

УДК 517.93:531/539

© 2003 г. А. Н. Данилин, Е. Б. Кузнецов, В. И. Шалашилин

**О НЕЯВНЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Показано, что при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенных относительно старшей производной, возможно построение простых и экономичных неявных вычислительных алгоритмов пошагового интегрирования без организации трудоемких итерационных процедур, основанных на процессах по типу итераций Ньютона-Рафсона. Предварительно исходная задача должна быть преобразована к новому аргументу – длине ее интегральной кривой. Такое преобразование осуществляется с использованием уравнения, связывающего исходный параметр задачи с длиной интегральной кривой. На примере метода линейного ускорения показана процедура построения неявного алгоритма с использованием простых итераций для численного решения преобразованной задачи Коши. Сформулированы и доказаны предложения о вычислительных свойствах итерационного процесса. Даны явные оценки шага интегрирования, обеспечивающие сходимость простых итераций. Эффективность предложенной методологии продемонстрирована на численном решении трех задач. Для них дан сравнительный анализ численных решений, полученных с использованием и без использования параметризации исходных задач. В качестве тестовой рассмотрена задача небесной механики “Плеяды”. Второй пример посвящен моделированию нелинейной динамики упругого гибкого стержня, консольно закрепленного на одном конце и в начальном (статическом) состоянии свернутого в кольцо изгибающим моментом. Третий пример демонстрирует численное решение задачи о разворачивании механической системы, состоящей из трех гибких стержней при заданных управляющих воздействиях.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старшей производной

$$\ddot{u} = f(t, u, \dot{u}), \quad u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = v_0 \quad (1.1)$$

Здесь  $u(t)$  – неизвестная вектор-функция, описывающая перемещение точки в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, вектор-функция  $f = f(t, u, v)$ , действующая как оператор  $f: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , представляет собой ускорение точки в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящее от времени  $t \in \mathbb{R}$ , перемещения и скорости  $v = \dot{u}$ .

Математическое моделирование многих физических явлений сводится к системе уравнений (1.1). В частности к уравнениям (1.1) приводят прикладные проблемы, связанные с моделированием динамических процессов в конструкциях и сплошных средах (см., например, [1–6]).

Будем полагать, что функция  $f \in C^2(D)$ , где  $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  – некоторая область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Тогда, как известно [7, 8], в области  $D$  существует единственное решение задачи Коши при заданных начальных значениях  $y_0 = [u_0, v_0, t_0]^T \in D$ . Таким образом, при сформулированных условиях через любую точку области  $D$  проходит единственная гладкая интегральная кривая (ИК)  $y(t) = [u(t), v(t), t]^T$ , удовлетворяющая системе уравнений (1.1), и решение задачи (1.1) сводится к построению в области  $D$  ИК, проходящей через точку  $y_0$ .

Обозначим скалярное произведение функций  $f, g$  и норму функции  $f$  из некоторого евклидова пространства соответственно как  $fg$  и  $\|f\| = \sqrt{ff}$ .

Цель данной работы – изучение системы уравнений (1.1) с позиции метода продолжения решения по параметру [9] и построение для нее эффективных неявных вычислительных схем решения при некоторой дополнительной замене переменных, называемой наилучшей параметризацией (см. [10–15]).

**2. Параметризация уравнений.** Введем в области  $D$  вещественную гладкую функцию  $\lambda = \lambda(y) = \lambda(u, v, t) \in C^3(D)$  и произведем замену независимой переменной  $t$  на параметр  $\lambda$ . При этом важное значение имеет дифференциальная характеристика  $J$  функции  $\lambda$  – ее полная производная по времени вдоль ИК:  $J(y) = J(u, v, t) = \dot{\lambda}[y(t)]$ . Будем полагать, что  $J(y) \neq 0$  в области  $D$ . Тогда функция параметра может быть восстановлена вдоль некоторой ИК по ее дифференциальной характеристике в виде определенного интеграла

$$\lambda(y) = \lambda_0 + \int_{t_0}^t J[y(t)] dt$$

Переход к параметру  $\lambda$  позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений (1.1) к автономной системе первого порядка в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$y' = F(y), \quad y(\lambda_0) = y_0, \quad F = J^{-1}[v, f, 1]^T \in C^2(D) \quad (2.1)$$

Штрих означает полную производную по параметру  $\lambda$ .

