

УДК 539.3

© 2003 г. Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

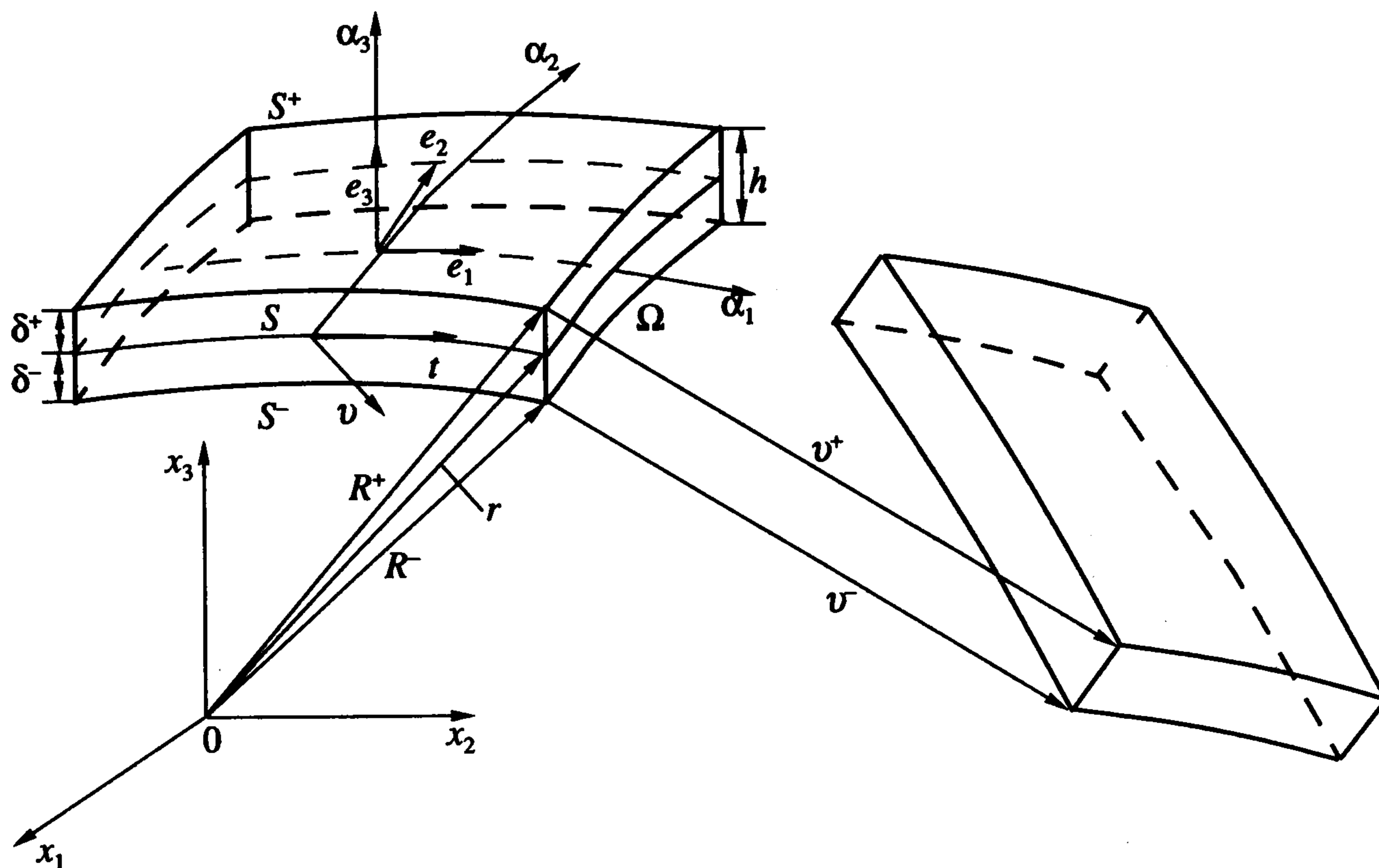
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО

Разработан алгоритм численного решения контактной задачи для упругой оболочки типа Тимошенко, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций. Существенно, что в качестве искомым функций выбираются 6 перемещений лицевых поверхностей оболочки. Это позволяет, во-первых, упростить формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций, поскольку в качестве искомым функций выбираются функции, с помощью которых формулируются условия непроникания контактирующих тел, и во-вторых, получить соотношения для компонент тензора деформаций Грина–Лагранжа в криволинейных ортогональных координатах, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Метод конечных элементов – наиболее мощный численный метод решения контактных задач механики оболочек. Вместе с тем проблема построения искривленных конечных элементов тонких оболочек, подверженных произвольно большим поворотам и взаимодействующих с жесткими телами, еще далека от решения [1, 2]. Причина кроется в неадекватном представлении деформационными соотношениями больших перемещений элемента оболочки как жесткого целого. Поэтому неудивительно, что в связи с отсутствием в литературе деформационных соотношений, способных в локальных криволинейных координатах точно представлять произвольное деформированное состояние оболочки, в основном разрабатывалась концепция “вырожденного” (изопараметрического) элемента [3], которая позволяла за счет существенного увеличения времени расчета представлять произвольно большие смещения элемента оболочки как жесткого целого в глобальной декартовой системе координат [2, 4].

Ниже на основе теории упругих оболочек типа Тимошенко с учетом поперечного обжатия [5, 6] разработан алгоритм численного решения контактной задачи для оболочки, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно-элементных аппроксимаций [7, 8]. Поскольку в качестве искомым функций выбраны перемещения лицевых поверхностей оболочки [9, 10], это упрощает формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций [11].

1. Деформационные соотношения геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату α_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (фиг. 1). Пусть e_1 и e_2 – единичные векторы касательных к координатным линиям α_1 и α_2 , e_3 – единичный вектор нормали, A_α и k_α – параметры Ламе и кривизны координатных линий поверхности S , δ^- и δ^+ – расстояния от поверхности S до нижней S^- и верхней S^+ поверхностей оболочки, u_i – компоненты вектора перемещений, ϵ_{ij} – компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа, p_i^\pm – внешние



Фиг. 1

поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях S^\pm , $\mathbf{q} = q_\nu \mathbf{v} + q_t \mathbf{t} + q_3 \mathbf{e}_3$ – вектор внешних поверхностных нагрузок, действующих на боковой поверхности Ω , \mathbf{v} и \mathbf{t} – нормальный и тангенциальный единичные векторы к граничному контуру Γ (фиг. 1). Здесь и далее латинские индексы $i, j, l, m = 1, 2, 3$, а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

