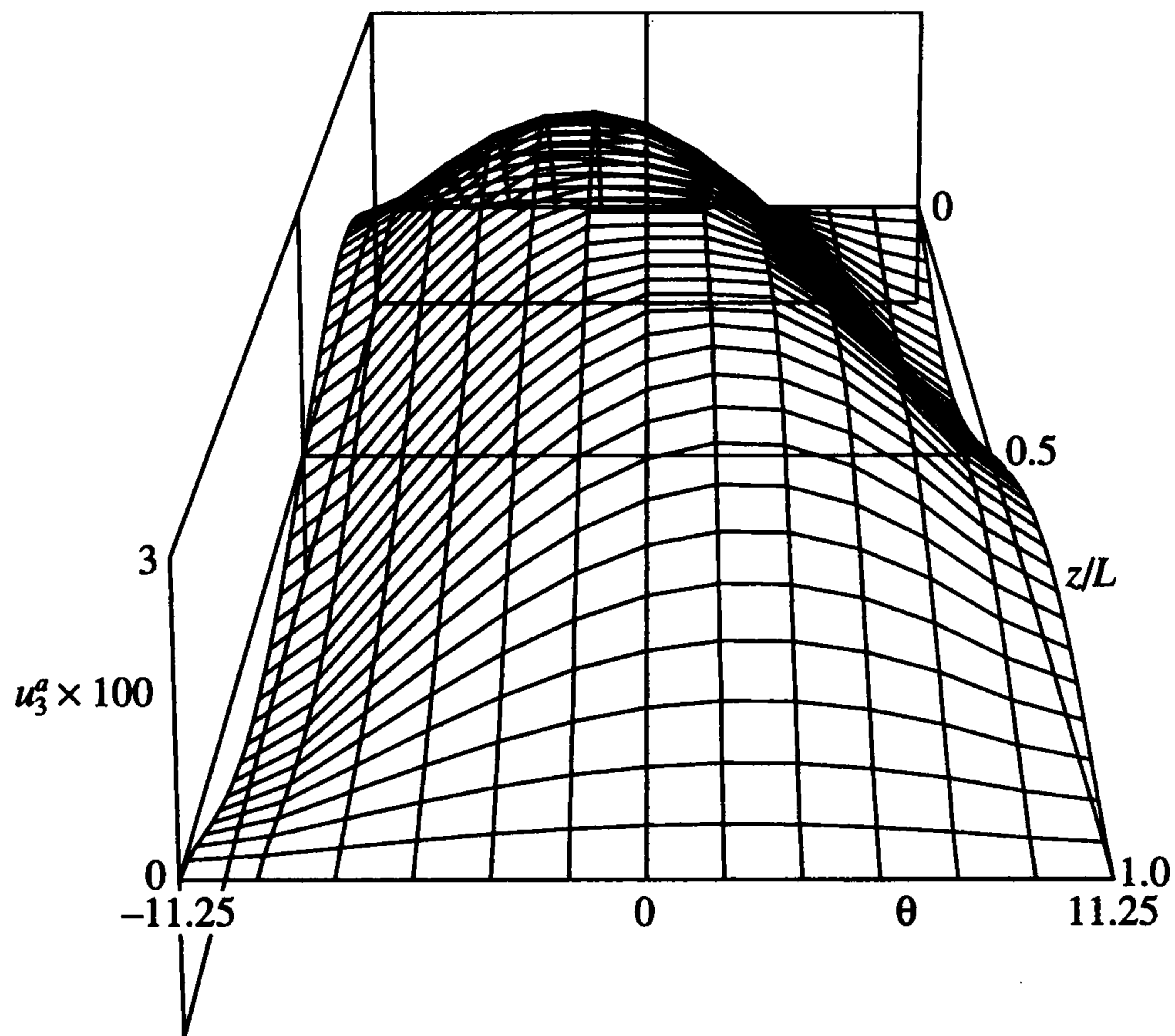
Фиг. 1



Фиг. 2

становится кривой, не совпадающей с образующей. Этот эффект наглядно отображен на фиг. 3, где относительно плоской развертки фрагмента срединной поверхности анизотропной оболочки в области  $D: \{0 \leq z/L \leq 1, -\pi/(2n) \leq \theta \leq \pi/(2n)\}$  представлена форма ее прогибов, реализуемых при термическом деформировании.

