

УДК 539.3

© 2003 г. Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын

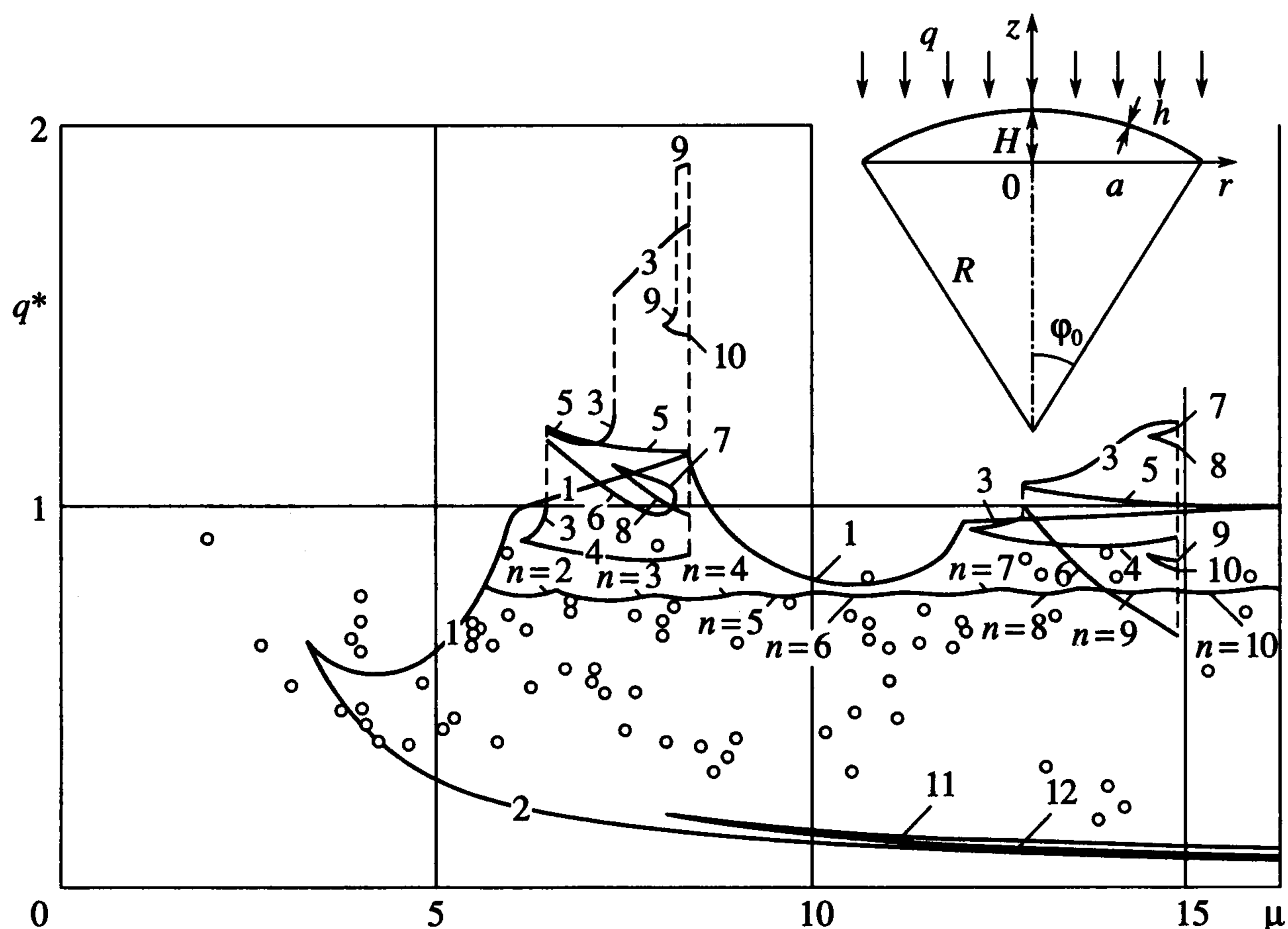
**НЕОСЕССИММЕТРИЧНОЕ ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ**

Рассматривается неосесимметричное закритическое поведение упругого, пологого сферического купола, жёстко заделанного по контуру и нагруженного равномерным поперечным давлением. Решение задачи строится методом Релея – Ритца на основе уравнений Маргерра с аппроксимацией перемещений рядом Фурье в окружном направлении и функциями Бесселя в радиальном. Получающаяся система нелинейных алгебраических уравнений решается методами продолжения. Впервые показано, что оболочка имеет закритические неосесимметричные состояния равновесия с нагрузками значительно меньшими как верхней критической нагрузки, так и нагрузок, соответствующих точкам бифуркации. Высказано предположение о том, что учёт форм этих состояний равновесия в качестве начальных неправильностей сферического купола должен позволить смоделировать разброс его экспериментально найденных критических нагрузок.

Основная цель решения задачи о закритическом поведении оболочек состоит в определении их равновесных состояний в условиях, при которых оболочка уже потеряла свою несущую способность. Эти состояния равновесия неустойчивы, в условиях эксплуатации конструкции они реализованы быть не могут. Однако знание полной картины поведения оболочки позволяет по-иному взглянуть на процесс ее деформирования и понять те его явления, которые с позиций идеализированных математических моделей оболочки остаются необъясненными. Примером этому может служить проблема рассогласования теоретических и экспериментальных данных по критическим нагрузкам для тонкостенных оболочек и, в частности, для пологих сферических куполов как наиболее подробно изученных в этом плане объектов.

История этой проблемы насчитывает почти 100 лет. Первым экспериментальным исследованием, в котором было обнаружено, что при некотором внешнем давлении сферическая оболочка оказывается неустойчивой, по-видимому, является работа Баха [1] 1902 г. Через 13 лет, в 1915 г., выходит в свет первая работа в области расчета тонких упругих сферических оболочек на устойчивость. Это диссертация Цолли [2]. В ней в линейной постановке была получена формула для наименьшего критического давления $q = 2E[3(1 - \nu^2)]^{-1/2}(h/R)^2$, где E – модуль Юнга материала оболочки, ν – его коэффициент Пуассона, h – толщина стенки оболочки, а R – ее радиус. В 1922 г. Шверином [3] была предпринята попытка уточнить приближенную формулу Цолли на основе точного аналитического решения линейных осесимметричных уравнений непологой сферической оболочки. Однако получилось так, что формула Цолли была подтверждена – расчеты по ней и по формулам Шверина дают различие в значениях наименьшей критической нагрузки только в третьем знаке. Значительно позднее, в 1939 г., Боллей и Секлер (см. [4]) провели тщательный эксперимент с медной полусферой и установили, что критическое давление в четыре раза меньше теоретического значения, соответствующего формуле Цолли.