Функция  $J$  имеет смысл дифференциального нормирующего множителя при переходе от времени  $t$  к параметру  $\lambda$ . В частности, если  $J \equiv 1$ , то  $\lambda = t + (\lambda_0 - t_0)$ . С помощью параметризации можно улучшить метрические свойства правой части уравнения (2.1). Было показано [9–14], что оптимальное улучшение (т.е., наилучшая параметризация) достигается в случае, когда в качестве  $\lambda$  выбирается длина ИК в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Этому соответствует следующее уравнение в дифференциальной форме:

$$d\lambda^2 = dt^2 + dudv + dvdu \quad (2.2)$$

или уравнение для нормирующего множителя

$$J(y) = \sqrt{1 + vv + f(y)f(y)} \quad (2.3)$$

Очевидно, что

$$J^{-1}(y) = t'$$

Из формул (2.1)–(2.3) следует, что при наилучшей параметризации выполняется важное свойство для нормы правой части уравнения (2.1): в области  $D$  норма правой части равна единице. Переход к аргументу  $\lambda$  обеспечивает также наилучшую обусловленность линеаризованных систем уравнений, получающихся при реализации пошаговых процедур численного построения ИК задачи (1.1) методом продолжения

решения по параметру, и в этом смысле переход к аргументу  $\lambda$  назван наилучшей параметризацией, а аргумент  $\lambda$  – наилучшим.

**3. Численная схема решения задачи Коши.** Для решения задачи (1.1) или (2.1) могут применяться различные приближенные численные схемы интегрирования систем дифференциальных уравнений [16–18], например методы Рунге-Кутты, Адамса-Моултона, Милна и др. Среди них отметим методы второго и третьего порядков точности, которые как правило приводят к неявным схемам интегрирования, например методы центральных разностей, Хоболта, Ньюмарка, Вилсона [2–4]. На практике широкое распространение для решения задач динамики получил метод Вилсона, представляющий собой некоторую модификацию метода линейного ускорения, в котором при интегрировании уравнения (1.1) ускорение  $\ddot{u}$  заменяется кусочно-линейной функцией на малом интервале времени (шаге интегрирования). Следовательно, скорость  $v = \dot{u}$  и само перемещение  $u$  приближаются соответственно сплайнами второго и третьего порядка.

Рассмотрим обобщение метода линейного ускорения на систему уравнений (2.1), параметризованную наилучшим образом [15, 19]. Для этого представим неизвестный вектор  $y$  в виде  $y = [u, x]^T$ , где  $x = [v, t]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ , т.е. выделим из  $y$  вектор  $x$ , по которому однозначно восстанавливается ускорение  $\ddot{u} = Jv'$ . Соответственно этому представим правую часть уравнения (2.1) в виде  $F = J^{-1}[v, g]^T$ , где  $g = [f, 1]^T$ .

Из соотношений (2.2), (2.3) следует равенство  $J^2 + u'u' + v'v' = 1$ , откуда, с учетом формулы  $v' = J^{-1}f$ , получаем  $J^{-1} = \sqrt{1 - u'u'} / \sqrt{1 + ff}$ . Последнее выражение позволяет переписать систему (2.1) в виде системы дифференциальных уравнений

$$u' = J^{-1}v \tag{3.1}$$

$$x' = J^{-1}g = \sqrt{1 - u'u'}e(u, x) \tag{3.2}$$

где  $e(u, x) = g / \sqrt{1 + ff} = g / \|g\|$  – единичный вектор в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , коллинеарный вектору  $g$ . В дальнейшем будем использовать первое равенство (3.2) в виде

$$x' = \hat{g} \tag{3.3}$$

где  $\hat{g} = J^{-1}g = [\hat{f}, J^{-1}]^T$ ,  $\hat{f} = J^{-1}f$ .

Разобьем область изменения параметра интегрирования  $\lambda$  на интервалы точками  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  и приблизим переменную  $x'$  (в параметризованном виде) на каждом интервале  $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$  линейной функцией

$$x'(\lambda) = x'_n + \frac{\tau}{\Delta\lambda_n}(x'_{n+1} - x'_n) \tag{3.4}$$

Здесь  $\tau = \lambda - \lambda_n$ ,  $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ .

Проинтегрируем равенство (3.4) по параметру  $\tau$ . Учитывая представление  $x = [v, t]^T$ , получим

$$v(\lambda_n + \tau) = v_n + \tau v'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n}(v'_{n+1} - v'_n) \tag{3.5}$$

$$t(\lambda_n + \tau) = t_n + \tau t'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n}(t'_{n+1} - t'_n) \tag{3.6}$$

Для определения функции  $u(\lambda_n + \tau)$  обратимся к уравнению (3.1). Заменяя  $J^{-1}$  линейным приближением на основе формулы (3.4) и используя равенство (3.5), получим приближение третьего порядка точности для  $u'(\lambda)$  в виде

$$u'(\lambda_n + \tau) = t'(\lambda_n + \tau)v(\lambda_n + \tau) = J_n^{-1}v_n + \tau \left[ J_n^{-1}v'_n + \frac{1}{\Delta\lambda_n}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v_n \right] + \\ + \frac{\tau^2}{\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2}(v'_{n+1} - v'_n) + (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v'_n \right] + \frac{\tau^3}{2\Delta\lambda_n^2}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})(v'_{n+1} - v'_n)$$

