

УДК 539.3

© 2003 г. Ю. В. Липовцев

**ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

Рассматриваются алгоритмы решения краевых задач и расчета температурных полей и напряжений для одного класса конструкций, основным элементом которых – тонкостенная оболочка вращения под действием внешнего давления при общих условиях нестационарного теплообмена с внешней средой. В рамках расчетной схемы Мейсснера [1] получена система дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба произвольных оболочек вращения при использовании линейной координаты по дуге меридиана. Для совместного и одновременного решения этих уравнений с расчетом температурных полей в меридиональных сечениях оболочки уравнение теплопроводности получено в такой же системе координат с криволинейной координатой s по образующей и координатой y по нормали к поверхности оболочки. Для практического решения краевых задач расчета нестационарных температурных полей и напряжений представлены алгоритмы, полученные при использовании конечно-разностного метода матричной прогонки [2–4].

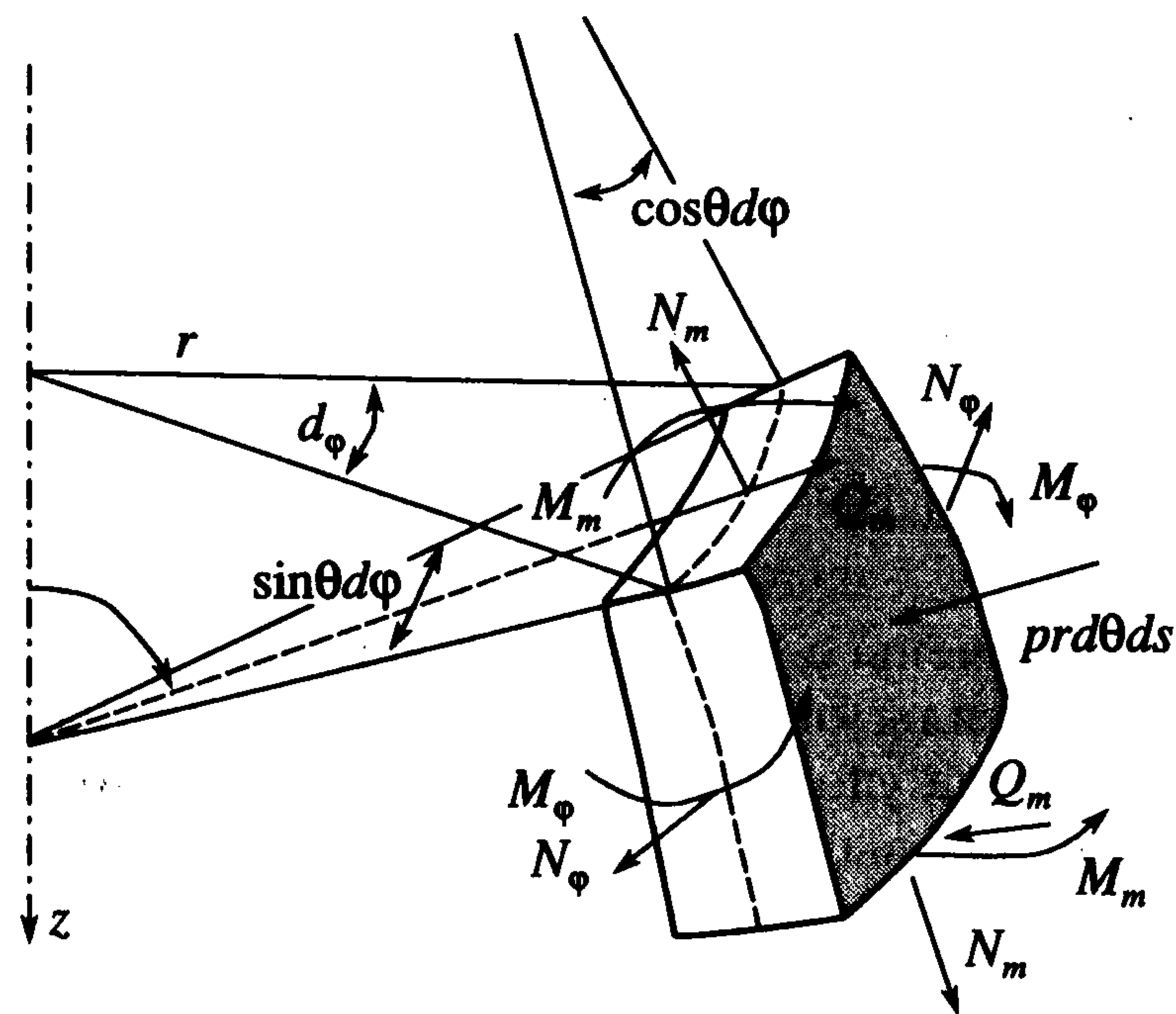
1. Дифференциальные уравнения изгиба оболочек под действием осесимметричного внешнего давления и нагрева. Расчет температурных напряжений для оболочек вращения в условиях нестационарного теплообмена с внешней средой приводит к необходимости одновременного решения двух краевых задач. Постановка и решение одной из них проводится для расчета температурных полей, а для расчета температурных напряжений необходимо решить задачу об определении деформаций, внутренних сил и моментов упругого взаимодействия элементов оболочки при неравномерном изменении температуры по ее толщине и образующей.