Дальнейшее развитие исследований в этой области характеризуется, с одной стороны, постоянным увеличением экспериментально полученного материала о значениях критических нагрузок для разнообразных сферических оболочек, а с другой – нескончаемыми попытками подвести под них теоретическую базу. Для этого проводились расчеты по линейной теории, учитывалось моментное напряженно-деформированное состояние оболочки перед потерей



Фиг. 1

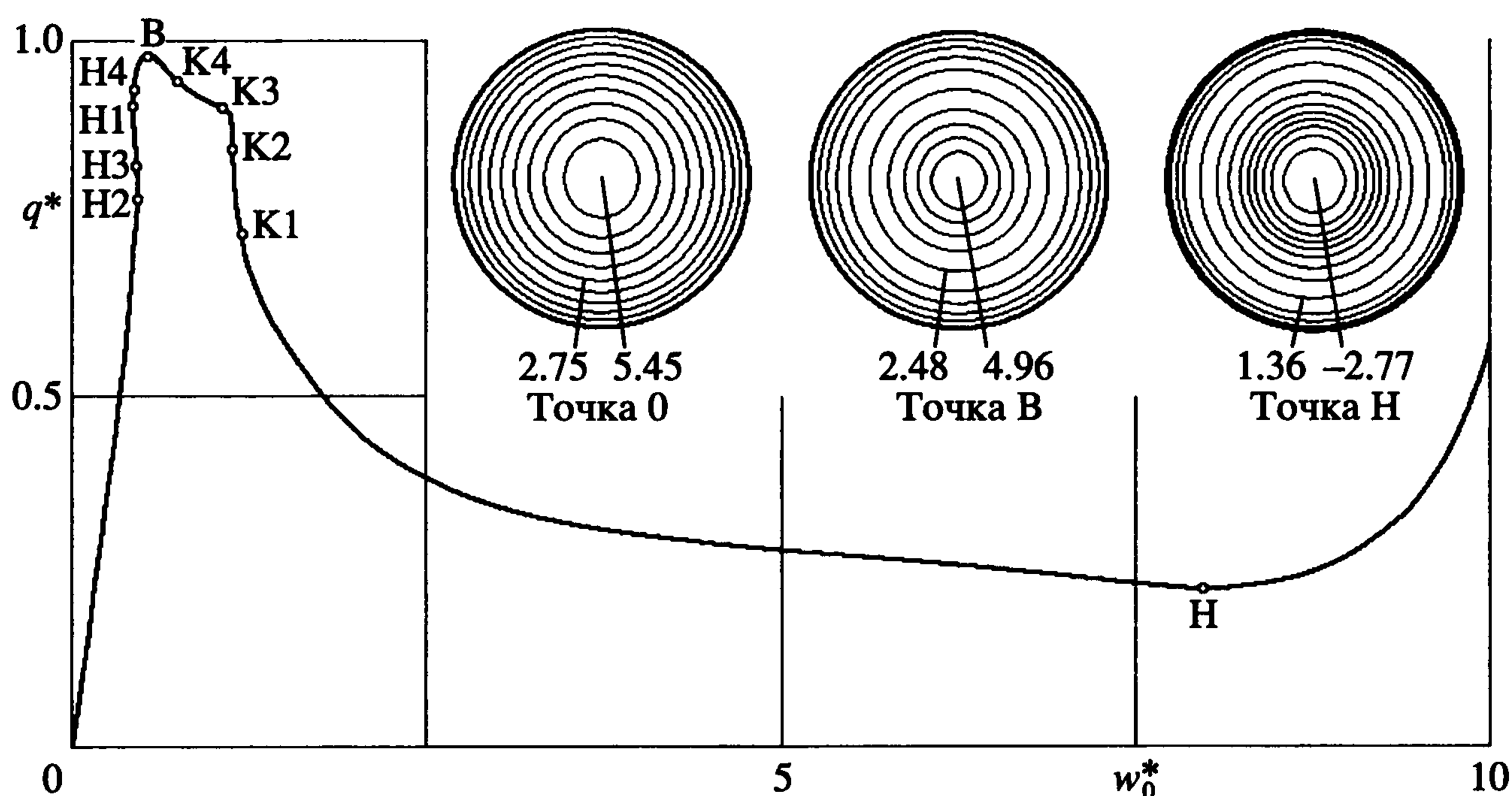
устойчивости, использовались геометрически нелинейные уравнения теории оболочек, рассматривались оболочки с начальными несовершенствами формы, контурных условий и способов нагружения, оболочки с возможностью упругопластического деформирования материала и т.д. Подробное обсуждение этого развития теории и практики расчетов сферических оболочек можно найти в книгах [5–7], а также обзорах [8–10] и монографии [11].

Сопоставление экспериментально и теоретически полученных значений критических нагрузок потери устойчивости тонкой, пологой сферической оболочки постоянной толщины, находящейся под действием равномерного поперечного давления, показано на фиг. 1. Здесь под $q^* = [3(1 - \nu^2)]^{1/2} q R^2 / (2 E h^2)$ понимается безразмерное поперечное давление, а под $\mu = [12(1 - \nu^2)]^{1/4} [a^2 / (R h)]^{1/2}$ – параметр тонкостенности оболочки. Сплошными линиями, отмеченными цифрами 1 и 2, показаны теоретически полученные зависимости верхней q_+^* и нижней q_-^* критических нагрузок осесимметрично деформирующегося сферического купола от его параметра тонкостенности. Они получены разными авторами посредством решения уравнений Маргерра и Рейсснера. Точками отмечены значения верхней критической нагрузки, которые взяты из экспериментальных работ различных исследователей (см. [11]).

Попытки уточнить значения верхней критической нагрузки пологого сферического купола посредством рассмотрения его осесимметричного закритического поведения представлены работами [12–14]. Некоторые результаты [14] отмечены на фиг. 2 числами от 3 до 12.

Видно, что введение в расчет малой начальной неправильности, пропорциональной прогибу купола, характерному для кривых 4 и 6, позволяет понизить его верхнюю критическую нагрузку, однако это понижение останется в рамках десятков процентов.