Воспользуемся кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине оболочки [5, 6]

$$\mathbf{u} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3) \mathbf{v}^\pm, \quad \mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}^\pm = \sum_i v_i^\pm \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

где \mathbf{v}^\pm – векторы перемещений точек лицевых поверхностей S^\pm , $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ – компоненты этих векторов, $N^\pm(\alpha_3)$ – линейные функции формы оболочки

$$N^-(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - \alpha_3), \quad N^+(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\alpha_3 - \delta^-) \quad (1.2)$$

Введем перемещения (1.1) в деформационные соотношения пространственной теории упругости [12] и, полагая, что тангенциальные компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа изменяются по толщине оболочки согласно линейному закону, приходим к деформационным соотношениям геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко средней толщины [13]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \cdot \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta^\pm} \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha^\pm H_\beta^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^\pm \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^\pm \right)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{\bar{H}_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha} \cdot (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}) \frac{1}{\bar{H}_\alpha} \varepsilon_{33,\alpha}, \quad \varepsilon_{33} = \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \right) \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{h}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-), \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+)$$

где $H_\alpha^\pm = A_\alpha(1 + k_\alpha \delta^\pm)$ – параметры Ламе лицевых поверхностей S^\pm , $\bar{H}_\alpha = A_\alpha(1 + k_\alpha \bar{\delta})$ – параметры Ламе срединной поверхности \bar{S} , $\bar{\delta} = (\delta^- + \delta^+)/2$ – расстояние от отсчетной

поверхности до срединной поверхности, $\bar{\mathbf{v}}$ – вектор перемещения точки срединной поверхности оболочки, нижний индекс β , следующий после запятой, означает частное дифференцирование по координате α_β .

Деформационные соотношения (1.3) весьма привлекательны с точки зрения их использования в методе конечных элементов, поскольку они *точно* представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Действительно, перемещения лицевых поверхностей оболочки как жесткого целого [14] можно представить в виде

$$\mathbf{v}^{\pm R} = \Delta + \Phi \mathbf{R}^\pm - \mathbf{R}^\pm \quad (1.4)$$

где $\mathbf{R}^\pm = \mathbf{r} + \delta^\pm \mathbf{e}_3$ – радиус-векторы точек лицевых поверхностей, \mathbf{r} – радиус-вектор точки отсчетной поверхности, Δ – вектор поступательного перемещения оболочки, Φ – ортогональная матрица, характеризующая вращение оболочки как жесткого целого вокруг точки O (фиг. 1). Для производных векторов жестких смещений (1.4) имеет место формула

$$\frac{1}{H_\alpha^\pm} \mathbf{v}_{,\alpha}^{\pm R} = \Phi \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha \quad (1.5)$$

Вводя далее выражения (1.4), (1.5) в деформационные соотношения (1.3) и учитывая свойство ортогонального преобразования сохранять скалярное произведение векторов, получим

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^R = (\Phi \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\Phi \mathbf{e}_\beta) - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0, \quad 2\varepsilon_{33}^R = (\Phi \mathbf{e}_3) \cdot (\Phi \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^R = \frac{1 + k_\alpha \alpha_3}{1 + k_\alpha \delta} [(\Phi \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\Phi \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3] = 0$$

что и требовалось доказать.

В целях использования деформационных соотношений (1.3) в алгоритме численного решения контактных задач представим их в скалярной форме

$$\varepsilon_{\alpha i} = \sum_{\pm} N^\pm(\alpha_3)(e_{\alpha i}^\pm + \eta_{\alpha i}^\pm), \quad \varepsilon_{33} = e_{33} + \eta_{33} \quad (1.6)$$

где

$$e_{\alpha\alpha}^\pm = \frac{1}{\zeta_\alpha^\pm} \lambda_\alpha^\pm, \quad 2e_{12}^\pm = \frac{1}{\zeta_1^\pm} \omega_1^\pm + \frac{1}{\zeta_2^\pm} \omega_2^\pm$$

$$2e_{\alpha 3}^\pm = \left(1 \pm \frac{k_\alpha h}{2\zeta_\alpha}\right) \beta_\alpha - \frac{1}{\zeta_\alpha} \theta_\alpha^\pm, \quad e_{33} = \beta_3$$

$$\eta_{\alpha\alpha}^\pm = \frac{1}{2(\zeta_\alpha^\pm)^2} [(\lambda_\alpha^\pm)^2 + (\omega_\alpha^\pm)^2 + (\theta_\alpha^\pm)^2], \quad \eta_{12}^\pm = \frac{1}{2\zeta_1^\pm \zeta_2^\pm} (\lambda_1^\pm \omega_2^\pm + \lambda_2^\pm \omega_1^\pm + \theta_1^\pm \theta_2^\pm)$$

$$\eta_{\alpha 3}^\pm = \frac{1}{2\zeta_\alpha} (\beta_\alpha \lambda_\alpha^\pm + \beta_\gamma \omega_\alpha^\pm - \beta_3 \theta_\alpha^\pm), \quad \eta_{33} = \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \quad (1.7)$$

$$\lambda_\alpha^\pm = \frac{1}{A_\alpha} v_{\alpha,\alpha}^\pm + B_\gamma v_\gamma^\pm + k_\alpha v_3^\pm, \quad \omega_\alpha^\pm = \frac{1}{A_\alpha} v_{\gamma,\alpha}^\pm - B_\gamma v_\alpha^\pm$$

$$\theta_{\alpha}^{\pm} = -\frac{1}{A_{\alpha}} v_{3,\alpha}^{\pm} + k_{\alpha} v_{\alpha}^{\pm}, \quad \beta_i = \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-)$$

$$\zeta_{\alpha}^{\pm} = 1 + k_{\alpha} \delta^{\pm}, \quad \bar{\zeta}_{\alpha} = 1 + k_{\alpha} \bar{\delta}, \quad B_{\alpha} = \frac{1}{A_1 A_2} A_{\gamma, \alpha} \quad (\gamma \neq \alpha)$$

2. Функционал Ху–Васидзу для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко. Как известно, уравнения равновесия, деформационные соотношения, уравнения обобщенного закона Гука и граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях оболочки представляют собой уравнения Эйлера и естественные граничные условия некоторой вариационной задачи. В связи с этим введем в функционал Ху–Васидзу пространственной теории упругости [15] аппроксимации перемещений (1.1) и независимо введенных деформаций

$$\epsilon_{\alpha i} = \sum_{\pm} N^{\pm}(\alpha_3) E_{\alpha i}^{\pm}, \quad \epsilon_{33} = E_{33} \tag{2.1}$$