Если деформации оболочки при осесимметричном тепловом воздействии считать безизгибными, то расчетные формулы для меридиональных σ_m и окружных σ_φ напряжений получаются такими же, как для тонкостенного цилиндра, т.е.

$$\sigma_m(y, s) = \sigma_\varphi(y, s) = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_a(s) - T(y, s)), \quad T_a(s) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(y, s) dy \quad (1.1)$$

где $T(y, s)$ – функция распределения температуры по толщине оболочки и меридиональной координате s в заданный момент времени t , y – координата по толщине оболочки, направленная по внешней нормали с началом отсчета на ее срединной поверхности, h – толщина, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент температурного расширения, E – модуль упругости.

В зонах скачкообразного или непрерывного, но очень быстрого изменения температуры по образующей, а также в окрестности заделки и границ изменения фор-



Фиг. 1

мы и размеров составных оболочек возникают изгибные деформации, с учетом которых расчетные формулы для напряжений запишем в виде

$$\sigma_m(y, s) = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_a(s) - T(y, s)) + \left\{ \frac{N_m(s)}{h} + y \left(\frac{d\vartheta}{ds} + \mu \frac{\text{ctg}\theta}{R_2} \vartheta(s) \right) \right\} \quad (1.2)$$

$$\sigma_\phi(y, s) = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_a(s) - T(y, s)) + \left\{ \frac{N_\phi(s)}{h} + y \left(\frac{\text{ctg}\theta}{R_2} \vartheta(s) + \mu \frac{d\vartheta}{ds} \right) \right\} \quad (1.3)$$

где $\vartheta(s)$ – функция углов поворота нормали к срединной поверхности оболочки при изгибе, N_m, N_ϕ – меридиональные и окружные внутренние силы оболочки.

Таким образом, для определения напряжений с учетом изгибных деформаций необходимо определить внутренние силы и функцию $\vartheta(s)$ углов поворота нормали. Внутренние силы оболочки N_m, N_ϕ можно выразить через функцию перерезывающих сил $Q_m(s)$. Для этого используем два уравнения. Одно из них – уравнение равновесия проекций всех сил на ось вращения части оболочки, выделенной окружным сечением. Для оболочки, замкнутой в вершине, оно имеет вид

$$2\pi r(N_m \sin\theta + Q_m \cos\theta) + \int_0^s p \cos\theta 2\pi r ds = 0 \quad (1.4)$$

где θ – угол между нормалью к поверхности оболочки и осью вращения, $r(s)$ – радиусы параллелей срединной поверхности, $p(s)$ – внешнее давление.

Второе уравнение равновесия составляется для малого элемента оболочки, выделенного двумя окружными и двумя меридиональными сечениями, показанного на фиг. 1. Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на нормаль следует

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds}(Q_m r) + \frac{N_m}{R_1} + \frac{N_\phi}{R_2} + p = 0 \quad (1.5)$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны оболочки.

Уравнения (1.4), (1.5) можно использовать для определения меридиональных и окружных внутренних сил и выразить их через внешнее давление и функцию перерезывающих сил $V = R_2 Q_m$:

$$N_m = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}V - \frac{1}{R_2}f(s), \quad f(s) = \frac{1}{\sin^2\theta_0} \int_0^s p r \cos\theta ds \quad (1.6)$$

$$N_\varphi = -\frac{dV}{ds} - pR_2 + \frac{1}{R_2}f(s) \quad (1.7)$$

Данные выражения получены с учетом соотношений $r = R_2 \sin\theta$, $ds = R_1 d\theta$.

Поскольку внутренние силы определены из уравнений равновесия, то функция перерезывающих сил должна удовлетворять уравнению совместности деформаций. Для вывода этого уравнения выпишем выражения для деформаций срединной поверхности и угла поворота нормали

$$\varepsilon_m = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{w}{R_2} + \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg}\theta, \quad \vartheta = \frac{u}{R_1} - \frac{dw}{ds} \quad (1.8)$$

где u , w – перемещения точек срединной поверхности по меридиану и внешней нормали соответственно.

Путем преобразования этих выражений из третьего из них можно исключить перемещения u , w и получить уравнение совместности деформаций, например, в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{ds} - (\varepsilon_m - \varepsilon_\varphi) \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2} + \frac{\vartheta}{R_2} = 0 \quad (1.9)$$

Если теперь деформации выразить через внутренние силы, то с учетом уравнений (1.6), (1.7) получим

$$\varepsilon_m = \frac{1}{Eh} \left(-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}V + \mu \frac{dV}{ds} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) f(s) + \mu p R_2 \right) + \alpha T_a$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} \left(-\frac{dV}{ds} + \mu \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}V + \left(\mu \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) f(s) - p R_2 \right) + \alpha T_a$$

После подстановки этих выражений в уравнение (1.9) и выполнения необходимых преобразований получается первое дифференциальное уравнение относительно двух искомых функций V , ϑ

$$\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2} \frac{dV}{ds} - \frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_2^2} V + \frac{\mu}{R_1 R_2} V - \frac{Eh\vartheta}{R_2} = Eh\alpha \frac{dT_a}{ds} + \frac{1}{R_2} \Phi(s) \quad (1.10)$$

$$\Phi(s) = f(s) \left[\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] - \frac{d}{ds} (p R_2^2) \quad (1.11)$$