Первыми работами, в которых были рассмотрены конечные неосесимметричные прогибы пологого, жестко заделанного по контуру сферического купола, находящегося под действием равномерного давления, являются исследования [15, 16] 1960 г. Через два года после этого вышли в свет работы [17–19], где авторы привели результаты расчета неосесимметричных критических нагрузок для такого же купола. Однако достоверность этих результатов вызвала сомнения. Только в 1963 г. удалось получить достоверные значения неосесимметричных критических нагрузок [20], хотя и здесь автор оказался незастрахованным от ошибки. Было показано [21], что из-за упрощенного описания радиальных и окружных усилий он получил завышенную асимптотическую оценку наименьшего критического давления для тонкой оболоч-



Фиг. 2

ки с большим количеством волн по окружности, однако эта ошибка не повлияла на основные результаты, которые были получены численно. Кривая, показывающая величины наименьшей неосесимметричной критической нагрузки по [20], отмечена на фиг. 1 значениями $n = 2, 3, \dots, 10$, где n – количество волн по окружности купола, соответствующее этой нагрузке.

Приемлемый компромисс между расчетными и экспериментальными данными был найден группой японских авторов, которые при постановке экспериментов [22, 23] помимо прогибов оболочки и соответствующих им нагрузок измеряли начальный прогиб каждой ненагруженной оболочки, появившийся после ее закрепления на испытательном стенде и представлявший собой случайную неосесимметричную функцию координат точек поверхности оболочки. Эти данные о начальном прогибе оболочки использовались для расчета процесса изначально неосесимметричного деформирования оболочки с ее прощелкиванием и последующим полным выворачиванием [24, 25]. В результате была получена высокая степень согласованности теоретических и экспериментальных значений верхней критической нагрузки.

В связи с вышесказанным цель настоящей работы состоит в решении полной задачи о геометрически нелинейном деформировании пологого сферического купола с учетом возможности его неосесимметричной потери устойчивости и его неосесимметричным закритическим поведением и в нахождении тех форм начальной неправильности, с помощью которых можно было бы получить весь диапазон экспериментально найденных критических нагрузок.

1. Математическая модель купола. Среди существующих способов представления неосесимметричных деформаций пологого сферического купола конечных прогибов, который рассматривается в полярной системе координат r и θ , наиболее простым, проверенным и достаточно точным является способ, основанный на квадратичном законе описания деформаций

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{R} + \frac{\vartheta_r^2}{2}, \quad \kappa_{rr} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \vartheta_r \vartheta_\theta, \quad \kappa_{r\theta} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r} + \frac{\vartheta_\theta^2}{2}, \quad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

где e_{rr} , $e_{r\theta}$, $e_{\theta\theta}$, κ_{rr} , $\kappa_{r\theta}$ и $\kappa_{\theta\theta}$ – деформации и кривизны срединной поверхности купола, u и v – радиальные и окружные перемещения точек срединной поверхности купола,

w – прогиб, $\vartheta_r = -\partial w/\partial r$ и $\vartheta_\theta = -\partial w/(r\partial\theta)$ – углы поворота нормали к срединной поверхности купола в радиальном и окружном направлениях.

Эти деформационные соотношения с использованием закона Гука дают следующие выражения для потенциальной деформации купола и работы приложенного к нему поперечного давления:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ B \left[e_{rr}^2 + 2\nu e_{rr} e_{\theta\theta} + \frac{1-\nu}{2} e_{r\theta}^2 + e_{\theta\theta}^2 \right] + \right. \\ \left. + D [\kappa_{rr}^2 + 2\nu \kappa_{rr} \kappa_{\theta\theta} + (1-\nu) \kappa_{r\theta}^2 + \kappa_{\theta\theta}^2] \right\} r dr d\theta \quad (1.1)$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} q w r dr d\theta \quad (1.2)$$

Здесь $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость стенки купола, а $B = Eh/(1-\nu^2)$ – ее жесткость на растяжение–сжатие.

Потенциальная энергия деформации купола и работа приложенного к нему поперечного давления из вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta(\Pi - A) = 0 \quad (1.3)$$

позволяют получить уравнения равновесия Маргерра

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \nabla^2 w + \frac{Eh}{2} N_2(w, w) = 0 \quad (1.4)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 F - N_2(F, w) = -q; \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

и соответствующие граничные условия для случая жесткой заделки по контуру

$$u, v, w, \vartheta_r, N_{rr}, \dots, Q_r^0 \text{ – ограниченные функции при } r = 0$$

$$u = v = w = \vartheta_r = 0 \text{ при } r = a \quad (1.5)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, N_2 – нелинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$N_2(\xi, \zeta) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right)$$

F – силовая функция Эри, связанная с удельными нормальными и удельными сдвиговыми усилиями следующими соотношениями:

$$N_{rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right), \quad N_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right), \quad N_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

Q_r^0 – обобщенная радиальная удельная поперечная сила

$$Q_r^0 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + N_{rr} \vartheta_r + N_{r\theta} \vartheta_\theta$$

Одним из методов решения задачи о конечных прогибах пологого сферического купола является метод Релея – Ритца. Для его реализации перемещения точек срединной поверхности купола представляются функциональными суммами

$$\begin{aligned}
 u^* &= \sum_{i=1}^{K_o} U_{oi} u_{oi}(\rho) + \sum_{i=1}^{K_a} U_{ai} u_{ai}(\rho) \cos(n_i \theta) \\
 v^* &= \sum_{i=1}^{K_a} V_{ai} v_{ai}(\rho) \sin(n_i \theta) \\
 w^* &= \sum_{i=1}^{K_o} W_{oi} w_{oi}(\rho) + \sum_{i=1}^{K_a} W_{ai} w_{ai}(\rho) \cos(n_i \theta); \quad \rho = \frac{r}{a}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

где слагаемые с индексом o – осесимметричные составляющие решения, с индексом a – неосесимметричные, номера неосесимметричных гармоник n_i задаются заранее, U_{oi} , U_{ai} , V_{ai} , W_{oi} и W_{ai} – искомые обобщенные перемещения, а базисные функции $u_{oi}(\rho)$, $u_{ai}(\rho)$, $v_{ai}(\rho)$, $w_{oi}(\rho)$ и $w_{ai}(\rho)$, исходя из структуры уравнений равновесия купола (1.4) и граничных условий (1.5) задачи, представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_{oi}(\rho) &= A_{oi} J_1(v_{oi} \rho), \quad i = \overline{1, K_o} \\
 w_{oi}(\rho) &= C_{oi} [J_0(\omega_{oi} \rho) - b_{oi} I_0(\omega_{oi} \rho)], \quad i = \overline{1, K_o} \\
 u_{ai}(\rho) &= A_{ai} J_{n_i+1}(v_{ai} \rho), \quad i = \overline{1, K_a} \\
 v_{ai}(\rho) &= B_{ai} J_{n_i+1}(\mu_{ai} \rho), \quad i = \overline{1, K_a} \\
 w_{ai}(\rho) &= C_{ai} [J_{n_i}(\omega_{ai} \rho) - b_{ai} I_{n_i}(\omega_{ai} \rho)], \quad i = \overline{1, K_a}
 \end{aligned}$$

Здесь J_{n_i} и J_{n_i+1} – функции Бесселя первого рода n_i -го и $(n_i + 1)$ -го порядка, I_{n_i} – модифицированная функция Бесселя первого рода n_i -го порядка, а постоянные A_{oi} , C_{oi} , b_{oi} , A_{ai} , B_{ai} , C_{ai} и b_{ai} и коэффициенты v_{oi} , ω_{oi} , v_{ai} , μ_{ai} и ω_{ai} определяются из граничных условий.