где $E_{\alpha\beta}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$, $E_{\alpha 3}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$, – тангенциальные и поперечные касательные деформации лицевых поверхностей оболочки, $E_{33}(\alpha_1, \alpha_2)$ – поперечное обжатие оболочки. В результате, учитывая соотношения (1.6), (1.7), приходим к следующей формуле для функционала Ху–Васидзу:

$$J_{HW} = \iint_S \left\{ \Pi - \sum_{\pm} \left[\sum_{i+j < 6} T_{ij}^{\pm} (E_{ij}^{\pm} - e_{ij}^{\pm} - \eta_{ij}^{\pm}) + \sum_i (\pm p_i^{\pm}) v_i^{\pm} \right] - T_{33} (E_{33} - e_{33} - \eta_{33}) \right\} \times \\ \times A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \oint_{\Gamma} \sum_{\pm} (\hat{T}_{vv}^{\pm} v_v^{\pm} + \hat{T}_{vt}^{\pm} v_t^{\pm} + \hat{T}_{v3}^{\pm} v_3^{\pm}) (1 + k_N \bar{\delta}) ds \tag{2.2}$$

Здесь v_v^{\pm} , v_t^{\pm} , v_3^{\pm} – компоненты векторов перемещений лицевых поверхностей S^{\pm} в локальном базисе \mathbf{v} , \mathbf{t} , \mathbf{e}_3 (фиг. 1), k_N – нормальная кривизна кривой Γ , $\Pi(E_{\alpha i}^{\pm}, E_{33})$ – упругий потенциал оболочки, $T_{\alpha i}^{\pm}$, T_{33} – результирующие напряжений, \hat{T}_{vv}^{\pm} , \hat{T}_{vt}^{\pm} , \hat{T}_{v3}^{\pm} – результирующие внешних поверхностных нагрузок, определяемые по формулам

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l,m} [D_{ijlm}^{0-} E_{ij}^- E_{lm}^- + D_{ijlm}^{1-} E_{ij}^- E_{lm}^+ + D_{ijlm}^{0+} E_{ij}^+ E_{lm}^- + D_{ijlm}^{1+} E_{ij}^+ E_{lm}^+] \tag{2.3}$$

$$D_{ijlm}^{n\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} b_{ijlm} N^{\pm}(\alpha_3) [N^-(\alpha_3)]^{1-n} [N^+(\alpha_3)]^n d\alpha_3, \quad n = 0, 1 \tag{2.4}$$

$$T_{\alpha i}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{\alpha i} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad T_{33} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} S_{33} d\alpha_3, \quad \hat{T}_{vk}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} q_k N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad k = v, t, 3$$

где S_{ij} – компоненты симметричного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, b_{ijlm} – жесткостные характеристики материала. Отметим, что в формулах (2.3) принято $E_{33}^- = E_{33}^+ = E_{33}$ и $b_{\alpha\beta\gamma 3} = b_{\alpha 333} = 0$.

Учитывая, что перемещения, деформации и результирующие напряжения являются независимыми функциональными переменными, вариацию функционала Ху–Васидзу представим в форме

$$\begin{aligned}
 \delta J_{HW} = & - \iint_S \left[\sum_{\pm} \left(\sum_{i+j < 6} \left\{ \left[T_{ij}^{\pm} - \sum_{l+m < 6} (D_{ijlm}^{0+} E_{lm}^{-} + D_{ijlm}^{1+} E_{lm}^{+}) - \frac{D_{ij33}^{+} E_{33}}{D_{3333}^{+}} \right] \delta E_{ij}^{\pm} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (E_{ij}^{\pm} - e_{ij}^{\pm} - \eta_{ij}^{\pm}) \delta T_{ij}^{\pm} - T_{ij}^{\pm} (\delta e_{ij}^{\pm} + \delta \eta_{ij}^{\pm}) \right\} + \sum_i (\pm p_i^{\pm}) \delta v_i^{\pm} \right) + \right. \\
 & \left. + \left[T_{33} - \sum_{l+m < 6} (D_{33lm}^{-} E_{lm}^{-} + D_{33lm}^{+} E_{lm}^{+}) - D_{3333} E_{33} \right] \delta E_{33} + \right. \\
 & \left. + (E_{33} - e_{33} - \eta_{33}) \delta T_{33} - T_{33} (\delta e_{33} + \delta \eta_{33}) \right] A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
 & - \oint_{\Gamma^{\pm}} (\hat{T}_{vv}^{\pm} \delta v_v^{\pm} + \hat{T}_{vi}^{\pm} \delta v_i^{\pm} + \hat{T}_{v3}^{\pm} \delta v_3^{\pm}) (1 + k_N \bar{\delta}) ds
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$D_{ij33}^{-} = D_{ij33}^{0-} + D_{ij33}^{1-}, \quad D_{ij33}^{+} = D_{ij33}^{0+} + D_{ij33}^{1+}, \quad D_{3333} = D_{3333}^{-} + D_{3333}^{+}$$

При вычислении компонент симметричного тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа могут быть использованы полные соотношения обобщенного закона Гука

$$S_{ij} = \sum_{l,m} b_{ijlm} \epsilon_{lm} \tag{2.6}$$

Однако при расчете оболочек из несжимаемых или близких к ним по характеристикам материалов, у которых коэффициенты Пуассона близки к 1/2 [5, 10], а также с целью преодоления так называемого пуассоновского заклинивания [8, 16] будем приближенно полагать в соотношениях (2.6) $b_{\alpha\beta 33} = 0$. Вместе с тем уравнение для поперечного нормального напряжения используется в неизменном виде, т.е. $b_{33\alpha\beta} \neq 0$. Сказанное означает, что подчеркнутый член в формуле (2.5) следует опустить. В результате приходим к несимметричной матрице жесткости [13], что, однако, не вносит существенных корректив в численную реализацию контактной задачи на основе смешанной конечноэлементной модели.

3. Модифицированный функционал Ху–Васидзу для решения задачи контакта оболочки типа Тимошенко с жестким штампом. Предположим для определенности, что контакт оболочки с абсолютно жестким плоским штампом осуществляется по части внешней поверхности оболочки S_c^+ , причем трение в области контакта отсутствует. Условия непроникания контактирующих тел и неположительности контактного давления q_c^+ запишем в виде

$$g^+ - \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad q_c^+ \leq 0 \tag{3.1}$$

где $g^+(\alpha_1, \alpha_2)$ – начальный зазор, т.е. кратчайшее расстояние от некоторой точки оболочки $M^+(\alpha_1, \alpha_2)$, принадлежащей поверхности предполагаемого контакта S_c^+ , до штампа, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости штампа.