Функция $\Phi(s)$ получена в результате достаточно сложных аналитических вычислений, при выполнении которых были выведены и использованы следующие соотношения:

$$\frac{d}{ds} (p R_2^2) = 2p R_2 \operatorname{ctg}\theta \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) + R_2^2 \frac{dp}{ds}, \quad \frac{d}{ds} \frac{1}{R_2} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{ds} f(s) = p R_2 \operatorname{ctg}\theta - \frac{2 \operatorname{ctg}\theta}{R_1} f(s), \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{d}{ds} \frac{1}{R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Для вывода второго уравнения необходимо использовать условие равновесия моментов всех внутренних сил, показанных на фиг. 1,

$$\frac{dM_m}{ds} + \frac{\cos\theta}{r}(M_m - M_\varphi) - Q_m = 0 \quad (1.13)$$

где M_m, M_φ – изгибающие моменты, которые можно выразить через функцию углов поворота нормали при изгибе

$$M_m = -D\left(\frac{d\vartheta}{ds} + \mu\frac{\text{ctg}\theta}{R_2}\vartheta\right) + m, \quad M_\varphi = -D\left(\frac{\text{ctg}\theta}{R_2}\vartheta + \mu\frac{d\vartheta}{ds}\right) + m \quad (1.14)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad m = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} T(y, s)y dy$$

После подставки выражений (1.14) в уравнение равновесия (1.13) получаем второе дифференциальное уравнение относительно двух искомых функций

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \frac{\text{ctg}\theta}{R_2}\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\text{ctg}^2\theta}{R_2^2}\vartheta - \frac{\mu}{R_1R_2}\vartheta + \frac{V}{DR_2} = \frac{1}{D}\frac{dm}{ds} \quad (1.15)$$

При расчете только температурных напряжений $\Phi(s) = 0$ и правые части полученной системы уравнений значительно упрощаются, а расчетные формулы для напряжений (1.2), (1.3) принимают вид

$$\sigma_m(y) = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_a - T(y)) + \left\{ -\frac{\text{ctg}\theta}{hR_2}V + \frac{E}{1-\mu^2}y\left(\frac{d\vartheta}{ds} + \mu\frac{\text{ctg}\theta}{R_2}\vartheta\right) \right\} \quad (1.16)$$

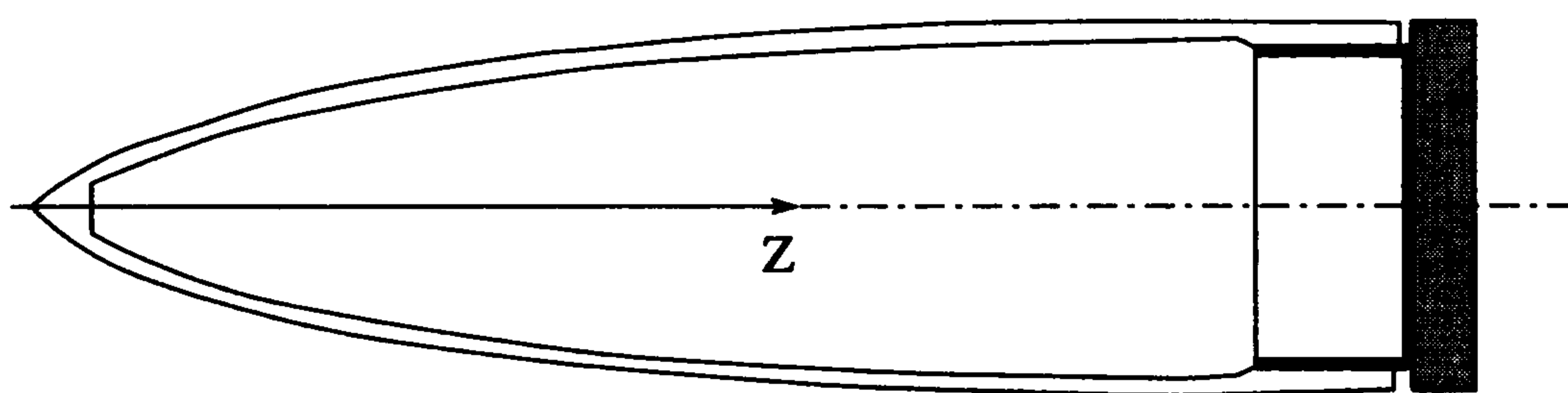
$$\sigma_\varphi(y) = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_a - T(y)) + \left\{ -\frac{1}{h}\frac{dV}{ds} + \frac{E}{1-\mu^2}y\left(\frac{\text{ctg}\theta}{R_2}\vartheta + \mu\frac{d\vartheta}{ds}\right) \right\} \quad (1.17)$$

По-видимому, впервые данная расчетная схема использована Мейсснером [5], но при выводе аналогичных дифференциальных уравнений была введена угловая координата θ , что исключает возможность их применения к оболочкам с коническими и цилиндрическими участками. С.В. Бояршиновым ([6], с. 402) дифференциальные уравнения получены при допущении, что $R_1 = \text{const}$. Здесь при выводе дифференциальных уравнений никакие ограничения на радиусы кривизны не вводились. Следовательно, их можно использовать применительно к составным оболочкам вращения любой формы.