С перемещениями купола в виде (1.6) потенциальная энергия деформации пологого сферического купола (1.1) и работа внешней нагрузки (1.2), после выполнения операций интегрирования, записывается в виде конечных сумм, аргументы которых – обобщенные перемещения купола U_{oi} , U_{ai} , V_{ai} , W_{oi} и W_{ai} .

Дальнейшая реализация метода Релея – Ритца позволяет получить уравнения равновесия оболочки относительно обобщенных перемещений. Для этого потенциальная энергия деформации Π и работа внешней нагрузки A в виде конечных сумм подставляется в уравнение Лагранжа (1.3) откуда получается система нелинейных алгебраических уравнений, имеющая в матричной форме вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0
 \tag{1.7}$$

Под вектором $\mathbf{f} = (F_1 \ F_2 \ \dots \ F_{N_{\max}})^T$ имеется в виду вектор, составленный из частных производных полной потенциальной энергии деформации оболочки $\mathcal{E} = \Pi - A$ по перемещениям U_{oi} , W_{oi} ($i = \overline{1, K_o}$) и U_{ai} , V_{ai} , W_{ai} ($i = \overline{1, K_a}$). Вектор \mathbf{x} в соответствии с

идеей о равноправии переменных решения составлен из обобщенных перемещений, к числу которых добавлена безразмерная поперечная нагрузка,

$$\mathbf{x} = (U_{o1}, W_{o1}, U_{o2}, W_{o2}, \dots, U_{oK_o}, W_{oK_o}, \\ U_{a1}, V_{a1}, W_{a1}, U_{a2}, V_{a2}, W_{a2}, \dots, U_{aK_a}, V_{aK_a}, W_{aK_a}, q^*)^T$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (1.7), порядок которой с этого места для упрощения письма считается равным n , строится методом непрерывного продолжения, основу которого составляет численное решение соответствующей ей задачи Коши с нулевыми начальными условиями, описывающими ненагруженное состояние оболочки.

Для этого вдали от точек бифуркации, аналогично описанному ранее методу [26], на каждом шаге по параметру λ , близкому к длине траектории нагружения, решается система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (1.8)$$

где \mathbf{J} – расширенный и дополненный якобиан системы нелинейных алгебраических уравнений (1.7), \mathbf{q} – вектор продолжения решения \mathbf{x} , а \mathbf{b} – вектор правых частей системы уравнений продолжения:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,n} & F_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n} & F_{n,n+1} \\ F_{1,n+1} & \dots & F_{n,n+1} & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{vmatrix}$$

Элементы якобиана \mathbf{J} подсчитываются как частные производные левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (1.7) по аргументам решения, в число которых включена безразмерная нагрузка q^* . Параметр ε системы (1.8) выбирается из условия наилучшей возможной обусловленности якобиана этой системы, а параметр b – из условия близости вектора продолжения решения \mathbf{q} к нормированному: $\|\mathbf{q}\| = 1$. В результате вектор \mathbf{q} , являющийся с геометрической точки зрения касательным вектором к траектории нагружения, представляет собой вектор правых частей нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/d\lambda = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

численное решение которой дает координаты точек траектории нагружения оболочки.

Для компенсации погрешностей в определении вектора \mathbf{x} , накапливающихся в процессе численного решения системы уравнений продолжения (1.8), вдали от точек бифуркации используется метод дискретного продолжения [27]. Его основа – метод Ньютона, реализованный для расширенного пространства переменных. Каждая итерация метода Ньютона в соответствии с описанным ранее подходом [27] организуется посредством решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}_o \quad (1.10)$$

где $\Delta\mathbf{x}$ – вектор невязок решения, а \mathbf{f}_o – расширенный вектор левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (1.7):

$$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n+1})^T, \quad \mathbf{f}_o = (F_1, F_2, \dots, F_n, 0)^T$$

В окрестности точек бифуркации система линейных алгебраических уравнений (1.7) является плохо обусловленной, а в самой точке бифуркации – вырожденной. Вычислить вектор продолжения \mathbf{q} и получить решение системы дифференциальных уравнений (1.9) нельзя. Поэтому в этой ситуации применяется модификация метода продолжения [28]. Она заключается в том, что вектор продолжения \mathbf{q} – вектор правых частей системы (1.9), в окрестности точки бифуркации и в ней самой ищется как линейная комбинация собственных векторов алгебраической задачи на собственные значения