Отсюда, интегрируя по  $\tau$ , находим приближение и для  $u(\lambda)$ :

$$u(\lambda_n + \tau) = u_n + \tau J_n^{-1}v_n + \frac{\tau^2}{2} \left[ J_n^{-1}v'_n + \frac{1}{\Delta\lambda_n}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v_n \right] + \\ + \frac{\tau^3}{3\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2}(v'_{n+1} - v'_n) + (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v'_n \right] + \frac{\tau^4}{8\Delta\lambda_n^2}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})(v'_{n+1} - v'_n) \quad (3.7)$$

Полагая в выражениях (3.5)–(3.7)  $\tau = \Delta\lambda_n$ , получим следующую неявную численную схему для определения величин  $u_{n+1} = u(\lambda_{n+1})$  и  $x_{n+1} = x(\lambda_{n+1})$ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v_n + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{24} [(3J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1})\hat{f}_{n+1} + (5J_{n+1}^{-1} + 3J_n^{-1})\hat{f}_n] \quad (3.8)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}(\hat{g}_{n+1} + \hat{g}_n) \quad (3.9)$$

где  $\hat{f}_n = \hat{f}(u_n, x_n)$ , начальные значения  $u_0$  и  $x_0 = [v_0, t_0]^T$  известны.

Численная схема (3.8), (3.9) имеет второй порядок точности для вектора  $x = [v, t]^T$  и вектора перемещения  $u$ , поскольку искомым вектор  $x$  был аппроксимирован сплайном второго порядка, а перемещение – кусочно-гладким полиномом четвертого порядка, имеющим непрерывные производные.

**4. Итерационный процесс.** Полученная численная схема (3.8), (3.9) – неявная относительно неизвестной  $y_{n+1} = [u_{n+1}, x_{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , поэтому на каждом шаге требуется решать систему из  $2n+1$  нелинейных уравнений. Это решение можно трактовать с позиции теории гладких отображений [8] евклидова пространства  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , поскольку оно является неподвижной точкой для некоторого гладкого диффеоморфного отображения, определяемого итерационной схемой (3.8), (3.9), действующего на компактном множестве в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Чтобы показать последнее, перепишем схему (3.8), (3.9) в виде

$$y = \Phi(y), \quad \Phi(y) = y_{n+1/2} + \Delta\lambda_n \Psi(y) \quad (4.1)$$

Решением задачи (4.1) является неизвестная  $y_{n+1}$ , а промежуточное значение  $y_{n+1/2}$  и функция  $\Psi(y)$  определяются по данным предыдущего шага соответственно формулами

$$y_{n+1/2} = \begin{bmatrix} u_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2} J_n^{-1} v_n + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{8} J_n^{-1} \hat{f}_n \\ x_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2} \hat{g}_n \end{bmatrix}, \quad \Psi(y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J^{-1}(y)v_n + \Delta\lambda_n H_n(y) \\ \hat{g}(y) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$H_n(y) = \frac{1}{12} \{ [3J^{-1}(y) + J_n^{-1}] \hat{f}(y) + 5J^{-1}(y) \hat{f}_n \}$$

Тогда решение нелинейного уравнения (4.1) эквивалентно поиску неподвижных точек отображения

$$\tilde{y} = \Phi(y), \quad \Phi \in C^2(D) \tag{4.3}$$

действующего в пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Лемма.* Для системы (2.1), (2.2), параметризованной наилучшим образом, отображение (4.3) действует в би-шаре  $B_{r,A}(y_{n+1/2})$  с центром в точке  $y_{n+1/2} = [u_{n+1/2}, x_{n+1/2}]^T$ , где

$$B_{r,A}(y_{n+1/2}) = \{y = [u, x]^T : \|u - u_{n+1/2}\| \leq A, \|x - x_{n+1/2}\| \leq r\} \tag{4.4}$$

$$r = r(\Delta\lambda_n) = \frac{\Delta\lambda_n}{2}, \quad A = A(v_n, \Delta\lambda_n) = \frac{\Delta\lambda_n}{2} \left( \|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n \right) \tag{4.5}$$

