

УДК 539.3

© 2003 г. Д. В. Бойко, Л. П. Железнов, В. В. Кабанов

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Излагается конечно-элементная постановка решения задач об устойчивости некруговых цилиндрических оболочек с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Интегрированием уравнений, полученных приравниванием нулю компонентов линейных деформаций, получены явные выражения для перемещений элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. Эти выражения использованы при построении функций формы эффективного четырехугольного конечного элемента естественной кривизны, разработан эффективный алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочек. Исследована устойчивость цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением при поперечном изгибе силой. Выяснено влияние на устойчивость оболочки эллиптичности и нелинейности деформирования. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными данными.

Некруговые оболочки в отличие от круговых недостаточно исследованы на устойчивость. Если число публикаций по круговым оболочкам исчисляется тысячами, то по некруговым оболочкам это число равно нескольким десяткам. Это можно объяснить, с одной стороны, меньшим использованием некруговых оболочек, с другой – трудностями решения задач, связанных с переменностью радиуса кривизны, что приводит к появлению переменных коэффициентов в уравнениях устойчивости. Известные решения задач устойчивости получены аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т.е. в классической постановке.

1. Перемещения конечных элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. При перемещениях элементов как твердых тел компоненты деформаций равны нулю. Приравнивая нулю линейные компоненты деформаций, изменений кривизны и кручение [1], получаем уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = u_x = 0, \quad \varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0, \quad \varepsilon_3 = v_x + k_2 u_\beta = 0 \\ \chi_1 = w_{xx} = 0, \quad \chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0, \quad \chi_3 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u , v , w – тангенциальные перемещения и прогиб, R – радиус, $k_2 = R^{-1}$ – кривизна поперечного сечения, β – угол нормали к поперечному сечению с осью b поперечного сечения, x – продольная координата (фиг. 1). Индексы x , β означают дифференцирование по переменным x , β .

Проинтегрируем уравнения (1.1). Из предпоследнего уравнения (1.1) имеем

$$v = w_\beta + RC_5, \quad C_5 = \text{const} \quad (1.2)$$

Из второго уравнения (1.1) следует

$$w = -v_\beta \quad (1.3)$$

С учетом этого равенства из (1.2) получаем уравнение

$$v_{\beta\beta} + v = RC_5$$

решение которого имеет вид

$$v = C_3c + C_4s + v_n; \quad c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta \quad (1.4)$$

Частное решение v_n неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных C_3, C_4 . После вычислений имеем

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + C_7c + C_8s \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + C_7s - C_8c \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\Psi_1 = \int Rsd\beta, \quad \Psi_2 = -\int Rcd\beta$$

Удовлетворим четвертому уравнению (1.1), положив

$$C_7 = C_2x, \quad C_8 = -C_1x$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + (C_2c - C_1s)x \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + (C_2s + C_1c)x \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из третьего уравнения (1.1) находим

$$u = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + C_6 \quad (1.7)$$

Функции (1.6), (1.7) удовлетворяют уравнениям (1.1) и, следовательно, в линейном приближении соответствуют перемещениям элементов как твердых тел.

2. Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на m , а по направляющей на n частей. Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов (фиг. 1). Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом выражений (1.6), (1.7) запишем выражения для полных перемещений точек конечного элемента

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\Psi_2 + a_{20}\Psi_1 \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\Psi_1c + \Psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + \\ &+ a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xs + a_8(\Psi_1s - \Psi_2c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