Неравенства (3.1) необходимо дополнить условием того, что контактное давление определяется в точках, которые вступают в контакт с жестким штампом, т.е. должно выполняться равенство

$$q_c^+(g^+ - v^+ \cdot n) = 0 \quad (3.2)$$

Для решения задачи контактного взаимодействия оболочки с жестким штампом рассмотрим модифицированный функционал Ху–Васидзу, дополнив функционал (2.2) слагаемым, отвечающим за выполнение условий контакта (3.1), (3.2), и еще одним слагаемым [1], связанным с регуляризацией задачи

$$J = J_{HW} + \int \int_{s_c^+} \left[\lambda (g^+ - v^+ \cdot n) - \frac{1}{2\epsilon} \lambda^2 \right] dS \quad (3.3)$$

где λ – множитель Лагранжа (контактное давление), ϵ – регуляризационный параметр. Отметим, что наличие регуляризационного члена в функционале (3.3) подразумевает замену абсолютно жесткого штампа совокупностью непрерывно распределенных пружин с жесткостью ϵ . Предельный случай $\epsilon \rightarrow \infty$ соответствует классическому методу множителей Лагранжа.

В дальнейшем потребуется формула для вариации модифицированного функционала Ху–Васидзу. Учитывая выражение (2.5), ее можно представить в виде

$$\delta J = \delta J_{HW} + \int \int_{s_c^+} \left[(g^+ - v^+ \cdot n - \frac{1}{\epsilon} \lambda) \delta \lambda - \lambda n \delta v^+ \right] dS \quad (3.4)$$

4. Алгоритм численного решения контактной задачи смешанным методом конечных элементов. Вариация модифицированного функционала Ху–Васидзу (3.4) для элемента оболочки в его безразмерных криволинейных координатах ξ_1, ξ_2 может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta J^{el} = & - \int \int_{-1-1}^{1-1} \left[(\mathbf{T} - \mathbf{DE})^T \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{e} - \boldsymbol{\eta})^T \delta \mathbf{T} - \mathbf{T}^T (\delta \mathbf{e} + \delta \boldsymbol{\eta}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{P} + \lambda \mathbf{m})^T \delta \mathbf{v} - \left(g^+ - \mathbf{m}^T \mathbf{v} - \frac{1}{\epsilon} \lambda \right) d\lambda \right] \mu^{el} d\xi_1 d\xi_2 - \oint_{\Gamma^{el}} \hat{\mathbf{T}}_{\Gamma}^T \delta \mathbf{v}_{\Gamma} (1 + k_N \bar{\delta}) ds \\ \mathbf{v}^T = & [v_1^- v_1^+ v_2^- v_2^+ v_3^- v_3^+], \quad \mathbf{v}_{\Gamma}^T = [v_v^- v_v^+ v_t^- v_t^+ v_3^- v_3^+] \\ \mathbf{E}^T = & [E_{11}^- E_{11}^+ E_{22}^- E_{22}^+ 2E_{12}^- 2E_{12}^+ 2E_{13}^- 2E_{13}^+ 2E_{23}^- 2E_{23}^+ E_{33}] \\ \mathbf{e}^T = & [e_{11}^- e_{11}^+ e_{22}^- e_{22}^+ 2e_{12}^- 2e_{12}^+ 2e_{13}^- 2e_{13}^+ 2e_{23}^- 2e_{23}^+ e_{33}] \\ \boldsymbol{\eta}^T = & [\eta_{11}^- \eta_{11}^+ \eta_{22}^- \eta_{22}^+ 2\eta_{12}^- 2\eta_{12}^+ 2\eta_{13}^- 2\eta_{13}^+ 2\eta_{23}^- 2\eta_{23}^+ \eta_{33}] \\ \hat{\mathbf{T}}^T = & [T_{11}^- T_{11}^+ T_{22}^- T_{22}^+ T_{12}^- T_{12}^+ T_{13}^- T_{13}^+ T_{23}^- T_{23}^+ T_{33}] \\ \mathbf{T}^T = & [\hat{T}_{vv}^- \hat{T}_{vv}^+ \hat{T}_{vt}^- \hat{T}_{vt}^+ \hat{T}_{v3}^- \hat{T}_{v3}^+], \quad \mathbf{P}^T = [-p_1^- p_1^+ - p_2^- p_2^+ - p_3^- p_3^+] \\ \mathbf{m}^T = & [0n_1 0n_2 0n_3], \quad \mu^{el} = A_1 A_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 d_1^{el} d_2^{el} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $2d_1^{el}$ и $2d_2^{el}$ – длины элемента в направлениях α_1 и α_2 , \mathbf{v} – столбец перемещений, \mathbf{v}_{Γ} – столбец перемещений граничного контура элемента Γ^{el} , \mathbf{E} – столбец независимо

введенных деформаций лицевых поверхностей оболочки, ϵ и η – столбцы, характеризующие деформационные соотношения (1.6), (1.7), \mathbf{T} – столбец результирующих напряжений, $\hat{\mathbf{T}}_\Gamma$ – столбец результирующих нагрузок, действующих на границе элемента Γ^{el} , \mathbf{P} – столбец поверхностных нагрузок, \mathbf{D} – несимметричная матрица коэффициентов упругости размера 11×11 , элементы которой определяются на основе соотношений (2.3) с учетом допущений [5, 8, 10, 13], принятых для расчета несжимаемых материалов, а также с целью преодоления пуассоновского заклинивания.

В функционале (4.1) столбцы \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{T} и множитель Лагранжа λ являются независимыми функциональными переменными, поэтому для них на элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений и множителя Лагранжа воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \sum_r N_r \lambda_r, \quad r = 1, \dots, 4 \quad (4.2)$$

где $\mathbf{v}_r^T = [v_{1r}^- v_{1r}^+ v_{2r}^- v_{2r}^+ v_{3r}^- v_{3r}^+]$ – столбцы узловых перемещений, $N_r(\xi_1, \xi_2)$ – линейные функции формы, λ_r – значения множителя Лагранжа в узлах элемента.