*Доказательство.* Оценим нормы компонент вектор-функции  $\Psi(y)$ , отвечающих за нормы  $\|u - u_{n+1/2}\|$  и  $\|x - x_{n+1/2}\|$  соответственно. Вычисляя квадрат нормы первой компоненты, имеем

$$\|J^{-1}(y)v_n + \Delta\lambda_n H_n(y)\|^2 = J^{-2}(y)\|v_n\|^2 + 2\Delta\lambda_n J^{-1}(y)v_n H_n(y) + (\Delta\lambda_n)^2 \|H_n(y)\|^2$$

Из выражения (2.3) следует, что

$$J^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + vv + f(y)f(y)}} \leq 1$$

при любых значениях  $y$ . Используя последнее неравенство, а также неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \|J^{-1}(y)v_n + \Delta\lambda_n H_n(y)\|^2 &\leq \|v_n\|^2 + \frac{2\Delta\lambda_n}{3} v_n \left( \hat{f} + \frac{5}{4} f_n \right) + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{9} \left\| \hat{f} + \frac{5}{4} \hat{f}_n \right\|^2 = \\ &= \left\| v_n + \frac{\Delta\lambda_n}{3} \left( \hat{f} + \frac{5}{4} \hat{f}_n \right) \right\|^2 \leq \left( \|v_n\| + \frac{\Delta\lambda_n}{3} \left\| \hat{f} + \frac{5}{4} \hat{f}_n \right\| \right)^2 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\hat{f} = \frac{f}{\sqrt{1 + vv + f(y)f(y)}} \leq 1$$

то

$$\left\| \hat{f} + \frac{5}{4} \hat{f}_n \right\| \leq \frac{9}{4}$$

Поэтому

$$\|J^{-1}(y)v_n + \Delta\lambda_n H_n(y)\| \leq \|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n$$

Это позволяет при соотношениях (4.1), (4.2) дать оценку

$$\|u - u_{n+1/2}\| \leq \frac{\Delta\lambda_n}{2} \left( \|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n \right)$$

Используя оценку

$$\|\hat{g}\| \leq 1, \quad \hat{g} = J^{-1}g = \frac{g}{\sqrt{vv + g(y)g(y)}}$$

для второй компоненты вектор-функции  $\Psi(y)$ , получаем оценку и для нормы  $\|x - x_{n+1/2}\|$ :

$$\|x - x_{n+1/2}\| \leq \frac{\Delta\lambda_n}{2}$$

В итоге приходим к формулам (4.4), (4.5), что доказывает лемму.

Таким образом, решение нелинейного уравнения (4.1) эквивалентно поиску неподвижных точек дважды непрерывно дифференцируемого отображения  $\tilde{y} = \Phi(y)$ , действующего на компактном множестве (4.4), (4.5).

**Замечание 1.** Многообразие (4.4), (4.5) является неизотропным в подпространствах векторов  $x$  и  $u$ : для вектора  $x$  имеем оценку, не зависящую явно от предыдущей точки интегрирования  $y_n = [u_n, v_n, t_n]^T$ , а для вектора перемещений  $u$  такая оценка зависит от  $v_n$  явно. Это обстоятельство отражает неравноправность построенной разностной схемы по отношению к скорости и перемещению, что является следствием адаптации решения к аналитическим особенностям рассчитываемой ИК (в свою очередь являющейся следствием наилучшей параметризации). Однако это свойство не препятствует построению эффективных вычислительных процедур.

Ниже доказывается свойство сжимаемости отображения  $\tilde{y} = \Phi(y)$  и формулируется условие, при котором выполняется это свойство.

**Теорема 1.** Всегда найдется такое значение величины  $\Delta\lambda_n$ , что решение нелинейного уравнения (4.1) существует единственно и может быть построено при помощи итерационного процесса

$$y^{k+1} = \Phi(y^k), \quad y^0 = y_{n+1/2} \quad (4.6)$$

как предел

$$y_{n+1} = y = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k$$

**Доказательство.** Рассмотрим отображение (4.3), для которого, согласно лемме,  $y \in B_{r,A}(y_{n+1/2})$ , и оценим разностное отношение

$$\omega(\Phi; y_1, y_2) = \frac{\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|}{\|y_1 - y_2\|}$$

для двух произвольных векторов  $y_1, y_2 \in B_{r,A}(y_{n+1/2})$ . Используя соотношения (4.1), (4.2), а также включение  $\Psi \in \mathbb{C}^2(B_{r,A}(y_{n+1/2}))$ , получаем  $\omega(\Phi; y_1, y_2) \leq C$ , где постоянная  $C$  зависит от  $v_n$  и  $\Delta\lambda_n$  и имеет вид  $C = \Delta\lambda_n M(v_n, \Delta\lambda_n)$ , причем  $M(v_n, \Delta\lambda_n) \rightarrow \|\Psi'(y_n)\|$  при  $\Delta\lambda_n \rightarrow 0$ . Следовательно, при достаточно малом  $\Delta\lambda_n$  постоянная  $C < 1$  и  $\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| \leq C \|y_1 - y_2\|$ , т.е. отображение (4.3) является сжимающим в би-шаре  $B_{r,A}(y_{n+1/2})$ . Отсюда получаем утверждение теоремы.