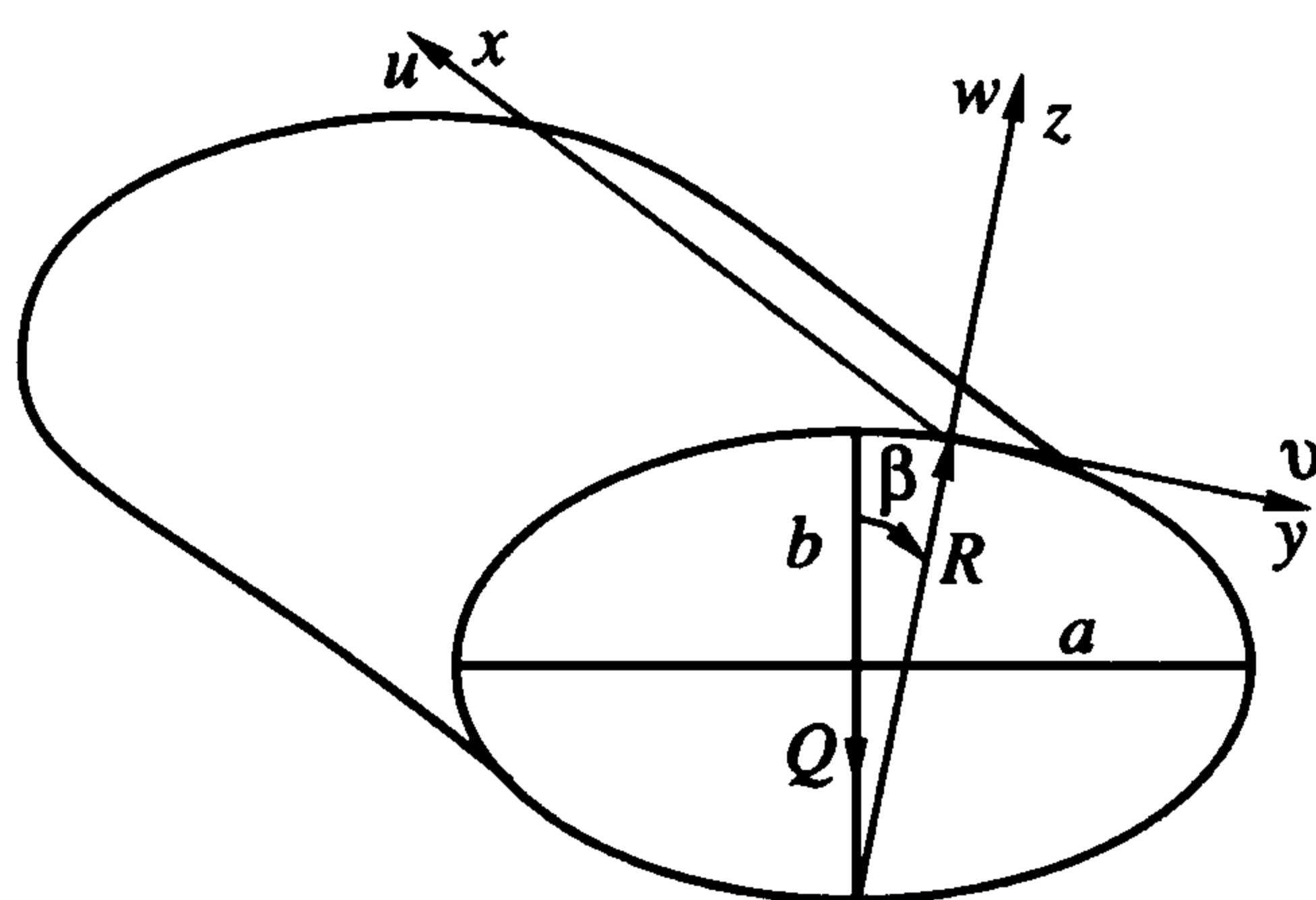
или в матричной форме

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}\mathbf{a}; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \text{col}\{u, v, w\}, \quad \mathbf{a} = \text{col}\{a_1, \dots, a_{24}\} \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ – вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента, \mathbf{a} – вектор неизвестных коэффициентов полиномов a_i , \mathbf{P} – матрица связи порядка 3×24 , элементы которой – множители при коэффициентах a_i в соотношениях (2.1).