Для деформаций согласно методу двойной аппроксимации [2, 17], обобщенному на случай учета поперечного обжатия [7, 13], имеем еще более простые формулы

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{00})^T &= [E_{11}^{-00} E_{11}^{+00} E_{22}^{-00} E_{22}^{+00} 2E_{12}^{-00} 2E_{12}^{+00} 2E_{13}^{-00} 2E_{13}^{+00} 2E_{23}^{-00} 2E_{23}^{+00} E_{33}^{00}] \\ (\mathbf{E}^{01})^T &= [E_{11}^{-01} E_{11}^{+01} 2E_{13}^{-01} 2E_{13}^{+01} E_{33}^{01}], \quad (\mathbf{E}^{10})^T = [E_{22}^{-10} E_{22}^{+10} 2E_{23}^{-10} 2E_{23}^{+10} E_{33}^{10}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

где \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица размера 11×11 , \mathbf{E}^{00} – столбец, характеризующий однородную форму деформации элемента, \mathbf{E}^{01} , \mathbf{E}^{10} – столбцы, характеризующие неоднородные формы деформации, $\mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{11}]$ – матрица размера 1×1 , введение которой упрощает матричные выкладки. Здесь и далее в этом разделе индексы r_1, r_2 принимают значения 0, 1. Отметим также, что различный характер аппроксимации ком-

понент тензора деформаций Грина–Лагранжа обеспечивает нужное число степеней свободы, что в свою очередь необходимо для корректного представления перемещений элемента как жесткого целого [7, 13].

Для результирующих напряжений примем аппроксимацию, аналогичную (4.3), (4.4),

$$\mathbf{T} = \sum_{r_1, r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2}, \quad \mathbf{T}^{11} = [T_{33}^{11}]$$

$$(\mathbf{T}^{00})^T = [T_{11}^{-00} T_{11}^{+00} T_{22}^{-00} T_{22}^{+00} T_{12}^{-00} T_{12}^{+00} T_{13}^{-00} T_{13}^{+00} T_{23}^{-00} T_{23}^{+00} T_{33}^{00}] \quad (4.5)$$

$$(\mathbf{T}^{01})^T = [T_{11}^{-01} T_{11}^{+01} T_{13}^{-01} T_{13}^{+01} T_{33}^{01}] \quad (\mathbf{T}^{10})^T = [T_{22}^{-10} T_{22}^{+10} T_{23}^{-10} T_{23}^{+10} T_{33}^{10}]$$

Вводя аппроксимации (4.2)–(4.5) в формулу (4.1) и пользуясь стандартной вариационной процедурой смешанной модели метода конечных элементов, приходим к следующим уравнениям равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T (\mathbf{L}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad \mathbf{T}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}$$

$$\sum_{r_1 r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [(\mathbf{L}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \mathbf{\Lambda}] = \mathbf{F} \quad (4.6)$$

где $\mathbf{U}^T = [\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_4^T]$ – столбец узловых перемещений элемента, $\mathbf{\Lambda}^T = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]$ – столбец узловых значений множителя Лагранжа, \mathbf{F} – столбец узловых нагрузок, $\mathbf{B}^{r_1 r_2}$ – матрицы размера 24×4 , отвечающие контактному взаимодействию элемента, $\mathbf{L}^{r_1 r_2}$ – матрицы размера 11×24 , характеризующие линейные составляющие тензора деформаций (1.6), (1.7), $\mathbf{A}^{r_1 r_2}$ – трехмерные массивы размера $11 \times 24 \times 24$, характеризующие нелинейные составляющие тензора деформаций (1.6), (1.7), при этом $\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U}$ – матрицы размера 11×24 , элементы которых вычисляются по формулам

$$(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U})_{pq} = \sum_s A_{pqs}^{r_1 r_2} U_s; \quad p = 1, \dots, 11; \quad q, s = 1, \dots, 24$$

Дополним уравнения (4.6) соотношениями, отвечающими согласно формулам (3.1)–(3.3) за выполнение условий контакта. В зоне контакта ($\rho \in I_c$, где $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$) должны удовлетворяться условия

$$g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho - \frac{1}{\varepsilon} \lambda_\rho = 0, \quad \lambda_\rho \leq 0 \quad (4.7)$$

а вне зоны контакта ($\rho \notin I_c$) – условия

$$g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho \geq 0, \quad \lambda_\rho = 0 \quad (4.8)$$

где g_r^+ – значения зазора в узлах элемента, $\mathbf{m}_r^T = [0n_{1r} 0n_{2r} 0n_{3r}]$ – столбцы, характеризующие единичные векторы нормали к плоскости штампа в узлах элемента ($r = 1, \dots, 4$). Введем также столбец зазоров в узлах элемента $\mathbf{G}^T = [g_1^+ g_2^+ g_3^+ g_4^+]$.

К решению уравнений (4.6) с учетом ограничений (4.7), (4.8) применим инкрементальный подход [2, 15], представив искомые функции, узловые нагрузки и зазоры в виде

$$\begin{aligned} {}^{1+\Delta t}\mathbf{E}^{r_1 r_2} &= {}^t\mathbf{E}^{r_1 r_2} + \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2}, & {}^{1+\Delta t}\mathbf{T}^{r_1 r_2} &= {}^t\mathbf{T}^{r_1 r_2} + \Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2} \\ {}^{1+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}, & {}^{1+\Delta t}\mathbf{F} &= {}^t\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} \\ {}^{1+\Delta t}\mathbf{\Lambda} &= {}^t\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}, & {}^{1+\Delta t}\mathbf{G} &= {}^t\mathbf{G} + \Delta\mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Величины, снабженные верхними индексами t и $t + \Delta t$, характеризуют соответственно текущее и конечное напряженно-деформированное состояние оболочки, $\Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2}$, $\Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2}$, $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\mathbf{F}$, $\Delta\mathbf{\Lambda}$, $\Delta\mathbf{G}$ – инкрементальные переменные.

Вводя далее формулы (4.9) в соотношения (4.6)–(4.8) и учитывая, что в текущем состоянии оболочка находилась в равновесии, получим инкрементальные уравнения равновесия элемента

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2} &= (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T ({}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U}) \Delta\mathbf{U}, \\ (\Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2}) &= (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{DQ}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{E}^{r_1 r_2} \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \times \\ &\times [2(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{T}^{r_1 r_2} + ({}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{T}^{r_1 r_2} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \Delta\mathbf{\Lambda}] = \Delta\mathbf{F} \\ {}^t\mathbf{M}^{r_1 r_2} &= \mathbf{L}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{U} \end{aligned} \quad (4.10)$$

а также инкрементальные условия контакта при $\rho \in {}^{t+\Delta t}I_c$

$$\Delta g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \Delta \mathbf{v}_\rho - \frac{1}{\varepsilon} \Delta \lambda_\rho = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ -{}^t g_\rho^+ + \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.11)$$