Отметим, что, используя соотношение (3.9), формулу (3.8) можно преобразовать к виду, в котором  $u_{n+1}$  выражается через известные значения на предыдущем шаге и значения компонентов вектора  $x = [v, t]^T$  на текущем шаге. Действительно, из соотношения (3.9) получим

$$J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1} = \frac{2}{\Delta\lambda_n}(t_{n+1} - t_n), \quad \hat{f}_{n+1} + \hat{f}_n = \frac{2}{\Delta\lambda_n}(v_{n+1} - v_n) \quad (4.7)$$

Подстановка выражений (4.7) в формулу (3.8) позволяет переписать ее в виде

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(t_{n+1} - t_n)(v_{n+1} + 5v_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\hat{f}_n(t_{n+1} - t_n) + J_{n+1}^{-1}(v_{n+1} - v_n)] \quad (4.8)$$

Наконец, используя вытекающее из первого соотношения (4.7) выражение

$$J_{n+1}^{-1} = \frac{2}{\Delta\lambda_n}(t_{n+1} - t_n) - J_n^{-1}$$

приходим к формуле

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(t_{n+1} - t_n)(v_{n+1} + v_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\hat{f}_n(t_{n+1} - t_n) - J_n^{-1}(v_{n+1} - v_n)] \quad (4.9)$$

В связи с этим выделим вектор  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  и рассмотрим для него проекцию итерационного процесса (4.6) на подпространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Для этого, в соответствии с соотношениями (4.1) и (4.6), введем итерационную функцию

$$\phi(u, x) = x_{n+1/2} + \frac{\Delta\lambda_n}{2} \tilde{g}(u, x)$$

где переменная  $u$  является параметром, и рассмотрим итерационный процесс в подпространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  (при фиксированном  $u$ )

$$x^{k+1} = \phi^k = \phi(u, x^k), \quad x_{n+1} = x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi^k, \quad x^0 = \tilde{x}_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2} g_n \quad (4.10)$$

Итерационный процесс (4.10), очевидно, сходится при условии сжимаемости отображения  $\tilde{x} = \phi(u, x)$ , действующего при любом  $u$  в шаре  $B_r(x_{n+1/2})$ ,  $r = \Delta\lambda_n/2$ , т.е. при условии  $\Delta\lambda_n < 2$ , причем оценка является равномерной относительно параметра  $u$ .

Таким образом, теорему 1 можно усилить, если организовать итерационный процесс для нахождения  $x_{n+1}$  и  $u_{n+1}$  следующим образом: вначале определяем вектор  $x^{k+1}$  по формуле (4.10), а затем вычисляем переменную  $u = u^{k+1}$  по формуле, вытекающей из (4.9):

$$u^{k+1} = u_k + \frac{1}{2}(t^{k+1} - t_n)(v^{k+1} + v_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\hat{f}_n(t^{k+1} - t_n) - J_n^{-1}(v^{k+1} - v_n)] \quad (4.11)$$

$$u^0 = u_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2} J_n^{-1} v_n + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{8} J_n^{-1} \hat{f}_n$$

В итоге, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Решение нелинейного уравнения (4.1) существует и единственно при условии  $\Delta\lambda_n < 2$  и может быть построено при помощи итерационного процесса (4.10), (4.11).

*Замечание 2.* Условие  $\Delta\lambda_n < 2$ , обеспечивающее сходимость итерационного процесса (4.10), является достаточным, но не необходимым. В некоторых задачах шаг интегрирования, обеспечивающий сходимость, может значительно превышать единицу. Примером является задача о свободных колебаниях гибкого стержня, рассматриваемая ниже.

*Замечание 3.* Аналогичное свойство сжимаемости для вектора  $x = [v, t]^T$  можно построить и для других способов аппроксимации вектора решения (методы Ньюмарка, Вилсона, Хоболта и др. [2]), широко применяемых при численном интегрировании динамических систем.

**5. Примеры.** Ниже рассматриваются три задачи. Для них дается сопоставление численных решений, полученных с использованием и без использования процедуры параметризации. Показывается эффективность неявной схемы интегрирования (4.11), (3.9) для параметризованных уравнений по сравнению с интегрированием исходных (непараметризованных) уравнений по неявной схеме метода линейного ускорения [3, 4]:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t_n v_n + \frac{\Delta t_n^2}{6}(f_{n+1} + 2f_n), \quad v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t_n}{2}(f_{n+1} + f_n) \quad (5.1)$$

Эти формулы следуют из соотношений (3.8), (3.9) или (4.11), (3.9), если положить  $\Delta\lambda_n = \Delta t_n$ , и  $J_n^{-1} = 1$  для всех значений индекса  $n$ .