Выражая коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{u}} &= \text{col}\{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\} \end{aligned} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

где \bar{u} – вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба, \mathbf{B} – матрица порядка 24×24 , ненулевые элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned}
 b_{1j} &= p_{1j}, & b_{2j} &= p_{2j}, & b_{3j} &= p_{3j}, & b_{4j} &= (p_{3j})_x, & b_{5j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, \\
 b_{6j} &= (p_{3j})_{xy} \quad (x = -a_1, y = -b_1), & b_{7j} &= p_{1j}, & b_{8j} &= p_{2j}, & b_{9j} &= p_{3j}, \\
 b_{10j} &= (p_{3j})_x, & b_{11j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, & b_{12j} &= (p_{3j})_{x\beta} \quad (x = -a_1, y = b_1), \\
 b_{13j} &= p_{1j}, & b_{14j} &= p_{2j}, & b_{15j} &= p_{3j}, & b_{16j} &= (p_{3j})_x, & b_{17j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_\beta)/R, \\
 b_{18j} &= (p_{3j})_{xy} \quad (x = a_1, y = -b_1), & b_{19j} &= p_{1j}, & b_{20j} &= p_{2j}, & b_{21j} &= p_{3j}, \\
 b_{22j} &= (p_{3j})_x, & b_{23j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, & b_{24j} &= (p_{3j})_{xy} \quad (x = a_1, y = b_1), \\
 j &= 1, \dots, 24, & a_1 &= L/(2m), & b_1 &= l/(2n)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

где L, l – длина образующей и направляющей оболочки.

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.2), получаем зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

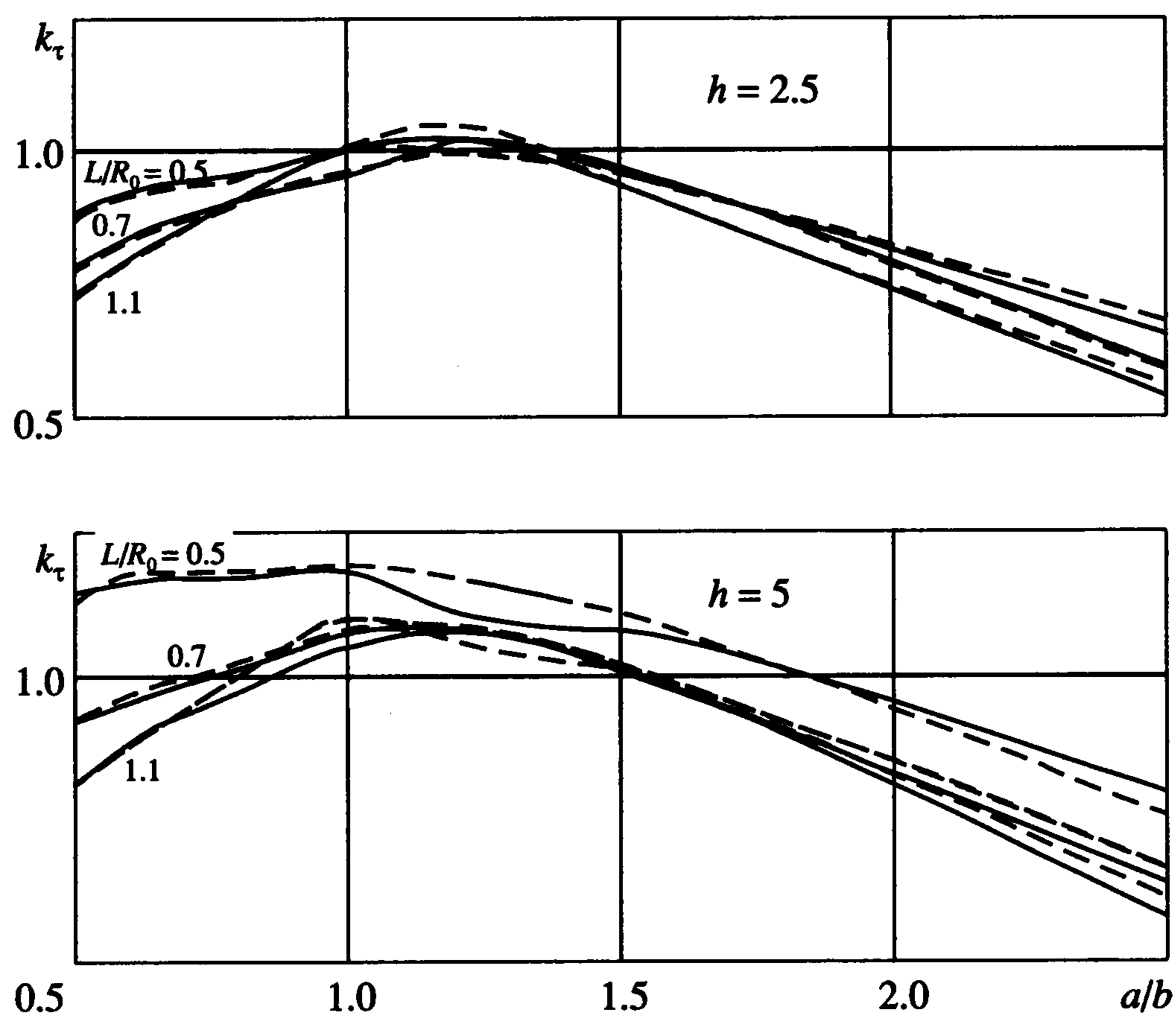
$$\bar{u} = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\bar{u} \tag{2.5}$$