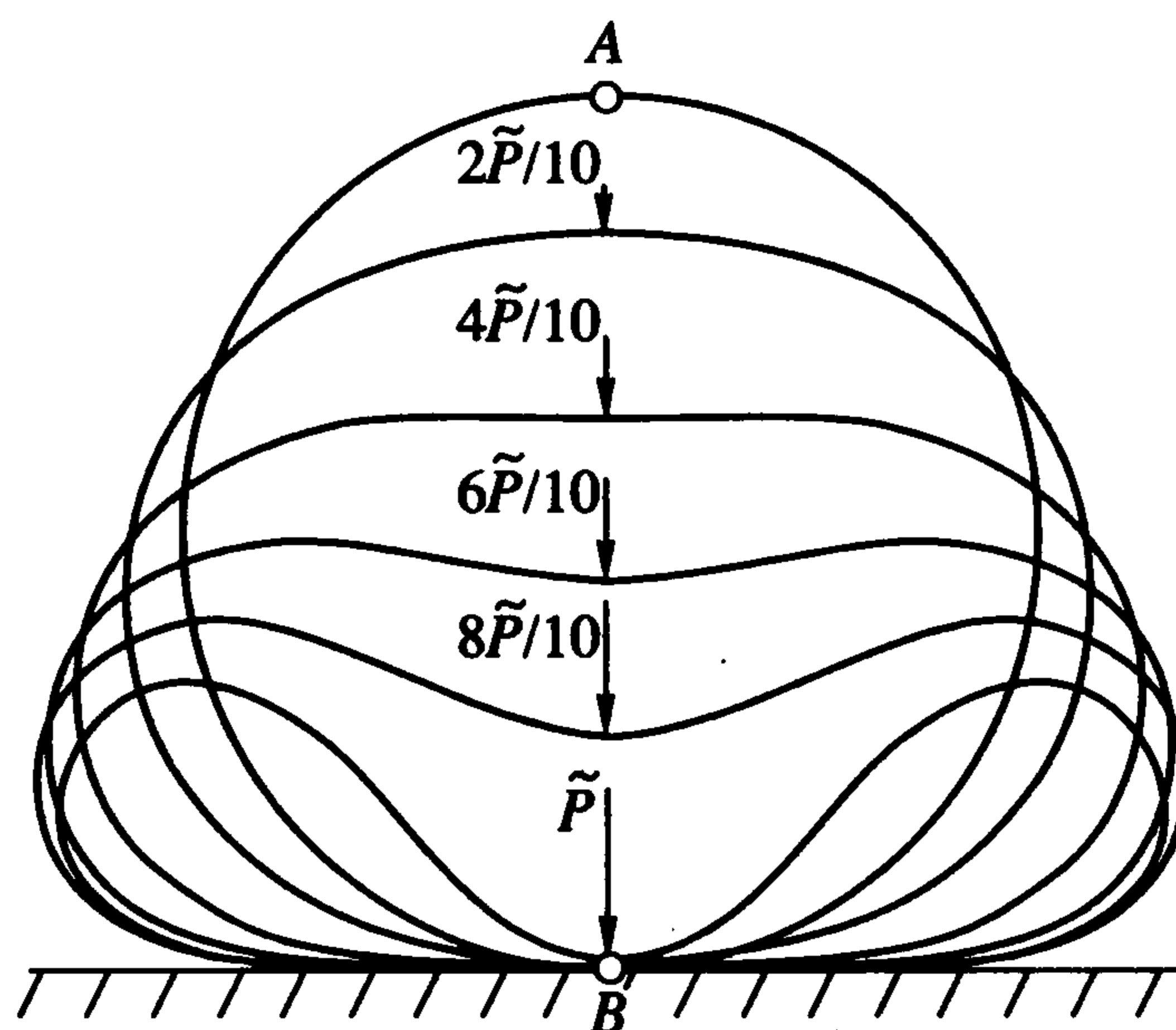
$$\Delta \lambda_\rho \leq \begin{cases} -{}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ 0, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.12)$$

и при $\rho \notin {}^{t+\Delta t}I_c$

$$\Delta g_\rho^+ - \mathbf{m}_\rho^T \Delta \mathbf{v}_\rho \geq \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} {}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ -{}^t g_\rho^+ + \mathbf{m}_\rho^T \mathbf{v}_\rho, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\Delta \lambda_\rho = \begin{cases} -{}^t \lambda_\rho, & \text{если } \rho \in {}^t I_c \\ 0, & \text{если } \rho \notin {}^t I_c \end{cases} \quad (4.14)$$

где ${}^t I_c$, ${}^{t+\Delta t} I_c$ – некоторые подмножества множества $\{1, 2, 3, 4\}$.



Фиг. 2

Исключая в соотношениях (4.10) инкрементальные переменные $\Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и $\Delta \mathbf{T}^{r_1 r_2}$, приходим к системе нелинейных уравнений относительно инкрементальных переменных $\Delta \mathbf{U}$ и $\Delta \mathbf{\Lambda}$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} [2(\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{T}^{r_1 r_2} + (\mathbf{M}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U})^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} (\mathbf{M}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{U}) \Delta \mathbf{U} + \mathbf{B}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{\Lambda}] = \Delta \mathbf{F} \quad (4.15)$$

которую следует решать совместно с инкрементальными контактными условиями (4.11)–(4.14). В формуле (4.15) для удобства записи введены матрицы порядка 11×11