Для тестовой задачи “Плеяды” решение проводилось для ряда значений шага интегрирования, постоянного по длине некоторого интервала вдоль ИК, или интервала изменения исходного аргумента задачи.

Для второй и третьей задач решение осуществлялось с автоматическим управлением длиной шага интегрирования вдоль ИК решения: шаг выбирался из условия, чтобы локальная погрешность интегрирования, вычисленная с использованием экстраполяции Ричардсона [16], не превышала предписанной величины  $\delta$ . Для сравнения с известными способами решения эти две задачи были проинтегрированы по неявной схеме линейного ускорения (5.1) без процедуры параметризации, но с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона, а также его модифицированного варианта. Такое решение было также проведено с управлением длиной шага интегрирования вдоль оси параметра времени по оценке локальной ошибки интегрирования (в противном случае время интегрирования оказывалось большим). При этом матрица Якоби вычислялась численно, а соответствующая система алгебраических уравнений разрешалась по методу Холецкого. В модифицированном методе Ньютона–Рафсона вычисление матрицы Якоби и решение системы алгебраических уравнений осуществлялось через каждые 10 шагов по параметру времени. В случае расходимости итераций или превышения их числа некоторого предельного значения (принятого равным 20) шаг интегрирования уменьшался вдвое, и вычисления повторялись от предыдущего момента времени.

Сходимость итерационных процессов контролировалась по величине погрешности вычислений

$$\varepsilon^{(k)} = \max_i \left( \frac{|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|}{d_i} \right)$$

где  $k$  – номер итерации,  $i$  – номер компоненты вектора решения  $u$ ,  $d_i = \max(|u_i^{(k)}|, 1)$ , – коэффициент смешанного масштабирования. Итерации прекращались при условии  $\varepsilon^{(k)} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная допустимая величина для окончания итераций.

*Задача небесной механики “Плеяды”* [16]. Движение семи звезд с координатами  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и массами  $m_i = i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ), движущимися в одной плоскости, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}}, \quad \ddot{y}_i = \sum_{j \neq i} m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}} \quad (5.2)$$

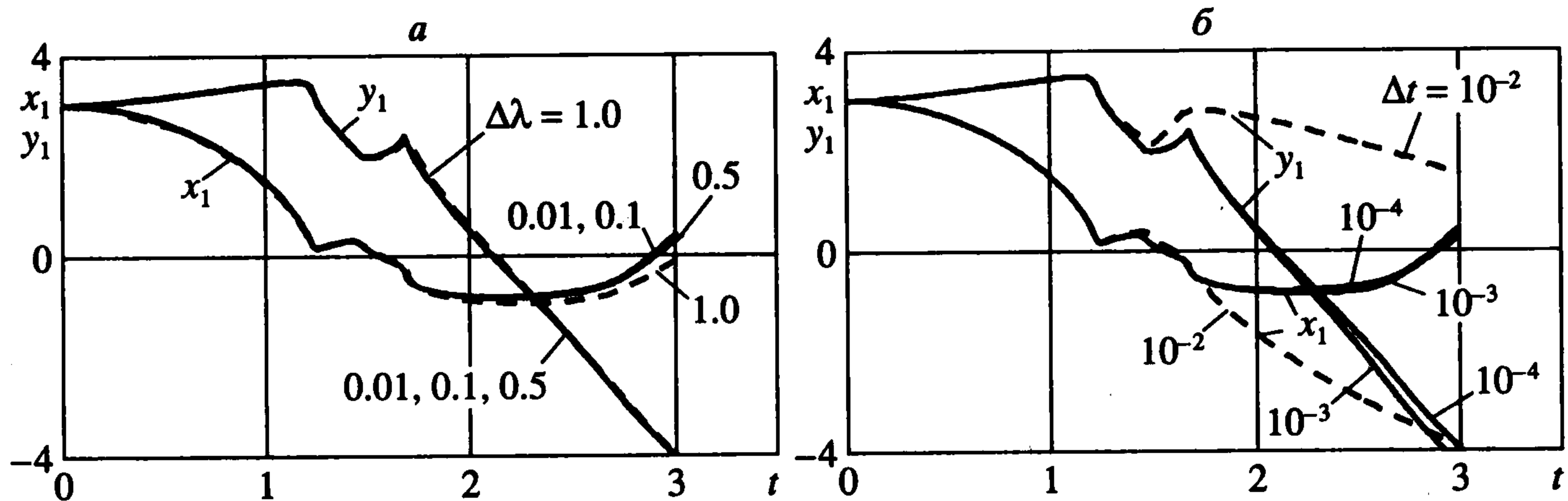
$$r_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{3/2}, \quad i, j = 1, \dots, 7$$