В каждом узле шесть неизвестных, так что конечный элемент имеет 24 степени свободы. Узловые неизвестные определяем, используя вариационное уравнение Лагранжа $\delta\Pi = 0$, где Π – полная потенциальная энергия оболочки. При записи выражения потенциальной энергии используем нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями [1]. Уравнение $\delta\Pi = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Эту систему решаем шаговым методом по нагрузке с использованием на каждом шаге метода линеаризации Ньютона – Канторовича, уравнение которого для конечного элемента можно записать [2] в виде

$$\mathbf{H}(\bar{u}^n)\delta\bar{u} = \mathbf{q}_e - \mathbf{G}(\bar{u}^n), \quad \bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \delta\bar{u} \tag{2.6}$$

Здесь \mathbf{H} – матрица Гессе конечного элемента, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации, \mathbf{q}_e – вектор узловой нагрузки, \mathbf{G} – градиент потенциальной энергии.

Уравнения типа (2.6) для всей оболочки строятся [3] обычным образом с учетом граничных условий. Граничные условия ставятся в следующем виде. Для нулевых узловых граничных перемещений соответствующая им строка матрицы Гессе \mathbf{H} и соответствующий элемент вектора узловой нагрузки полагаются равными нулю, а на место диагонального коэффициента в матрице \mathbf{H} ставится большое число.