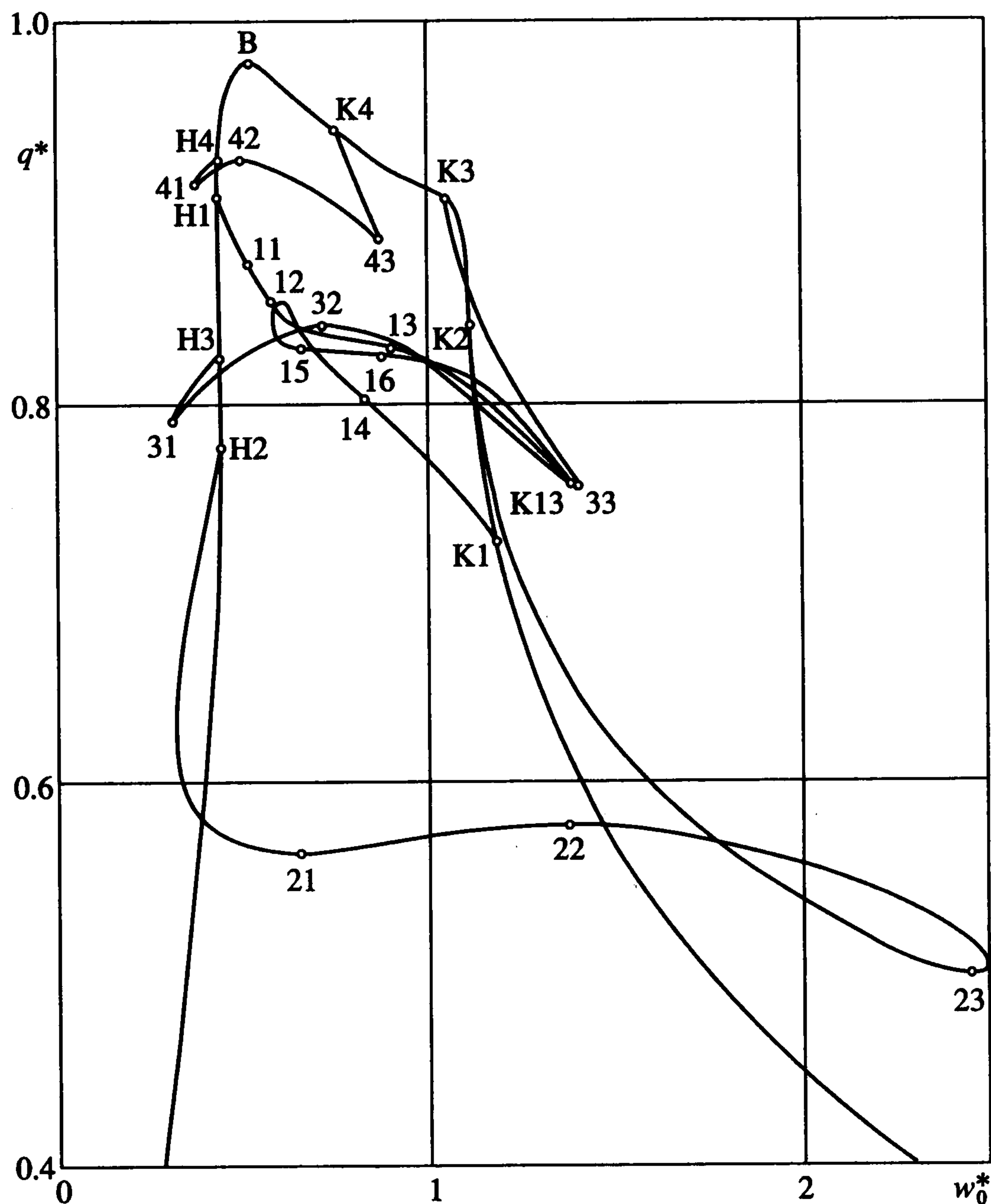
$$\mathbf{J}\mathbf{q} = \omega\mathbf{q} \quad (1.11)$$

Было показано [28], что собственные векторы этой задачи, имеющие нулевую $(n + 1)$ -ю составляющую, являются бифуркационными и с их помощью можно продолжить решение из точки бифуркации по любой выбранной ветви. Остальные собственные векторы отвечают за формирование вектора продолжения по основной ветви траектории нагружения и процесс продолжения решения опять сводится к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (1.9).

Уточнение решения в окрестности точек бифуркации, как и его продолжение, производится по особому алгоритму [29]. Он построен на решении задачи на собственные значения (1.11). С помощью ее собственных векторов в зависимости от того, где производится уточнение: на основной ветви траектории нагружения или на бифуркационной, на каждой итерации метода Ньютона по определенной методике строится уточняющий решение вектор невязок $\Delta\mathbf{x}$.

2. Анализ закритического поведения купола. Идеальный пологий сферический купол является осесимметричной оболочкой. Его нагружение осесимметричной нагрузкой – равномерным поперечным давлением, вызывает в нём осесимметричные деформации. Осесимметричная траектория нагружения упругого купола с параметром тонкостенности $\mu = 6$, что может соответствовать куполу с $R/h = 100$, $\varphi_0 = 19^\circ$ и $\nu = 0.3$, равномерным поперечным давлением показана на фиг. 2. На ней присутствует линейный участок и участок нелинейного деформирования, на котором есть две предельные точки: точка В и точка Н. Эти точки разделяют осесимметричную траекторию нагружения на устойчивые и неустойчивый участки. Участки 0В и справа от точки Н являются геометрическим местом точек, соответствующих устойчивым состояниям равновесия купола, а участок ВН – его неустойчивым состояниям равновесия. Исходная форма недеформированного купола (точка 0) и формы деформированной поверхности купола в точках В и Н показаны в правой верхней части фиг. 2 (здесь и всюду далее внешняя окружность соответствует нулевой безразмерной аппликате купола $z^* = z/h = 0$). В точке В купол теряет устойчивость прощелкиванием. Ордината этой точки определяет верхнюю критическую нагрузку. В этой точке купол имеет состояние безразличного равновесия и при малейшем увеличении нагрузки хлопком переходит в новое устойчивое состояние, описываемое точкой, находящейся на траектории нагружения справа от точки Н и имеющей ту же ординату, что точка В. Если купол под действием нагрузки прощёлкнул и находится в устойчивом состоянии равновесия, описываемом точками справа от точки Н, то по мере снятия нагрузки точка, соответствующая состоянию равновесия купола, будет “опускаться” по траектории нагружения к точке Н. Ордината этой точки определяет нижнюю критическую нагрузку купола. В ней купол опять приобретёт состояние безразличного равновесия и при дальнейшем уменьшении нагрузки выщёлкнет и вернётся к форме, близкой к первоначальной – ненагруженной, описываемой точкой на участке 0В траектории нагружения с ординатой, равной ординате точки Н.