Было показано [6], что необходимые граничные условия для функций ϑ, V можно получить для всех основных способов закрепления краев оболочки, а также условия жесткого сопряжения двух оболочек. Если оболочка замкнута в вершине и имеет постоянную толщину h , то при $s = 0$ должны выполняться условия $\vartheta = 0, V = 0$.

На фиг. 2 показана остроконечная оболочка с опорным шпангоутом в основании. Если носок массивный, то его следует выделить окружным сечением с координатой $s = s_0$, а на границе с ним при $s = s_0$ поставить условие ограничения углов поворота нормали и равенство окружной деформации оболочки температурной деформации при равенстве температур оболочки и массивного носка на границе их сопряжения

$$\vartheta = 0, \quad \frac{dV}{ds} - \mu\frac{\text{ctg}\theta}{R_2}V = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right)f(s) - pR_2 \quad (1.18)$$



Фиг. 2

При упругом взаимодействии оболочки и шпангоута необходимо выполнить условие равенства их окружных деформаций и уравнение равновесия перерезывающих сил оболочки и окружных сил шпангоута, которые тоже можно выразить через искомые функции ϑ , V . В результате граничные условия при $s = L_s$, где L_s – длина оболочки по меридиану, принимают вид

$$\vartheta = 0, \quad \frac{1}{Eh} \left(-\frac{dV}{ds} + \mu \frac{\text{ctg}\theta}{R_2} V \right) + \alpha T_a = \epsilon_t + \frac{1}{B} V \quad (1.19)$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{B} \iint_S E \alpha T dS, \quad B = \iint_S E D S$$

где ϵ_t – температурная деформация свободного шпангоута, S – площадь его поперечного сечения.

Как видно из условий (1.19), окружная деформация оболочки получается равной деформации свободного шпангоута в предельном случае, когда жесткость шпангоута B на растяжение стремится к бесконечности, а при $\epsilon_t = 0$ и $B \rightarrow \infty$ граничные условия (1.19) соответствуют условиям жесткой заделки.

2. Алгоритм конечно-разностного решения краевой задачи расчета напряжений для оболочки вращения при нестационарном нагреве. Рассматриваемые задачи расчета температурных напряжений для оболочек вращения при высокоскоростном внешнем нагреве актуальны при разработке многих машиностроительных конструкций. В этой связи целесообразно рассмотреть достаточно простой и эффективный метод их численного решения, доступный для использования в широкой инженерной практике, прежде всего конечно-разностный метод матричной прогонки, возможности которого представлены ниже.

Введем безразмерную координату x по дуге меридиана, безразмерные радиусы кривизны и новые искомые функции F , Q одинаковой размерности в Па

$$x = \frac{s}{R}, \quad F = \frac{E}{\beta} \vartheta, \quad Q = \frac{1}{hR} V, \quad r_1 = \frac{R_1}{R}, \quad r_2 = \frac{R_2}{R}, \quad \beta = \frac{12(1-\mu^2)R^2}{h^2} \quad (2.1)$$

где R – некоторая постоянная с размерностью длины.

Систему дифференциальных уравнений (1.10), (1.15) представим в векторно-матричной форме

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\text{ctg}\theta}{r_2} \frac{d\psi}{dx} - \frac{\text{ctg}^2\theta}{r_2^2} \psi + C\psi = q \quad (2.2)$$

$$\psi = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu}{r_1 r_2} & \frac{1}{r_2} \\ -\frac{\beta}{r_2} & \frac{\mu}{r_1 r_2} \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \quad q_1 = \frac{1}{hR} \frac{dm}{dx}, \quad q_2 = E\alpha \frac{dT_a}{dx}$$

Конечно-разностный аналог этого уравнения запишем с использованием стандартной трехточечной схемы центральных разностей для первых и вторых производных

$$A^- \psi_{k-1} - B \psi_k + A^+ \psi_{k+1} = d, \quad k = 2, 3, \dots, N$$

$$A^\pm = \left(1 \pm \frac{\Delta x \cdot \operatorname{ctg} \theta_k}{2r_2(x_k)} \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b^+ & c^- \\ c^+ & b^- \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$b^\pm = 2 + \frac{(\Delta x)^2}{r_2^2(x_k)} \left(\operatorname{ctg}^2 \theta_k \pm \frac{\mu r_2(x_k)}{r_1(x_k)} \right), \quad c^\pm = \pm \frac{(\Delta x)^2}{r_2(x_k)}, \quad d_1 = q_1(\Delta x)^2, \quad d_2 = q_2(\Delta x)^2$$

Здесь k – номера узловых точек по меридиану, шаг между которыми $\Delta x = l/N$, $l = L_j/R$.

Конечно-разностные уравнения (2.3) записаны во всех внутренних точках и дополняются еще двумя уравнениями граничных условий в точках на границах с номерами $k = 1$ и $k = N + 1$. Матричные коэффициенты внутренних уравнений переменные, в них входят геометрические характеристики оболочки, которые вычисляются при заданном уравнении ее образующей. Форму образующей обычно задают уравнением $r = f(z)$, где r – радиус, а z – координата, отсчитываемая по оси оболочки. Поэтому для вычисления коэффициентов необходимо знать соответствие между координатами узловой точки s_k по меридиану и z_k по оси вращения. В общем случае эта связь устанавливается дифференциальным уравнением, решение которого приводит к задаче Коши. При использовании простейшего метода ее решения координаты z_k вычисляются по формуле

$$z_k = z_{k-1} + \frac{R \Delta x}{\sqrt{1 + (r'(z_{k-1}))^2}}, \quad k = 2, 3, \dots, N; \quad z_1 = 0 \quad (2.4)$$

Граничные условия в общем случае имеют вид

$$H_1 \psi'(0) + G_1 \psi(0) = e_1, \quad H_2 \psi'(l) + G_2 \psi(l) = e_2 \quad (2.5)$$

где H_i, G_i, e_i ($i = 1, 2$) – матрицы коэффициентов и векторы правых частей заданных граничных условий.