Фиг. 2

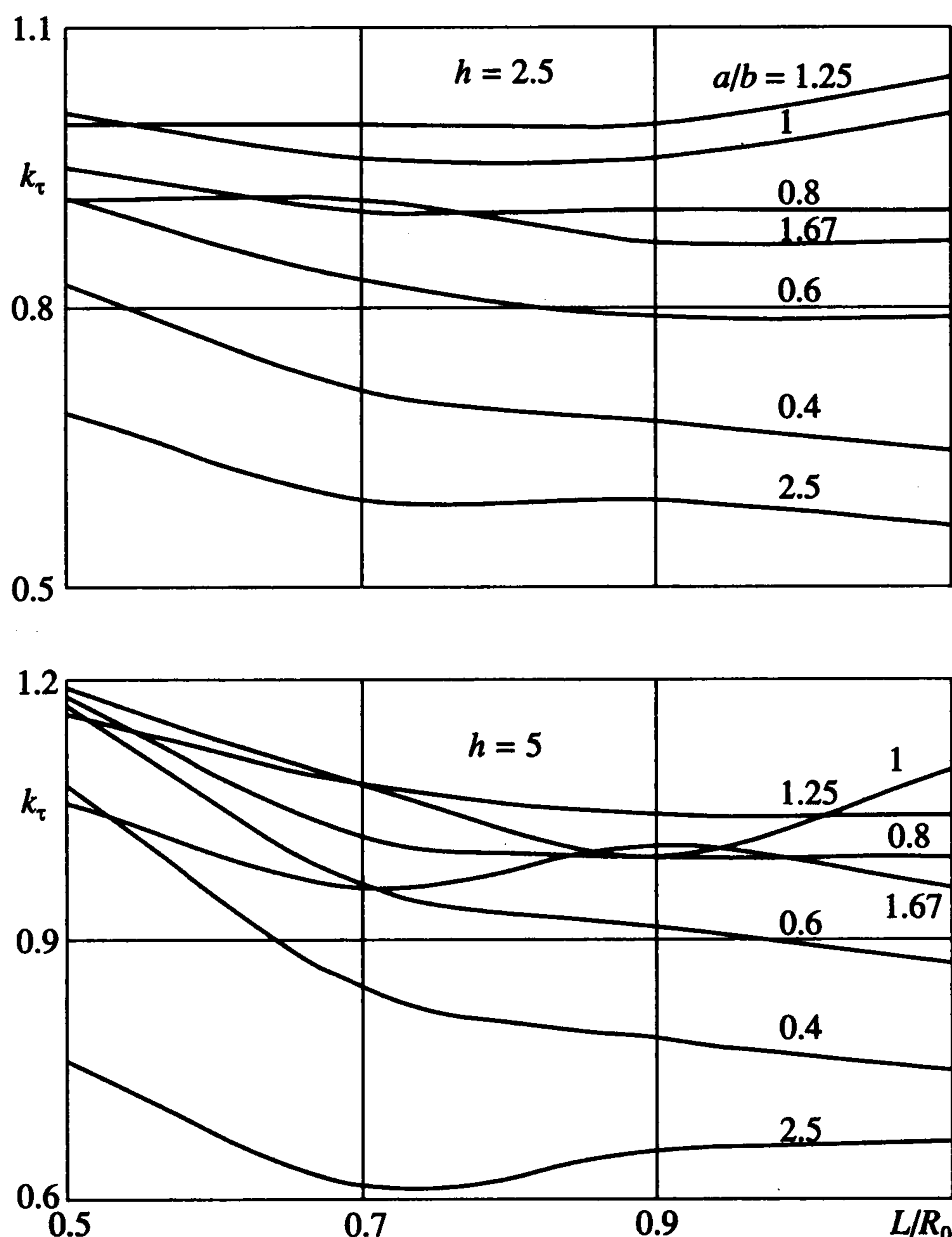
Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.6) отыскиваем методом Краута. При этом используется разложение $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ матрицы Гессе на диагональную и две треугольные матрицы. По найденным узловым перемещениям по известным формулам определяются напряжения и деформации. Контроль устойчивости осуществляется проверкой на положительную определенность матрицы Гессе, что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы \mathbf{D} . Появление отрицательных элементов соответствует потере устойчивости оболочки.

После того как найдено значение параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, отыскивается форма потери устойчивости оболочки из решения системы $\mathbf{H} \delta = 0$, где δ – вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяется одна линейно зависимая (вырожденная) строка матрицы \mathbf{H} , соответствующая первому отрицательному элементу матрицы \mathbf{D} . Элементы этой строки и соответствующего столбца матрицы \mathbf{H} полагаются равными нулю. На место диагонального коэффициента заносится единица, а в правую часть системы переносится соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы и отыскивается форма потери устойчивости оболочки. Изложенный алгоритм реализован вычислительной программой.