Начальные условия имеют вид

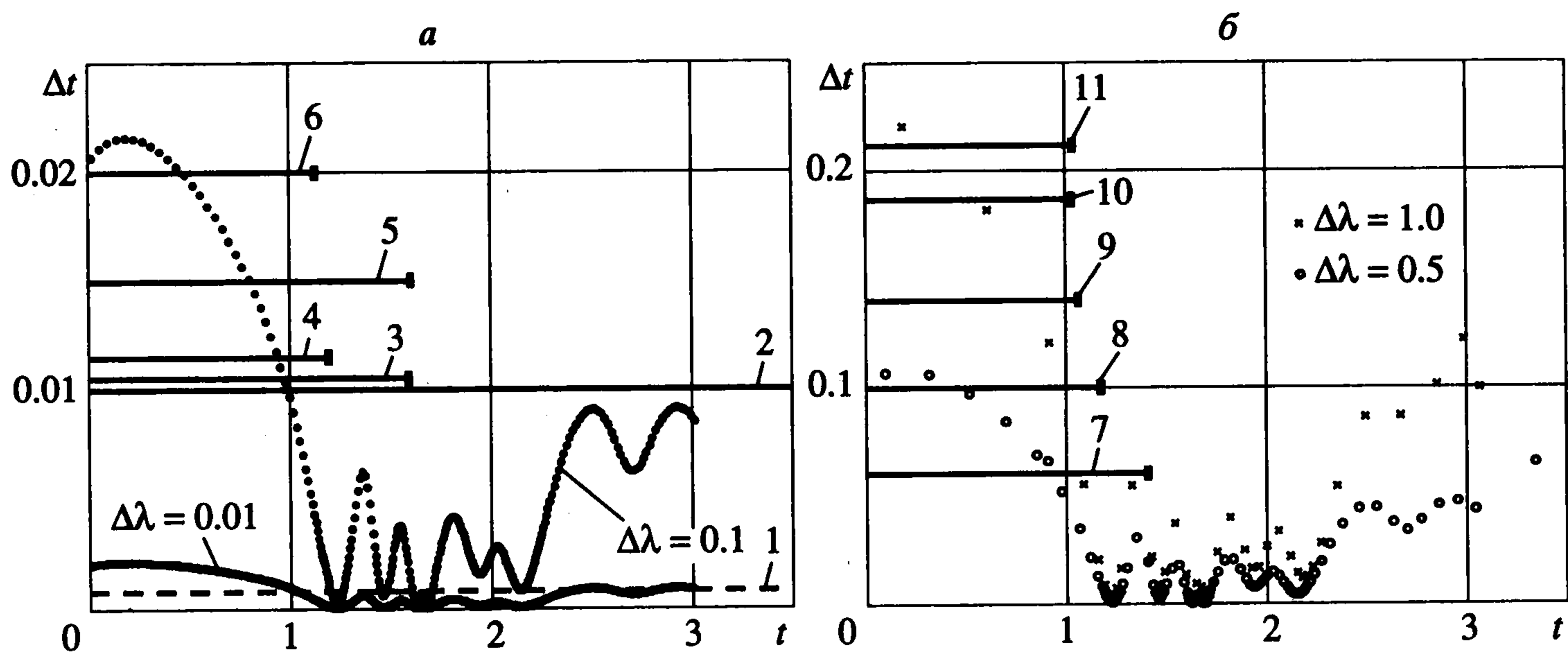
$$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) = 3, \quad x_3(0) = -1, \quad x_4(0) = -3, \quad x_5(0) = -x_6(0) = x_7(0) = 2 \\ y_1(0) = -y_2(0) = 3, \quad y_3(0) = 2, \quad y_4(0) = y_5(0) = 0, \quad y_6(0) = -y_7(0) = -4 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_4(0) = \dot{x}_5(0) = 0, \quad \dot{x}_6(0) = 1.75, \quad \dot{x}_7(0) = -1.5 \\ \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = \dot{y}_3(0) = 0, \quad \dot{y}_4(0) = -2.25, \quad \dot{y}_5(0) = 1, \quad \dot{y}_6(0) = \dot{y}_7(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отрезок интегрирования по параметру времени  $t$  равен  $[0, 3]$ . Шаг интегрирования выбирался из условия, чтобы локальная погрешность вычислений не превышала допустимого значения  $\delta = 10^{-10}$ . Итерации прекращались при условии  $\varepsilon^k \leq \varepsilon = 10^{-12}$ .