Рассматривая деформированный перекрестно армированный цилиндр как конечную трехмерную фигуру, следует указать на изменение свойств симметрии [15], возникающее при учете анизотропии. Если в ортотропной постановке цилиндр в де-



Фиг. 3

формированном состоянии, как и в исходном, имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси цилиндра и делящую его на две равные части (точка пересечения оси цилиндра и этой плоскости  $\{z = L/2, r = 0\}$  – особенная), то при учете анизотропии имеется лишь ось симметрии второго порядка, совпадающая с радиальной координатной прямой, проведенной через ту же особенную точку.

Распределения по толщине всех компонент основных и дополнительных напряжений в анизотропной и ортотропной оболочках в сечениях, где они принимают экстремальные значения, даны на фиг. 4 для тангенциальных напряжений и на фиг. 5 для поперечных напряжений. Из рассмотрения исключены узкие зоны, непосредственно примыкающие к заделке, где упругое решение имеет локальные особенности. В рассматриваемых сечениях дополнительные тангенциальные напряжения  $t_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$  являются практически самоуравновешенными по толщине:

$$\int_0^H t_{\alpha\beta} d\alpha_3 \approx 0$$

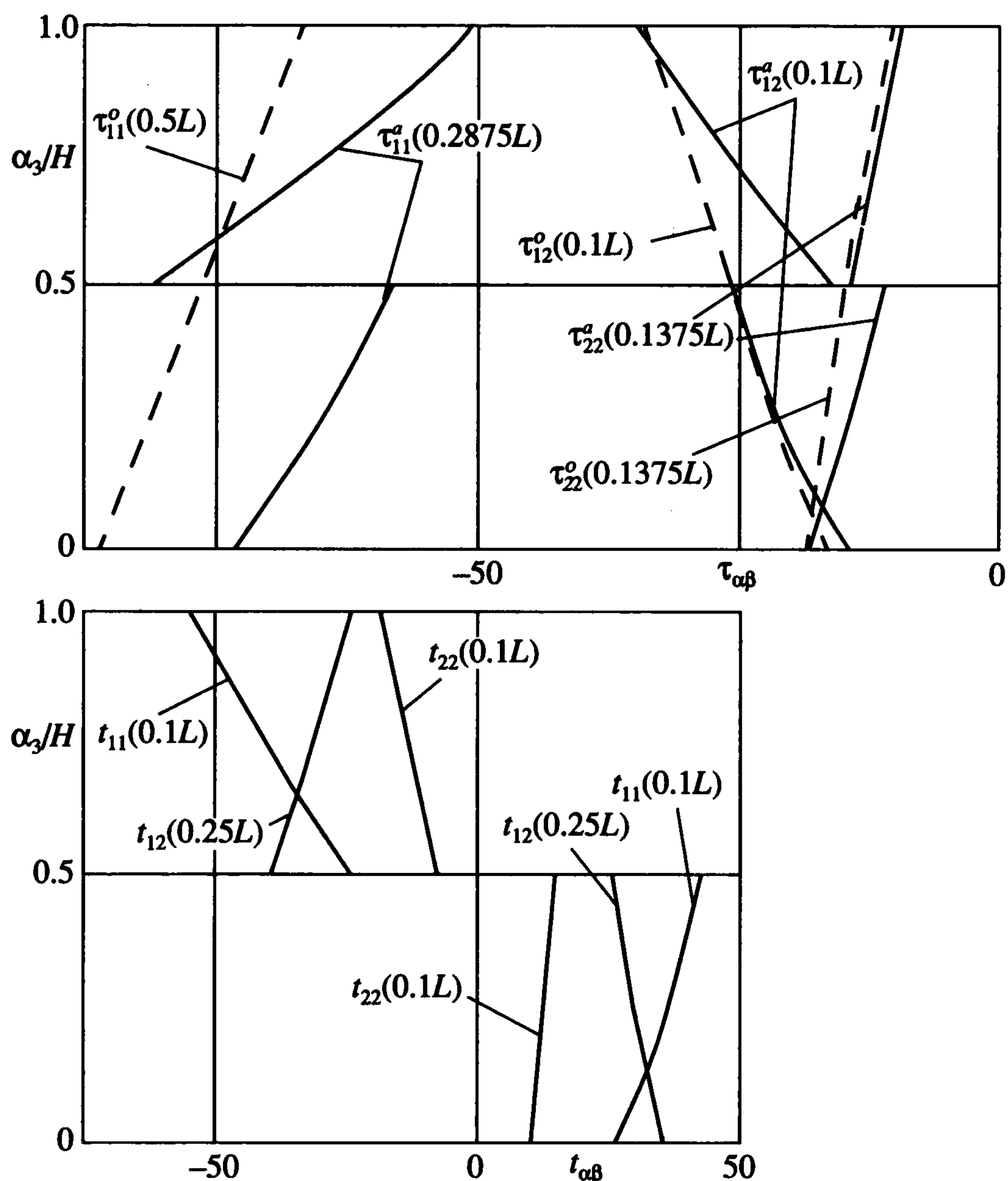
Из представленных результатов следует, что напряжения  $t_{\alpha\beta}$  и  $\tau_{\alpha\beta}$  близки по абсолютной величине и принимают максимальные значения в различных сечениях по меридиональной координате. Это свидетельствует о равной напряженности перекрестно армированной оболочки по всему объему.