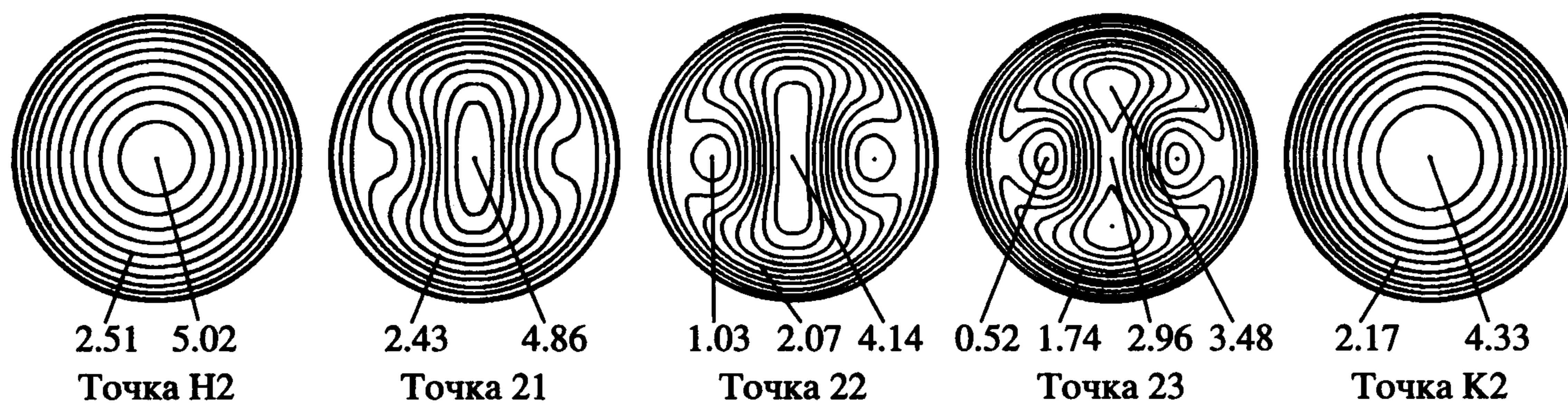
Присутствие на траектории нагружения купола точек бифуркации Н1, ..., Н4, К1, ..., К4 (фиг. 2) говорит о том, что при действии осесимметричной нагрузки он может деформироваться неосесимметрично. Во всех этих точках купол имеет осесимметрич-



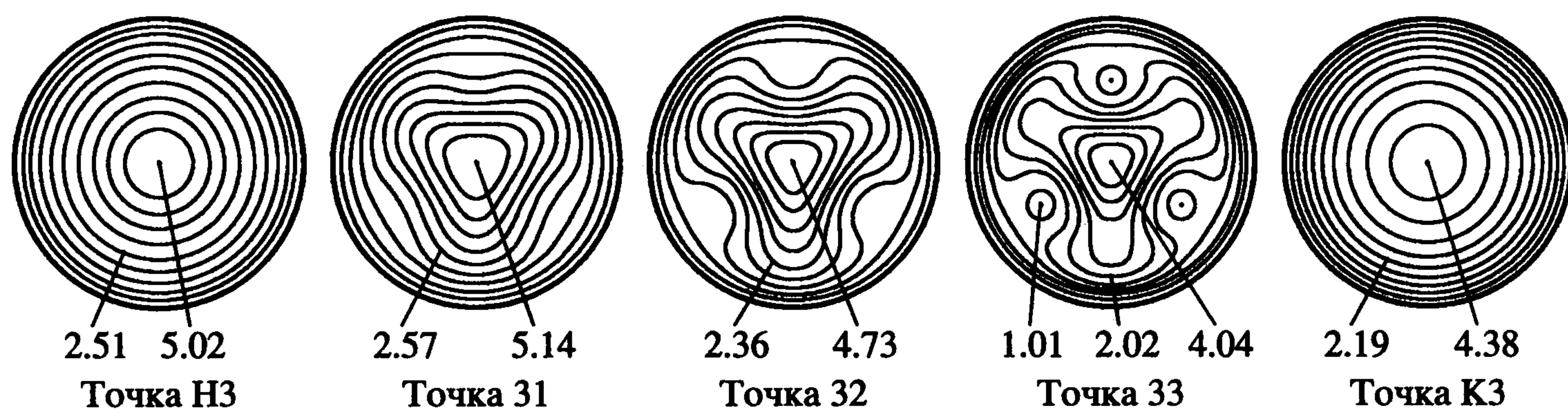
Фиг. 3

ные состояния безразличного равновесия. В точках $H1, \dots, H4$ происходит эйлерова потеря устойчивости купола с образованием одной, двух, трёх или четырёх волн по окружности соответственно. Наличие аналогичных точек $K1, \dots, K4$ на неустойчивом участке траектории BH говорит о том, что в них наряду с неустойчивым осесимметричным напряжённо-деформированным состоянием (НДС) оболочке присуще также неустойчивые неосесимметричные НДС с одной, двумя, тремя и четырьмя волнами по окружности соответственно.

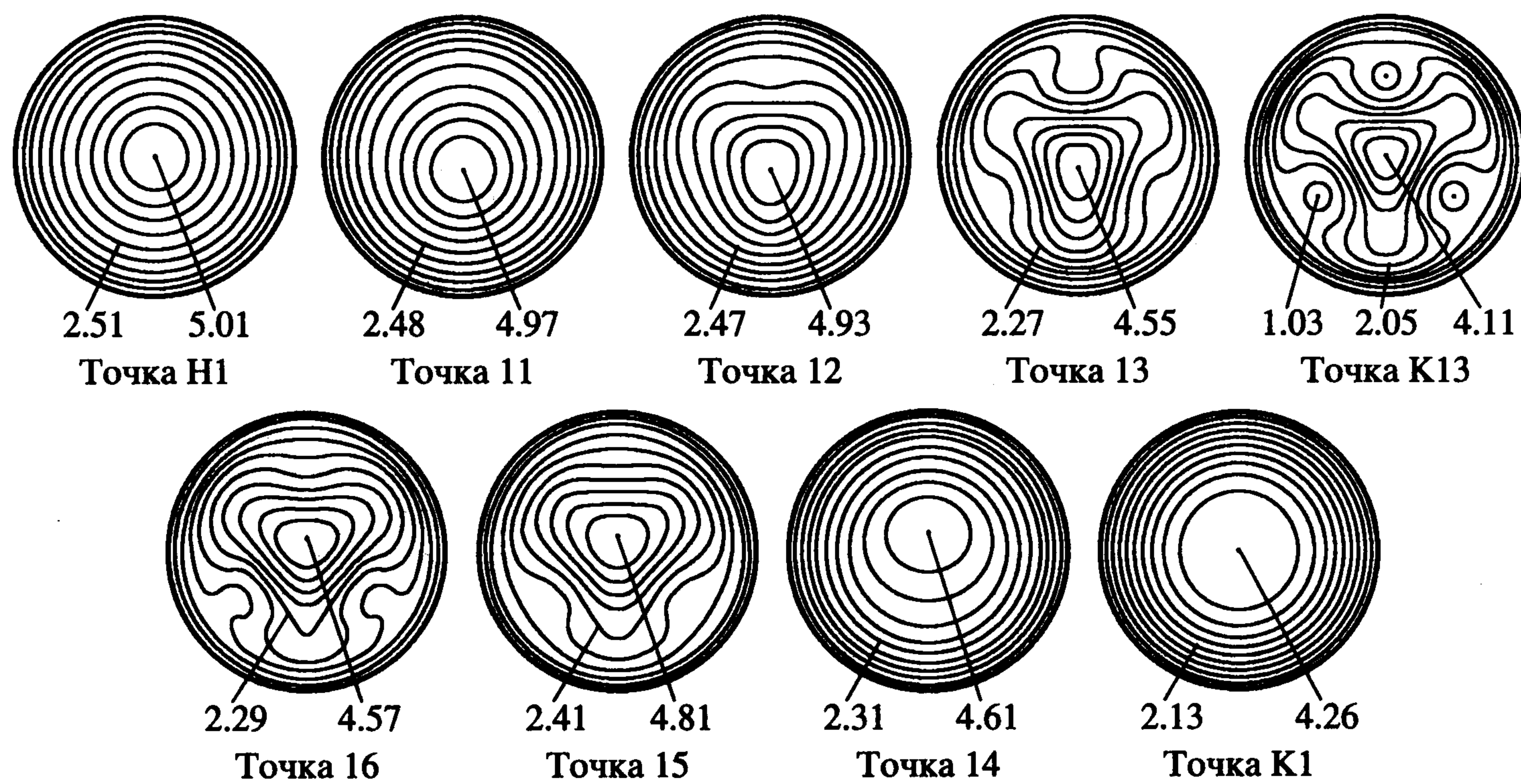
Из этих точек выходят бифуркационные ветви траектории нагружения, которые являются геометрическим местом точек неустойчивых неосесимметричных состояний равновесия купола. Эти ветви показаны на фиг. 3. Каждая из них, за исключением ветви, соответствующей состояниям равновесия с одной волной по окружности, начинается в точках $H2, H3$ и $H4$ и заканчивается в точках $K2, K3$ и $K4$. Бифуркационная ветвь, описывающая НДС с одной волной по окружности, состоит из двух частей, каждая из которых начинается на осесимметричной части траектории нагружения в точках $H1$ и $K1$ и заканчивается в точке $K13$ на бифуркационной ветви, соединяющей точки $H3$ и $K3$. Формы деформированной поверхности купола в точках бифуркационных ветвей траектории нагружения показаны на фиг. 4–7.