Аппроксимацию граничных условий введем следующим образом:

$$H_1 \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta x} + G_1 \frac{\psi_2 + \psi_1}{2} \right) = e_1, \quad H_2 \frac{\psi_{N+1} - \psi_N}{\Delta x} + G_2 \frac{\psi_{N+1} + \psi_N}{2} = e_2 \quad (2.6)$$

Первое граничное условие позволяет установить связь между векторами искомых функций в двух первых узловых точках:

$$\psi_1 = P_1 \psi_2 + g_1, \quad P_1 = (2H_1 - G_1 \Delta x)^{-1} (2H_1 + G_1 \Delta x)$$

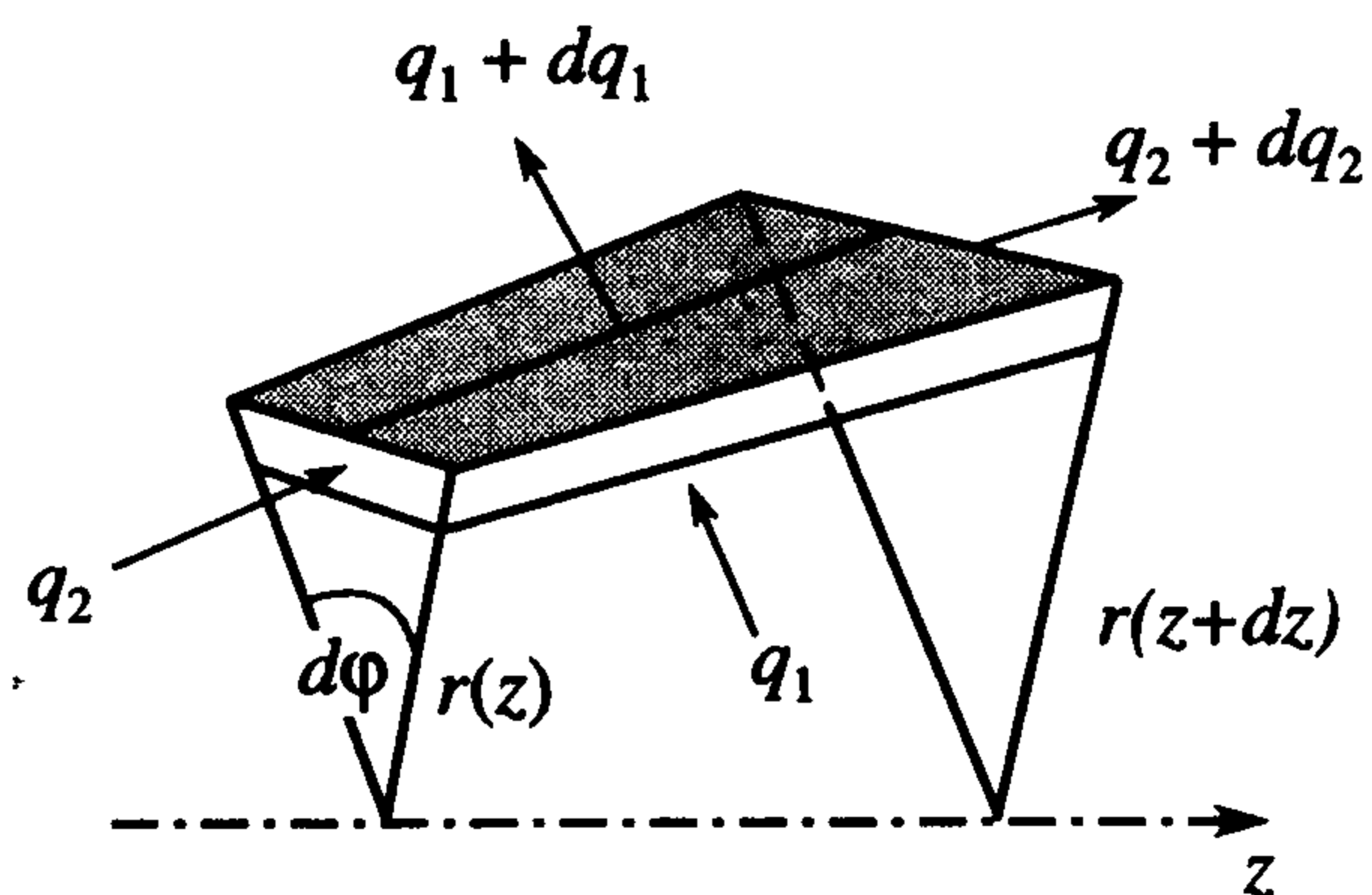
$$g_1 = -2(2H_1 - G_1 \Delta x)^{-1} e_1 \Delta x \quad (2.7)$$