Для “основных” компонент НДС ортотропной и анизотропной оболочек характерны общие свойства симметрии относительно центрального сечения оболочки  $z = L/2$ :

$$v_\alpha\left(\frac{L}{2} + z\right) = v_\alpha\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad \alpha = 2, 3; \quad \tau_{11}\left(\frac{L}{2} + z\right) = \tau_{11}\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

$$(11 \Leftrightarrow 22 \Leftrightarrow 33 \Leftrightarrow 23) \tag{3.1}$$

$$v_1\left(\frac{L}{2} + z\right) = -v_1\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad \tau_{13}\left(\frac{L}{2} + z\right) = -\tau_{13}\left(\frac{L}{2} - z\right) \quad (13 \Leftrightarrow 12)$$



Фиг. 4

Для “дополнительных” компонентов, обусловленных анизотропией, они противоположны:

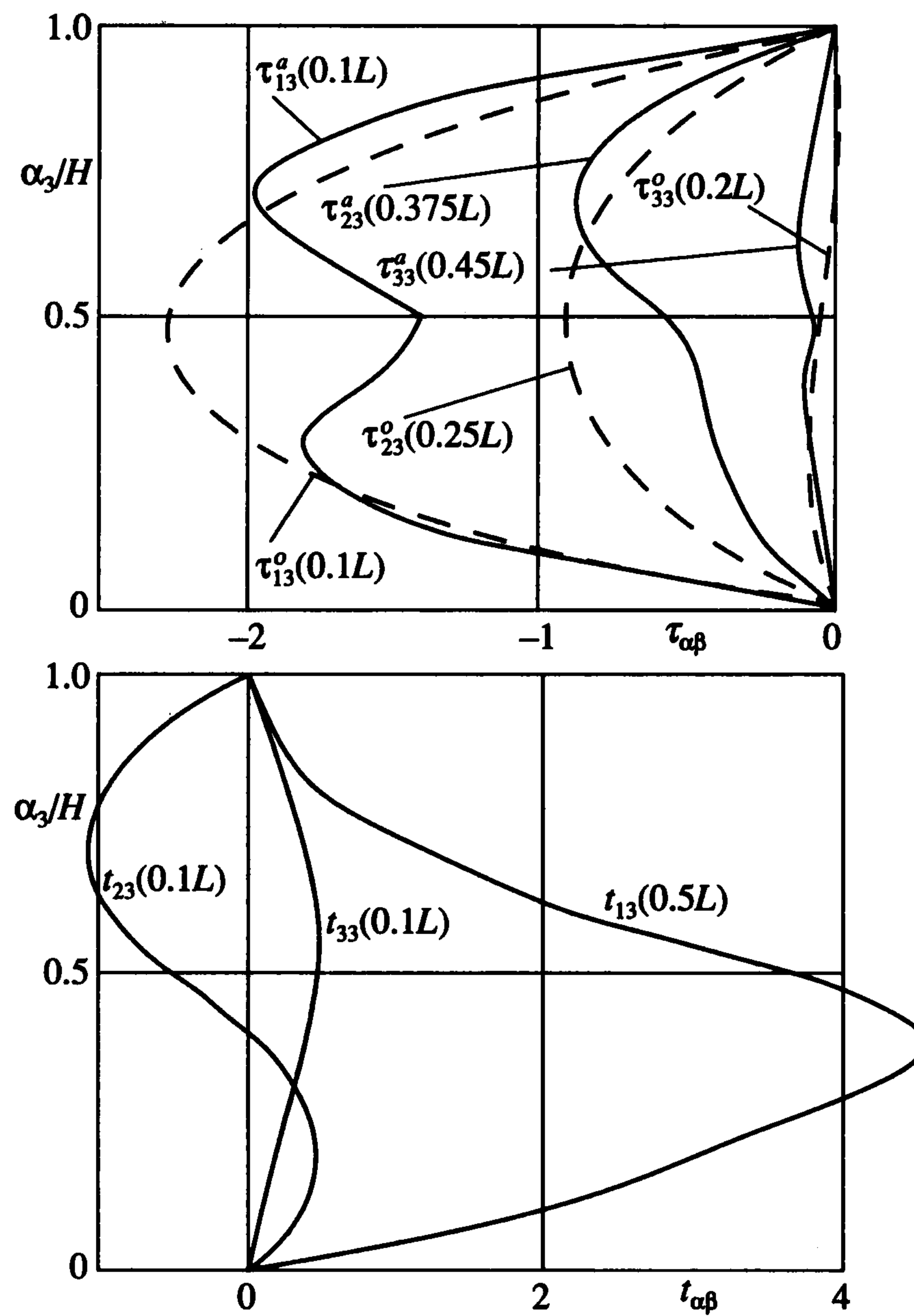
$$w_\alpha\left(\frac{L}{2} + z\right) = -w_\alpha\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad \alpha = 2, 3; \quad t_{11}\left(\frac{L}{2} + z\right) = -t_{11}\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