Фиг. 4

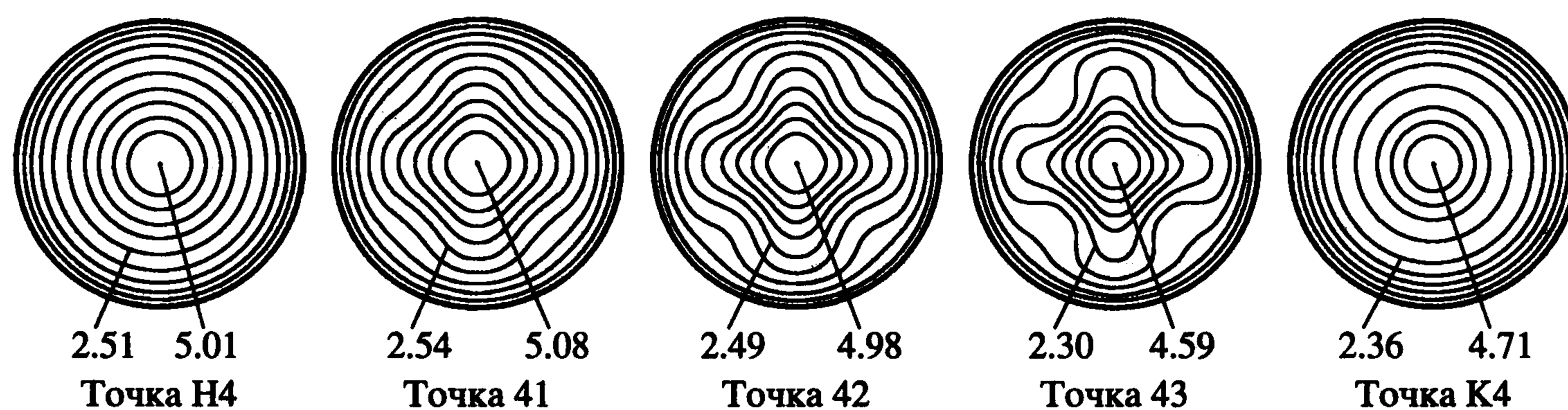


Фиг. 5



Фиг. 6

При выходе из каждой точки бифуркации на устойчивом участке осесимметричной траектории нагружения OB на осесимметричные деформации купола накладываются неосесимметричные, которые по мере удаления от точки бифуркации приобретают всё более заметный характер. Однако при приближении к точкам бифуркации на неустойчивом участке осесимметричной траектории нагружения BH неосесимметричные составляющие деформирования исчезают, и в самой точке бифуркации форма купола становится осесимметричной. Это справедливо для всех би-



Фиг. 7

фуркационных ветвей, кроме ветвей, выходящих из точек Н1 и К1. При выходе из этих точек у купола появляются неосесимметричные составляющие с одной волной по окружности. Однако при значениях прогиба в полюсе купола 0.6...0.7 толщин на неосесимметричные составляющие с одной волной по окружности начинают накладываться составляющие с тремя волнами, и бифуркационные ветви вместо того чтобы соединиться, поворачивают в сторону неустойчивого участка осесимметричной траектории. При этом неосесимметричные составляющие с тремя волнами по окружности приобретают определяющий характер, подавляя неосесимметричные составляющие с одной волной. В результате при подходе к точке бифуркации К13 купол имеет форму, которая характерна для ветви с тремя волнами по окружности (фиг. 5).

Картина деформирования пологого сферического купола, показанная на фиг. 3, присуща только оболочке идеальной формы. Реальная сферическая оболочка обязательно имеет малые отклонения от идеальной сферической формы. Поэтому при нагружении равномерной поперечной нагрузкой купол с самого начала будет деформироваться неосесимметрично в соответствии с тем, какая составляющая начальной неправильности у него преобладает. Он будет терять устойчивость прощелкиванием, как это было показано в работах [22–25], где наблюдалось максимальное неосесимметричное отклонение формы сферической оболочки от идеальной не больше 7% от её толщины, а осесимметричное – не более 20%. Верхняя критическая нагрузка такого прощелкивания будет определяться значениями нагрузки, характерной для предельных точек бифуркационных ветвей идеальной оболочки. Она будет несколько меньше этих значений, которые для рассматриваемого пологого купола лежат в диапазоне от 0.5 до 0.9 (см. фиг. 3). В зависимости от характера и величины начальной неправильности купола его критическая нагрузка должна принимать значения из диапазона с нижней границей меньшей, чем 0.5. Это предположение вполне согласуется с данными экспериментальных исследований, которые показаны на фиг. 1. В частности, для параметра тонкостенности $\mu = 6$ экспериментально найденные значения критических нагрузок пологого сферического купола лежат в диапазоне от 0.37 до 0.88.