3. Нелинейное деформирование и устойчивость цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения при поперечном изгибе. Рассмотрим задачу о нелинейном деформировании и устойчивости консольно-защемленной ($u = v = w = w_x = 0$) цилиндрической оболочки при действии краевой поперечной силы Q . В этом случае

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2 b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2 s^2 + b^2 c^2, \quad \psi_1 = -\frac{b^2 c}{d}, \quad \psi_2 = -\frac{a^2 s}{d}$$

С нагруженной стороны оболочка подкреплена абсолютно-жестким шпангоутом. Оболочка имеет длину $L = 300 \dots 1100$ мм, толщину $h = 2.5 \dots 5$ мм, эквипериметриче-



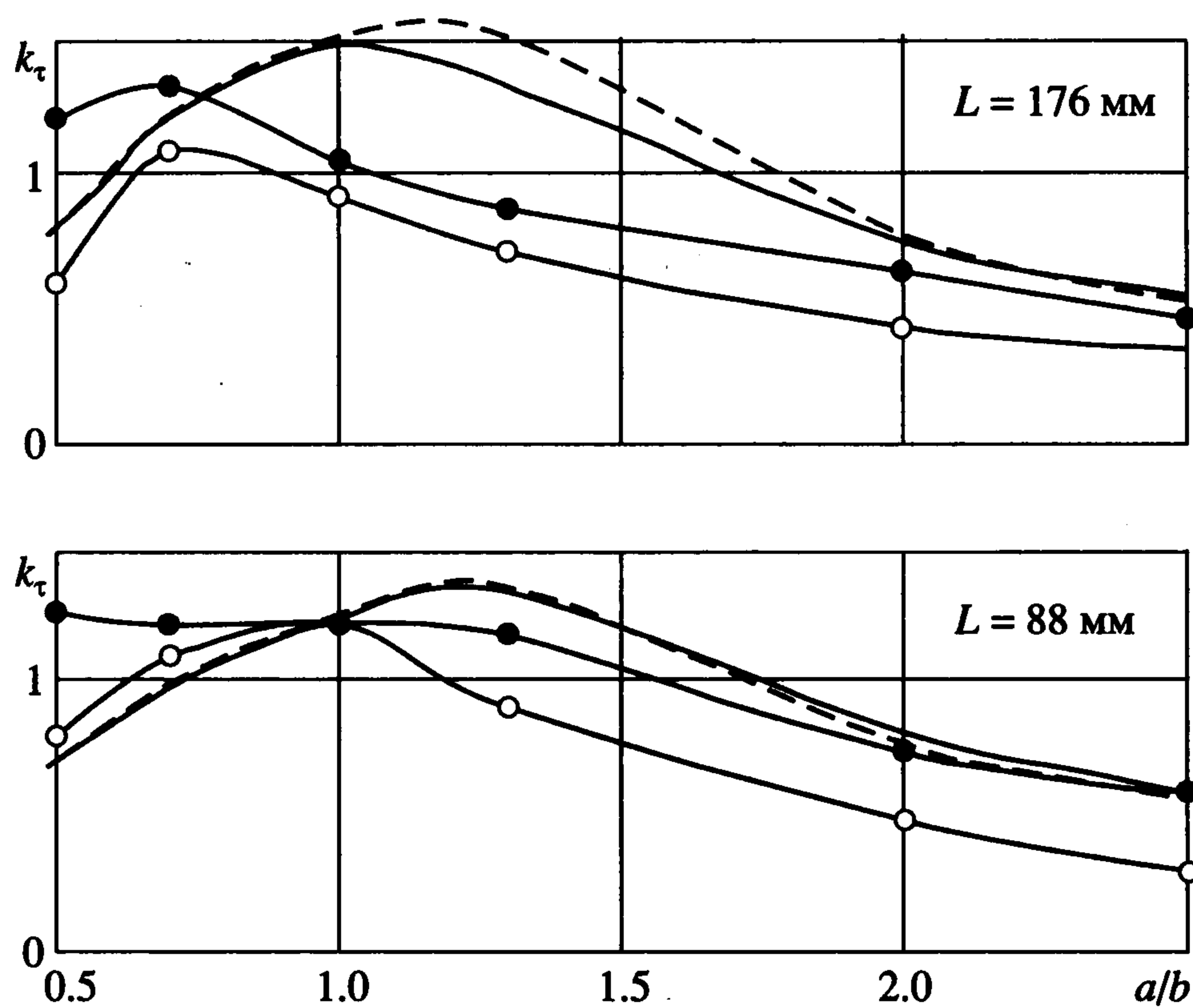
Фиг. 3

ский радиус поперечного сечения $R_0 = 1000$ мм, определяемый как радиус окружности, имеющей такой же периметр, что и эллипс, и выполнена из материала с модулем упругости $E = 0.7 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона, равным 0.3.