С помощью полученного соотношения можно преобразовать к такому же виду первое внутреннее уравнение, затем второе и так далее до последнего включительно:

$$\psi_k = P_k \psi_{k+1} + g_k, \quad P_k = (B - A^- P_{k-1})^{-1} A^+$$

$$g_k = (B - A^- P_{k-1})^{-1} (A^- g_{k-1} - d); \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (2.8)$$

Данная процедура вычисления коэффициентов P_k преобразованных уравнений и векторов g_k по рекуррентным формулам (2.8) называется прямой прогонкой. После



Фиг. 3

ее завершения из второго граничного условия можно исключить вектор Ψ_N и вычислить вектор искомых функций на границе

$$\Psi_{N+1} = (2H_2 + G_2\Delta x - (2H_2 - G_2\Delta x)P_N)^{-1}(2e_2\Delta x + (2H_2 - G_2\Delta x)g_N) \quad (2.9)$$

Теперь в цикле обратной прогонки при использовании преобразованных уравнений (2.8) вычисляются векторы искомых функций во всех узловых точках. Затем вычисляются напряжения.

3. Алгоритм расчета нестационарных температурных полей в меридиональных сечениях оболочки. Рассмотрим задачу расчета осесимметричных температурных полей в оболочке вращения при нестационарных условиях теплообмена на внешней и внутренней ее поверхностях, переменных во времени и по меридиональной координате s . Для согласованного расчета температурных полей и напряжений уравнение теплопроводности целесообразно получить в криволинейной системе координат y, s , где y – координата по толщине оболочки, направленная по внешней нормали с началом отсчета на внутренней поверхности, а координата s направлена по дуге меридиана.

Уравнение теплопроводности можно получить из условия теплового баланса малого элемента, показанного на фиг. 3, который выделен из оболочки двумя меридиональными сечениями, двумя окружными и двумя эквидистантными поверхностями. Уравнения эквидистантных поверхностей можно представить в виде $y = c, y = c + dy$, где $y = r - R_2(z)$, r – полярная координата в окружном сечении оболочки, R_2 – радиус кривизны внутренней поверхности, dy – расстояние между поверхностями и толщина рассматриваемого элемента.

На фиг. 3 q_1, q_2 – тепловые потоки по нормали к поверхностям элемента и по дуге меридиана s . Количество тепла, поглощенного элементом за промежуток времени dt , приводит к изменению его температуры. При использовании закона теплопроводности Фурье запишем это условие в виде уравнения

$$\left\{ -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} r + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \right) (r + dy) \left(1 + \frac{dy}{R_1 + y} \right) \right\} d\varphi ds dt +$$

$$+ \left\{ -\lambda \frac{\partial T}{\partial s} r + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} ds \right) \left(r + \frac{\partial r}{\partial s} ds \right) \right\} d\varphi dy dt = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} r d\varphi ds dy dt$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{dR_2}{ds} = \operatorname{ctg} \theta \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

λ – коэффициент теплопроводности, c, ρ – теплоемкость и плотность материала оболочки, θ – угол между нормалью к поверхности оболочки и осью вращения.

Приводя подобные и отбрасывая слагаемые пятого порядка малости, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{R_1 + y} + \frac{1}{R_2 + y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2 + y} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

Следует обратить внимание на то, что геометрические характеристики оболочки R_1 , R_2 , θ , входящие в коэффициенты полученного уравнения, при заданном уравнении образующей определяются как функции координаты z , а в качестве независимой переменной выбрана координата s по дуге меридиана. При решении задачи это обстоятельство не вносит заметных затруднений и координата z вычисляется, например, по формуле (2.4).

Для численного решения задачи можно воспользоваться методом покомпонентного расщепления дифференциального оператора по координатам ([7], с. 289), согласно которому на каждом шаге по времени Δt последовательно решаются две краевые задачи с одномерными дифференциальными уравнениями

$$\frac{c\rho}{\lambda} \frac{T^{n+i/2} - T^{n+(i-1)/2}}{\Delta t} = A_i \frac{T^{n+i/2} + T^{n+(i-1)/2}}{2}, \quad i = 1, 2; \quad A_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\omega_i(z)}{r(z, y)} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

$$\omega_1 = \left(1 + \frac{R_2 + y}{R_1 + y} \right), \quad \omega_2 = \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta, \quad x_1 = y, \quad x_2 = s, \quad r(z, y) = R_2(z) + y$$

При решении задач теплопроводности данный метод является вполне естественным, поскольку осуществляет физическое расщепление процесса перетекания тепла на два этапа. Решение первого дифференциального уравнения соответствует распространению тепла только в направлении координаты x_1 , а второго – в направлении x_2 . Эти два процесса независимые, поэтому такое разделение направлений оказывается очень эффективным. Данный метод называют еще методом переменных направлений.

Для того чтобы исключить возможный перекосяк в решении задачи, обусловленный тем, что на каждом шаге по времени сначала решается первое уравнение, можно ввести двухцикловую схему расщепления с последовательным изменением очередности решения одномерных краевых задач (3.2) ($n = 1, 2, \dots; i = 1, 2$)

$$\frac{T^{n+i/2} - T^{n+(i-1)/2}}{\tau} = A_i (T^{n+i/2} + T^{n+(i-1)/2}), \quad \tau = \frac{\lambda \Delta t}{2c\rho} \quad (3.3)$$

$$\frac{T^{n+(i+2)/2} - T^{n+(i+1)/2}}{\tau} = A_{3-i} (T^{n+(i+2)/2} + T^{n+(i+1)/2}) \quad (3.4)$$

Отметим, что при использовании двухциклового схемы каждому номеру n соответствуют два шага по времени. На первом из них решаются уравнения (3.3) сначала с оператором A_1 , затем с оператором A_2 . На втором шаге уравнения (3.4) решаются сначала с оператором A_2 при $i = 1$, а затем при $i = 2$ с оператором A_1 . Такое чередование двух схем исключает преимущественное значение какого-то одного направления.