$$(11 \Leftrightarrow 22 \Leftrightarrow 33 \Leftrightarrow 23) \tag{3.2}$$

$$w_1\left(\frac{L}{2} + z\right) = w_1\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad t_{13}\left(\frac{L}{2} + z\right) = t_{13}\left(\frac{L}{2} - z\right) \quad (13 \Leftrightarrow 12)$$

Таким образом, общие свойства симметрии (3.1), (3.2), впервые установленные [3] и детально обсужденные [8] для трехмерных задач силового и кинематического несимметричного деформирования, имеют место и при нагреве. Это позволяет использовать геометрическую и упругую симметрию при численном решении пространственных задач механики слоистых перекрестно армированных оболочек в случае комплексного термосилового нагружения (при отыскании решения в перемещениях, на плоскости симметрии  $v_1 = w_2 = w_3 = 0$ ).

**4. Выводы.** Суммируя основные результаты, полученные в данной работе и в работах [3, 7, 8], необходимо отметить следующие общие правила.



Фиг. 5

1. Пренебрежение явлением анизотропии и пространственным характером НДС приводит к существенному завышению жесткости слоистых армированных оболочек.

2. Чем сложнее исследуемое явление, тем более существен вклад анизотропии в оценку его основных характеристик (в колебаниях предварительно деформированной оболочки это понижение и перестройка всего спектра упругих колебаний, в задачах статики это появление дополнительных напряжений поперечного сдвига, определяющим образом влияющих на прочность композитов).

3. Во всех случаях неосесимметричное деформирование анизотропных оболочек сопровождается их скручиванием, когда линия максимальных прогибов становится кривой, не совпадающей с образующей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек. М.: НИИ Механики МГУ, 1999. 215 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища шк., 1985. 190 с.
3. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. Об эффекте анизотропии в оболочках вращения при неосесимметричном нагружении// Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1354–1357.

4. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю. Напряженно-деформированное состояние перекрестно армированного композита при свободном нагреве // Механика композитных материалов. 1989. № 3. С. 549–551.
5. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 684–690.
6. Носатенко П.Я. Численное решение пространственных задач механики слоистых анизотропных оболочек из композитных материалов // Механика в авиации и космонавтике. М.: Машиностроение, 1995. С. 110–127.
7. Носатенко П.Я. Трехмерные задачи механики анизотропных оболочек вращения // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29. № 4. С. 512–520.
8. Носатенко П.Я. Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 43–51.
9. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: Изд-во КГУ, 1986. С. 120–129.
10. Куликов Г.М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 12. С. 66–72.
11. Nowacki W. Teoria Sprężystości. Warszawa: PWN, 1973 = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
13. Вышванюк В.И., Алымов В.Т., Вишневский Э.Н. Тепловое расширение волокон в интервале температур 20–470 К // Механика композитных материалов. 1982. № 6. С. 1102–1104.
14. Лапицкий В.А., Крицук А.А. Физико-механические свойства эпоксидных полимеров и стеклопластиков. Киев: Наук. думка, 1986. 93 с.
15. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.

Реутов, Московская обл.  
e-mail: [mamat@imec.msu.ru](mailto:mamat@imec.msu.ru)

Поступила в редакцию  
10.IV.2003