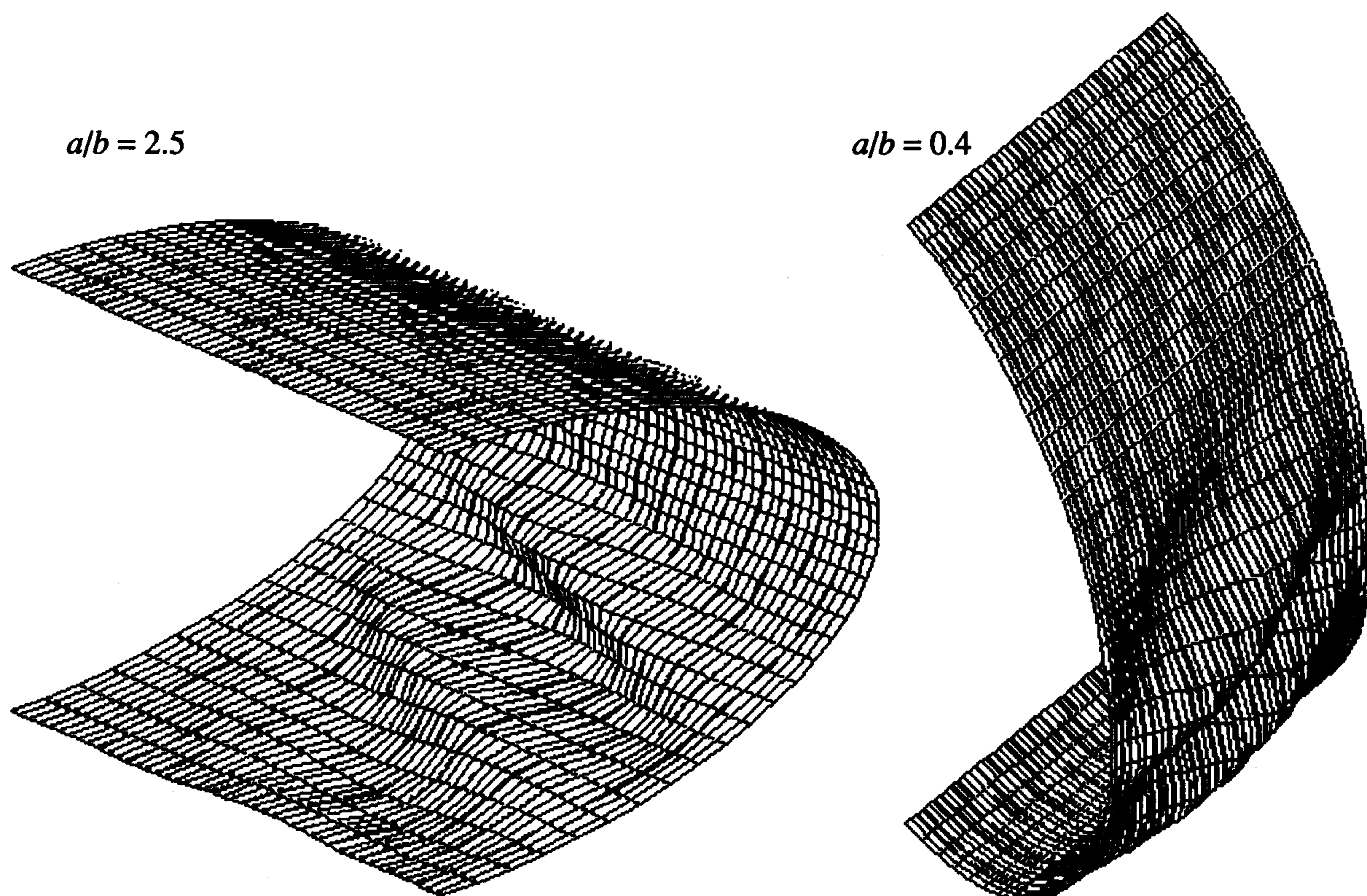
Численные исследования проводились в предположении симметричности деформирования относительно продольной плоскости сечения оболочек. В этом случае оболочки разрезались вдоль малой оси, на линии пересечения ставились граничные условия симметрии ($v = w_y = w_{xy} = 0$). Половина оболочки по длине разбивалась на 30, а по окружности на 60 конечных элементов.