3. Точность определения критических нагрузок. Анализ выбранной расчетной схемы и результаты исследования погрешности расчетов позволяют утверждать, что данное решение задачи о геометрически нелинейном деформировании пологого, упругого сферического купола получено с относительной погрешностью, которая не превышает 5%.

На самом деле, в условиях упругого деформирования купола уравнения Маргерра для пологих оболочек конечного прогиба считаются достаточно точными. Источниками погрешности в них являются предположение об упругости деформирования оболочки, квадратичный закон представления деформаций и предположение о пологости оболочки. Однако по существующим оценкам для оболочек с углом рас-

крытия не более 22° , имеющих прогибы меньше десяти толщин, погрешность определения такой интегральной характеристики оболочки, как ее критическая нагрузка, не превышает 5%. Погрешности методов решения системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия (1.7): методов Гаусса, Ньютона, Якоби и Кутта–Мерсона контролировались на каждом шаге расчетов и не превышали по относительной величине 10^{-5} , что существенно меньше погрешности математической модели. Это же относится и к погрешности применения метода Релея – Ритца, которая определялась численно посредством расчетов с различным количеством членов в аппроксимирующих перемещения суммах (1.6). Они показали, что для вычисления критических нагрузок купола с точностью до трех значащих цифр в суммах (1.6) достаточно учесть шесть слагаемых осесимметричного решения, пять слагаемых с $\cos\theta$, пять – с $\cos 2\theta$, три – с $\cos 3\theta$ и три – с $\cos 4\theta$.

4. Заключение. Представленный анализ процесса неосесимметричного закритического деформирования пологого сферического купола позволяет предположить, что наблюдаемый разброс экспериментальных значений его критических нагрузок обусловлен в первую очередь наличием у него осесимметричных и неосесимметричных начальных неправильностей формы и определяется, скорее всего, не величиной этих отклонений, а их видом. Величина критической нагрузки должна зависеть от того, какая составляющая начальной неправильности купола из числа найденных его форм закритических неустойчивых состояний равновесия у него преобладает. Поэтому введение в расчёт процесса деформирования купола малых начальных неправильностей в виде его форм неосесимметричного закритического равновесия должно позволить смоделировать наблюдаемый в экспериментах разброс значений критической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bach C.* Die Widerstandfähigkeit kugelförmiger Wandungen gegenüber äusserem über Druck // Z. Vereines deutscher Ingenieure. 1902. В. 46. Н. 10. S. 333–341.
2. *Zölly R.* Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Promotionsarbeit. Zürich: Technische Hochschule, 1915. 84 S.
3. *Schwerin E.* Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Außendruck // ZAMM. 1922. В. 2. Н. 2. S. 81–91.
4. *Karman Th., Tsien S.* The buckling of spherical shells by external pressure // J. Aeronaut. Sci. 1939. V. 7. № 2. P. 43–50.
5. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. N.Y.: McGraw-Hill, 1959 = Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
6. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
7. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
8. *Karman Th., Kerr A.D.* Instability of spherical shells subjected to external pressure // Topics Appl. Mech. Amsterdam, etc.: 1965. P. 1–22.
9. *Сунагава Мэгуми, Кумаи Нори.* Сопротивление элементов конструкций динамическому нагружению // J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1970. V. 18. № 195. P. 154–166.
10. *Ворович И.И., Минакова Н.И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 7. С. 5–86.
11. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Механика деформирования сферических оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1983. 114 с.
12. *Mescall J.* Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution // AIAA J. 1966. V. 4. № 11. P. 2041–2043.

13. Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 109–119.
14. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 621–634.
15. Григолюк Э.И. Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 68–73.
16. Grigoljuk E.I. On the unsymmetrical snapping of shell of revolution // Proc. IUTAM Sympos. on the Theory of Thin Elastic Shells. Delft, 1959. Amsterdam: North-Holland, 1960. P. 112–121.
17. Weinitschke H.J. Asymmetric buckling of clamped shallow spherical shell // NASA Techn. Notes. 1962. № D-1510. P. 481–490.
18. Gjelsvik A., Bodner S.R. Nonsymmetrical snap buckling of spherical caps // J. Engng. Mech. Div. 1962. V. 88. № 5. P. 135–167.
19. Parmeter R.R., Fung Y.C. On the influence of nonsymmetrical modes on the buckling of shallow spherical shells under uniform pressure // NASA Techn. Notes. 1962. № D-1510. P. 491–502.
20. Huang N.-C. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // AIAA J. 1963. V. 1. № 4. P. 945; Trans. ASME, Ser. E. 1964. V. 31. № 3. P. 447–457.
21. Григолюк Э.И., Липовцев Ю.В. Локальная устойчивость упругих оболочек вращения // МТТ. Инж. ж. 1968. № 6. С. 134–138.
22. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experiments on the buckling of clamped shallow spherical shells under external pressure // Technol. Repts Tohoku Univ. 1980. V. 45. № 2. P. 205–228.
23. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experimental investigation of the buckling of shallow spherical shells // J. Non-Linear Mech. 1983. V. 18. № 1. P. 37–54.
24. Yamada M., Yamada S. Agreement between theory and experiment on large-deflection behaviour of clamped shallow spherical shells under external pressure // Collapse / Ed. J.M.T. Tompson and J.W. Hant. Cambridge: Univ. Press, 1983. P. 431–441.
25. Uchiyama M., Yamada S. Nonlinear buckling simulations of imperfect shell domes using a hybrid finite element formulation and the agreement with experiments // Computation. Methods Shell and Spatial Structures / Eds. M. Papadrakakis et al. ISASR-NTUA: Athens, IASS-IACM. 2000. 14 p.
26. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. О методе непрерывного продолжения по параметру // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 5. С. 582–585.
27. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Об одной модификации метода дискретного продолжения по параметру // ПМТФ. 1990. № 5. С. 95–99.
28. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Продолжение решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации // Математичні методи та фіз.-мех. поля. 1998. Т. 41. № 1. С. 35–46.
29. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Уточнение решения нелинейных уравнений в окрестности точки бифуркации // Пространства жизни. К 85-летию Б.В. Раушенбаха. М.: Наука, 1999. С. 192–199.