Ядро алгоритма. При решении задачи по двухциклового схеме расщепления на каждом этапе вычислений приходится в четырех циклах обращаться к решению одномерной краевой задачи, которое можно представить в обобщенном виде как одну

стандартную процедуру конечно-разностного решения методом скалярной прогонки достаточно простого дифференциального уравнения

$$A(u + u^0) = \frac{u - u^0}{\tau} \quad (3.5)$$

где u^0 – решение, полученное на предыдущем этапе, $u(x)$ – искомое решение для следующего этапа, A – дифференциальный оператор в одном из двух направлений.

Перейдем к конечно-разностному аналогу уравнения (3.5)

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\beta_k u_{k+1} - u_{k-1}}{r_k 2\Delta x} - \frac{1}{\tau} u_k = q_k, \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (3.6)$$

$$q_k = -\left(\frac{1}{\tau} u_k^0 + \frac{u_{k-1}^0 - 2u_k^0 + u_{k+1}^0}{\Delta x^2} + \frac{\beta_k u_{k+1}^0 - u_{k-1}^0}{r_k 2\Delta x} \right)$$

где k – номера узловых точек с координатами $x_k = (k - 1)\Delta x$ ($k = 1, 2, \dots, N + 1$), $\Delta x = l/N$, где l – размер данной области в одном из рассматриваемых направлений. Количество узловых точек ($N + 1$) в каждом направлении может быть задано по-разному. В дифференциальных операторах A_1, A_2 коэффициенты β_k соответственно равны $\omega_1(z_k)$ и $\omega_2(z_k)$.

Система уравнений (3.6) получена при записи уравнения теплопроводности во всех внутренних точках. Каждое из них соответствует условию теплового баланса слоя толщиной Δx . Неучтенной пока осталась теплоемкость двух слоев, прилегающих к границам, толщина каждого из них $\Delta x/2$. Поэтому граничные условия необходимо создавать с учетом теплоемкости этих слоев, прилегающих к границам. Рассмотрим, например, условие конвективного теплообмена на внешней поверхности оболочки, которое при аналитическом решении задачи при $x_1 = h$ имеет вид

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + h_w(x_2, t)(T_w(x_2, t) - u(h)) = 0 \quad (3.7)$$

где $h_w(x_2, t)$ – коэффициент теплоотдачи, $T_w(x_2, t)$ – температура пограничного слоя внешней среды, переменные в общем случае по меридиональной координате x_2 и времени t .

Это условие означает равенство тепловых потоков, внутреннего и внешнего, проходящих через поверхность $x = h$. При записи данного условия в конечных разностях нужно учесть, что внешний поток проходит через поверхность $x = h$, а внутренний – через вторую поверхность прилегающего слоя $x = h - \Delta x/2$ и часть тепла поглощается слоем, прилегающим к границе. При учете теплоемкости граничного слоя уравнение (3.7), записанное в конечных разностях, принимает вид

$$-\lambda \frac{u_{N+1} - u_N}{\Delta x} + h_w(T_w - u_{N+1}) = c\rho \frac{\Delta x u_{N+3/4} - u_{N+3/4}^0}{2 \Delta t}, \quad u_{N+3/4} = \frac{3u_{N+1} + u_N}{4} \quad (3.8)$$

Запишем в качестве второго примера условие тепловой изоляции внутренней поверхности

$$\lambda \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = c\rho \frac{\Delta x u_{1+1/4} - u_{1+1/4}^0}{2 \Delta t}, \quad u_{1+1/4} = \frac{3u_1 + u_2}{4} \quad (3.9)$$

Таким образом, систему конечно-разностных уравнений (3.6) вместе с граничными условиями в общем случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 -B_1 u_1 + A_1^+ u_2 = d_1 \quad A_k^- u_{k-1} - B_k u_k + A_k^+ u_{k+1} = d_k, \quad k = 2, 3, \dots, N \\
 A_{N+1}^- u_N - B_{N+1} u_{N+1} = d_{N+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

где коэффициенты внутренних уравнений

$$A_k^\pm = 1 \pm \frac{\beta_k \Delta x}{2r_k}, \quad B_k = 2 + \frac{2c\rho(\Delta x)^2}{\lambda \Delta t}, \quad d_k = (\Delta x)^2 q_k
 \tag{3.11}$$