На фиг. 2 при $h = 2.5, 5$ мм показаны зависимости параметра $k_\tau = Q^*/Q_0$ (Q^* – критическое значение поперечной силы, $Q_0 = \pi R_0 S_b$, $S_b = 0.78 C E h (h/R_0)^{5/4} (R_0/L)^{1/2}$ – верхнее критическое касательное усилие при кручении круговой цилиндрической оболочки радиуса R_0 , $C = 0.93$ – эмпирический коэффициент, от параметра эллиптичности a/b для линейного (штриховые кривые) и нелинейного (сплошные кривые) исходных напряженно-деформированных состояний и разных длин оболочек. С увеличением параметра эллиптичности значения k_τ сначала увеличиваются, достигая максимума, потом уменьшаются, что объясняется увеличением кривизны в области наибольших касательных усилий. Влияние нелинейности исходного состояния малó практически во всем диапазоне изменения a/b для всех длин и толщин оболочек.

На фиг. 3 показаны зависимости параметра k_τ от длины оболочки при разных значениях параметра a/b .



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 показаны зависимости параметра k_τ ($R_0 = 44 \text{ мм}$, $h = 0.05 \text{ мм}$) и результаты эксперимента [4] (светлые точки – потеря устойчивости оболочки, темные точки – потеря несущей способности оболочки). Видно, что значения критических нагрузок эллиптических оболочек ниже значения нагрузок круговых оболочек. Для эллиптических оболочек при $a/b < 1$ результаты расчетов ближе к экспериментальным зна-

a/b	$m \times n$							
	10 × 13	15 × 20	20 × 27	25 × 33	10 × 40	20 × 40	25 × 40	30 × 40
	$L/R_0 = 0.5$				$L/R_0 = 1$			
0.4	1.48	1.28	1.125	1.125	0.545	0.77	0.73	0.73
1	1.24	1.13	1.18	1.18	1.19	1.19	1.08	1.08
2.5	0.87	0.81	0.79	0.79				

чениям, показанным светлыми точками, а при $a/b > 1$ ближе к значениям, показанным темными точками.

На фиг. 5 представлены формы потери устойчивости оболочек с $L = 1100$ мм, $h = 2.5$ мм, $a/b = 2.5$ и $a/b = 0.4$. Видно, что высокие оболочки, как и круговые оболочки, теряют устойчивость преимущественно от действия касательных усилий с образованием трех наклонных складок на боковой поверхности, а сплюснутые оболочки теряют устойчивость от совместного действия сжимающих осевых усилий и касательных усилий с образованием одной-трех наклонных складок в нижней части оболочки. Этим, вероятно, и объясняется отмеченное соответствие расчетных и экспериментальных значений критической нагрузки.

Сходимость решения (значений k_r) по числу конечных элементов для оболочек с $R_0/h = 200$, $L/R_0 = 0.5, 1.0$ представлена в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978. 360 с.
2. Астрахарчик С.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 102–108.
3. Кабанов В.В., Астрахарчик С.В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае. Сб. науч. тр. / Красноярск: КИСИ, 1985. С. 75–83.
4. Коноплев Ю.Г., Саченков А.А. Теоретико-экспериментальный метод в задачах устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического сечения // Исследование по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ. Вып. 17. Ч. I. 1984. С. 135–152.

Новосибирск
e-mail: bsibnia@online.nsk.su.

Поступила в редакцию
18.IX.2002