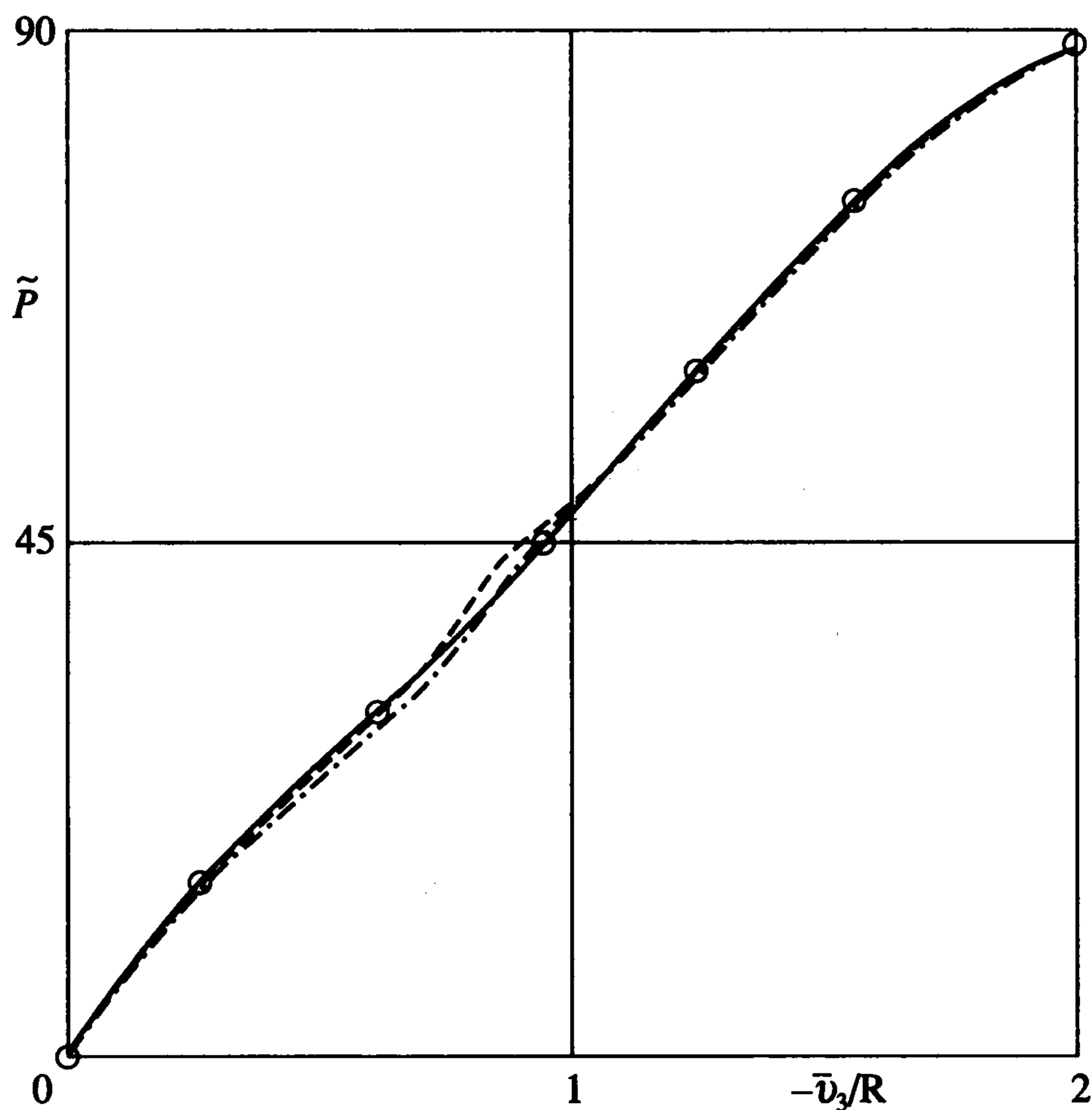
$$\mathbf{D}^{r_1 r_2} = \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T$$

Далее используется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль с получением системы нелинейных уравнений относительно глобального вектора узловых перемещений, на которой здесь останавливаться не будем.

Для решения задачи был использован метод проб и ошибок, суть которого состоит в следующем. Вначале задается начальное приближение зоны контакта и решается методом Ньютона–Рафсона нелинейная система уравнений (4.11), (4.14), (4.15), затем для каждого узла проверяется выполнение неравенств (4.12), (4.13). Если неравенство (4.12) не выполняется, то узел выводится из зоны контакта. В случае, если не выполняется неравенство (4.13), то узел добавляется к зоне контакта.

5. Результаты численных расчетов. Рассмотрим круговую арку, обжимаемую на жесткое основание сосредоточенной силой P , приложенной в верхнем сечении A , как показано на фиг. 2. Механические и геометрические характеристики арки приняты следующими: модуль упругости $E = 10^7$ Н/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0$, радиус срединной окружности $R = 100$ мм, толщина $h = 1$ мм, ширина $b = 1$ мм. Эта задача привлекла внимание (см., например, [18, 19]) с точки зрения изучения проблемы контактного взаимодействия тонкостенных конструкций, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам.

Вследствие симметрии задачи рассмотрена одна половина арки, которая разбивалась на 30 или 60 элементов. Для того чтобы привести нижнюю точку сечения A в “контакт” с верхней точкой сечения B , было использовано 5 шагов по нагрузке. При