Коэффициенты граничных условий зависят от параметров заданных условий теплообмена. В приведенных примерах (3.8), (3.9)

$$\begin{aligned}
 B_1 = 1 + \frac{3(\Delta x)^2}{16\tau}, \quad A_1^+ = A_{N+1}^- = 1 - \frac{(\Delta x)^2}{16\tau}, \quad d_1 = -\frac{(\Delta x)^2}{16\tau}(3u_1^0 + u_2^0) \\
 B_{N+1} = B_1 + \frac{h_w \Delta x}{\lambda}, \quad d_{N+1} = -\frac{(\Delta x)^2}{16\tau}(3u_{N+1}^0 + u_N^0) - \frac{h_w \Delta x}{\lambda} T_w
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений (3.10) является трехдиагональной, и решение можно получить методом прогонки. В цикле прямой прогонки осуществляется преобразование всех внутренних уравнений к двучленному виду

$$u_k = P_k u_{k+1} + g_k, \quad k = 2, 3, \dots, N
 \tag{3.13}$$

Из первого граничного условия находим $P_1 = A_1^-/B_1$, $g_1 = -d_1/B_1$, а коэффициенты внутренних уравнений вычисляются по рекуррентным формулам

$$P_k = (B_k - A_k^- P_{k-1})^{-1} A_k^+, \quad g_k = (B_k - A_k^- P_{k-1})^{-1} (A_k^- g_{k-1} - d), \quad k = 2, 3, \dots, N
 \tag{3.14}$$

После выполнения этих преобразований во втором граничном условии можно исключить $u_N = P_N u_{N+1} + g_N$ и вычислить температуру на границе

$$u_{N+1} = \frac{d_{N+1} - A_{N+1}^- g_N}{A_{N+1}^- P_N - B_{N+1}}
 \tag{3.15}$$

Затем с помощью уравнений (3.13) в обратной последовательности вычислить температуру во всех узловых точках.

Чтобы выполнить решение задачи в целом, необходимо представить температуры в узловых точках сетки в виде двумерного массива. В начале расчета этот массив $T(I, J)$ заполняется значениями начальных температур T_{ij}^0 ($i = 1, 2, \dots, N_1 + 1; j = 1, 2, \dots, N_2 + 1$).

Далее для перехода к следующему моменту времени осуществляются процедуры прогонки (3.13)–(3.15) по координате $x = x_1$ при последовательных значениях $j = 2, 3, \dots, N_2$, затем по координате x_2 при всех последовательных значениях $i = 2, 3, \dots, N_1$.

Для пояснения сказанного представим подробнее начало этих вычислений.

Задаем $j = 2$ и выполняем следующие операции:

1) осуществляем пересылку одного вектора массива $T(I, J)$ в одномерный массив Фурье, запишем это условие в виде уравнения

$$U(I) = T(I, J), \quad J = 2, \quad I = 1, 2, \dots, N_1 + 1$$

2) вычисляем коэффициенты A_i, B_i, C_i, d_i по формулам (3.11), (3.12) при $i = 1, 2, \dots, N_1 + 1; \Delta x = \Delta x_1$;

3) по стандартной процедуре (3.13)–(3.15) решения одномерной краевой задачи вычисляются новые значения температуры u_i вектора $U(I)$; полученный вектор помещается в двумерный массив T на место использованного в данной процедуре, в данном случае это вектор с номером $j = 2$ (второй столбец массива);

4) изменяем номер j на единицу и повторяем вычисления, описанные выше, и так далее до $j = N_2$.

Затем аналогичным образом осуществляются прогонки по координате x_2 . После выполнения прогонок вдоль и поперек двумерный массив T будет заполнен значениями температуры во всех узловых точках, и таким образом будет осуществлен переход на один шаг по времени. При переходе к следующему моменту времени последовательность выполнения прогонок меняется сначала по x_2 , затем по x_1 . В результате весь путь по времени складывается парами шагов.

При этом следует отметить, что прогонки по стандартной процедуре (3.13)–(3.15) делаются только по внутренним координатным линиям, поэтому в угловых точках температуры вычисляются путем экстраполяции температуры в соседних точках.

Таким образом, представлены полученные алгоритмы решения одного класса нестационарных краевых задач термоупругости, которые могут найти широкое применение в инженерной практике расчета температурных полей и напряжений и параметрической оптимизации составных оболочечных конструкций.

Возможность обобщения скалярной прогонки на метод матричной прогонки по представленной здесь схеме применительно к решению задач устойчивости оболочек была впервые опубликована автором [2]. Следует отметить, что метод матричной прогонки не всегда тривиален. Исследованию особенностей метода прогонки при решении задач устойчивости оболочек посвящена, например, работа [3]. Нетривиальные ситуации для применения метода матричной прогонки возникают также при конечно-разностной аппроксимации граничных условий, когда все условия на одной границе заданы для одной части вектора искомых функций, а на другой границе они заданы для другой части вектора, как, например, при решении краевых задач для уравнений переноса тепла излучением, что необходимо учитывать при аппроксимации дифференциальных уравнений разностной схемой [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geckeler J.W.* Elastostatik. 64. Meissnerische Theorie rotationsymmetrische Schalen // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1928. Bd. 6. S. 238–265.
2. *Липовцев Ю.В.* К устойчивости вязко-упругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 174–180.
3. *Липовцев Ю.В.* Разностный метод решения задач устойчивости оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 166–172.
4. *Липовцев Ю.В., Третьякова О.Н.* Конечно-разностное решение одномерной нестационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена // Инж.-физ. ж. 1986. Т. 51. № 5. С. 840–847.
5. *Meissner E.* Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform // Physik Zeitung. 1913. Bd. 14. H. 8. S. 343–349.
6. *Бояршинов С.В.* Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
7. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.