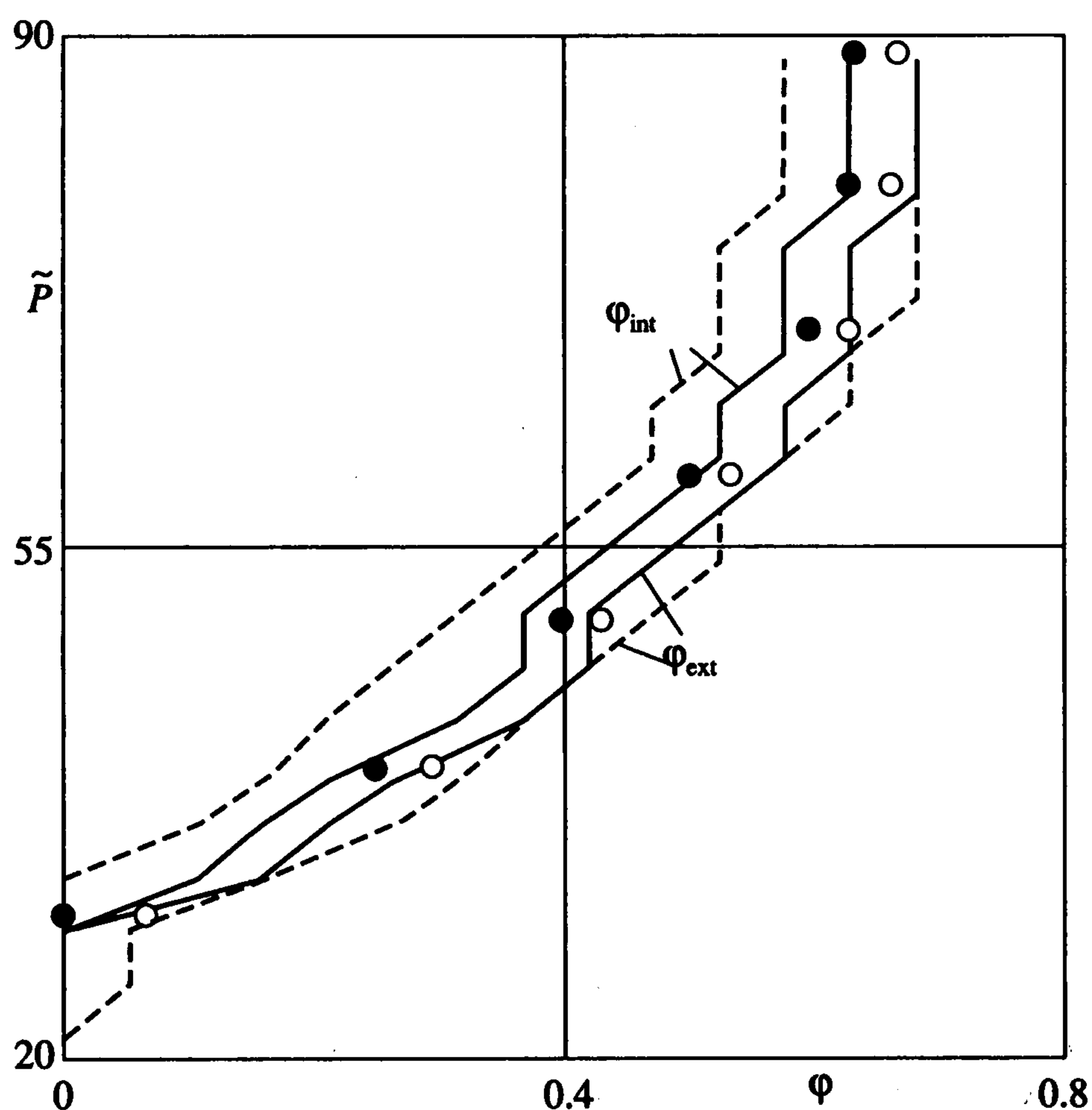
Фиг. 3

этом для сжимающей силы было получено такое значение: $\tilde{P} = 88.40$, где $\tilde{P} = 120PR^2/(Eh^3b)$. Численные эксперименты, однако, показали, что при надлежащем выборе начальной зоны контакта возможно использование меньшего числа инкрементов. На фиг. 3 сплошной кривой представлена зависимость безразмерной силы от безразмерного прогиба срединной точки сечения А. Светлыми точками показаны результаты расчета [19] при использовании инкрементального подхода на основе известной теории осесимметричных оболочек вращения конечного прогиба [20] с численной реализацией смешанным методом конечных элементов. Отметим, что никаких данных о числе использованных шагов по нагрузке в работе [19] не приводилось.

В данной работе при расчетах выбрано два значения регуляризационного параметра: $\epsilon = 10^3$ и $\epsilon = 10^5$. Оказалось, что регуляризационный параметр мало влияет на вид кривой нагрузка–прогиб. Вместе с тем была обнаружена существенная зависимость координат начальной (φ_{int}) и конечной (φ_{ext}) точек контакта от регуляризационного параметра ϵ , поскольку в контакт с основанием вступают лишь несколько узлов. Результаты численных расчетов представлены на фиг. 4 и в табл. 1, где обозначено: φ – центральный угол, отсчитываемый против часовой стрелки от сечения В к сечению А, N^{el} – число элементов, \tilde{Q}_c – безразмерная реакция контактного давления q_c^+

$$\tilde{Q}_c = \frac{120R^2}{Eh^3b} \iint_{s_c^+} q_c^+ dS$$

Сплошные кривые на фиг. 4 соответствуют $\epsilon = 10^5$, штриховые – $\epsilon = 10^3$, светлыми (φ_{ext}) и темными (φ_{int}) точками показаны результаты расчетов Ноора и Кима [19].



Фиг. 4

Заметим, что реакция контактного давления \tilde{Q}_c найдена с высокой точностью, так как для безразмерной силы обжатия \tilde{P} выше было указано достаточно близкое значение.

В качестве второго примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, обжимаемую на жесткое основание сосредоточенной силой P , приложенной в центральном сечении A (фиг. 5). Механические и геометрические характеристики оболочки следующие: $E = 10^7$ Н/мм², $\nu = 0.3$, $R = 100$ мм, $L = 200$ мм, $h = 1$ мм.

Вследствие симметрии задачи рассмотрена одна четверть оболочки, которая разбивалась на 10×60 элементов. Было использовано 5 шагов по нагрузке и принято $\epsilon = 10^3$. Зависимости безразмерной силы $\tilde{P} = 120(1 - \nu^2)PR^2/(Eh^3L)$ от безразмерного прогиба срединных точек сечений A (штрихпунктирная кривая) и B (штриховая кри-

Таблица 1

| N^el | ϵ | $-\bar{v}_3^A/R$ | \tilde{Q}_c | φ_{int} | φ_{ext} |
|--------|------------|------------------|---------------|-----------------|-----------------|
| 30 | 10^3 | 1.986 | 88.86 | 0.628 | 0.733 |
| 60 | 10^3 | 1.992 | 88.51 | 0.576 | 0.681 |
| 30 | 10^5 | 1.983 | 88.86 | 0.628 | 0.733 |
| 60 | 10^5 | 1.991 | 88.51 | 0.628 | 0.681 |

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhong Z.H.* Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems. Oxford: Univ. Press, 1993. 371 p.
2. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
3. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thick and thin shell structures by curved elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1970. V. 2. № 3. P. 419–451.
4. *Noor A.K.* Bibliography of books and monographs on finite element technology // Appl. Mech. Rev. 1991. V. 44. № 6. P. 307–317.
5. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 435–446.
6. *Kulikov G.M.* Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
7. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* Simple and effective elements based upon Timoshenko–Mindlin shell theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2002. V. 191. № 11–12. P. 1173–1187.
8. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка // Механика композитных материалов. 2002. Т. 38. № 6. С. 815–826.
9. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Численное решение контактной задачи для многослойных композитных пластин // Вестн. Тамбов. ГТУ. 1998. Т. 4. № 4. С. 526–539.
10. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 205–223.
11. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 412 с.
12. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
13. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid body motions. Pt I. Timoshenko–Mindlin shell theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2003. V. 192. № 7–8. P. 851–875.
14. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
15. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982 = *Васицдзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
16. *Bischoff M., Ramm E.* On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37. № 46–47. P. 6933–6960.
17. *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФТИ АН СССР, 1989. 269 с.
18. *Simo J.C., Wriggers P., Schweizerhoff K.H., Taylor R.L.* Finite deformation postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints // Proc. Intern. Conf. Innovative Methods for Nonlinear Problems. Swansea: Pineridge Press, 1984. P. 365–387.
19. *Noor A.K., Kim K.O.* Mixed finite element formulation for frictionless contact problems // Finite Elements Anal. Design. 1989. V. 4. № 4. P. 315–332.
20. *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution // Progress in Applied Mechanics. N.Y.: Macmillan, 1963. P. 171–178.