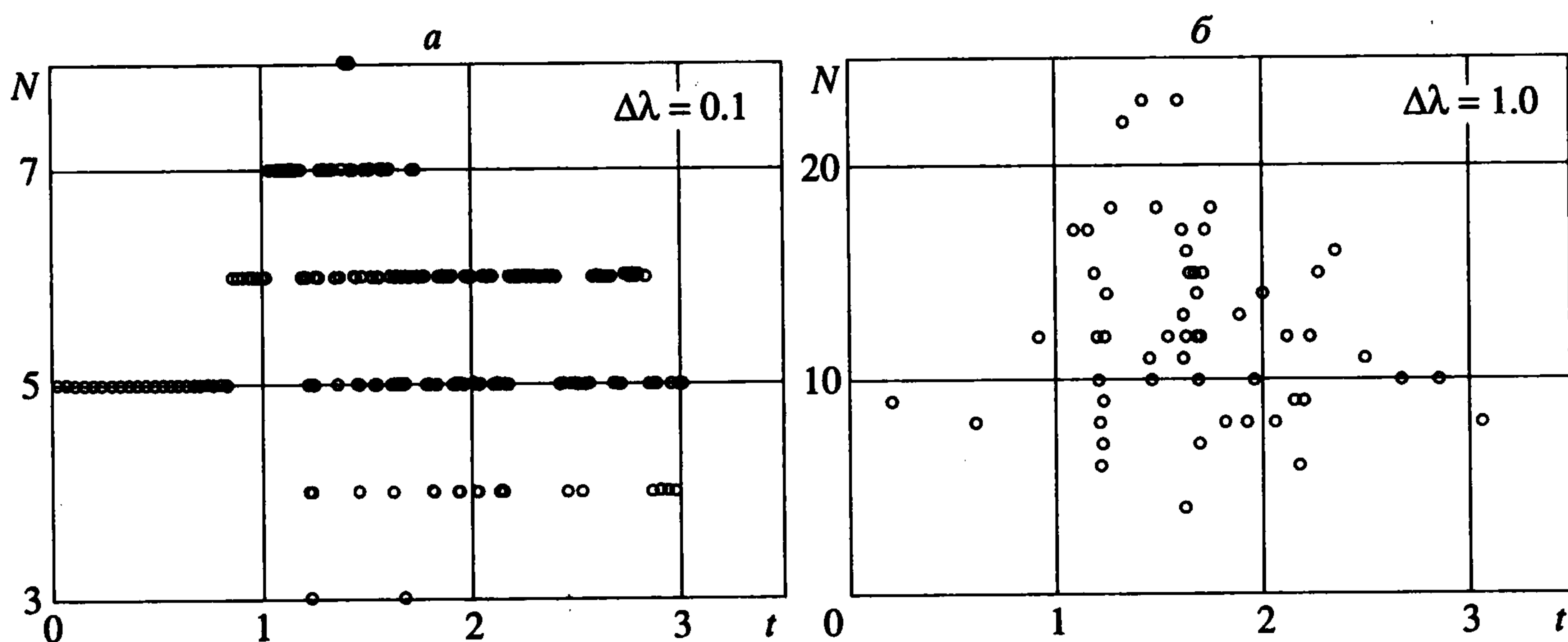
Результаты решения задачи показаны на фиг. 1–3. Интегрирование проводилось для ряда значений шага  $\Delta\lambda$  по параметру длины ИК для параметризованных уравне-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ний и ряда значений шага  $\Delta t$  вдоль заданного интервала изменения аргумента  $t$  для исходной задачи (5.2), (5.3).

На фиг. 1 показаны графики решений  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$ , полученных для параметризованных уравнений при значениях шага  $\Delta\lambda = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$  (а) и полученных интегрированием уравнений (5.2), (5.3) при значениях шага  $\Delta t = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  (б). Как видно,

решение параметризованных уравнений мало меняется при значительном изменении (в 100 раз) шага интегрирования по длине ИК, а решение уравнений без параметризации существенно меняется при увеличении  $\Delta t$  до значения  $10^{-2}$ . Видно также, что точность интегрирования при  $\Delta t > 10^{-3}$  неприемлема; при  $\Delta t > 10^{-2}$  итерации начинают расходиться. При интегрировании параметризованных уравнений с ростом  $\Delta \lambda$  итерационный процесс продолжал сходиться, однако точность интегрирования становилась неудовлетворительной только при  $\Delta \lambda = 1$ . Аналогичная ситуация была описана [20] при численном интегрировании явными методами дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

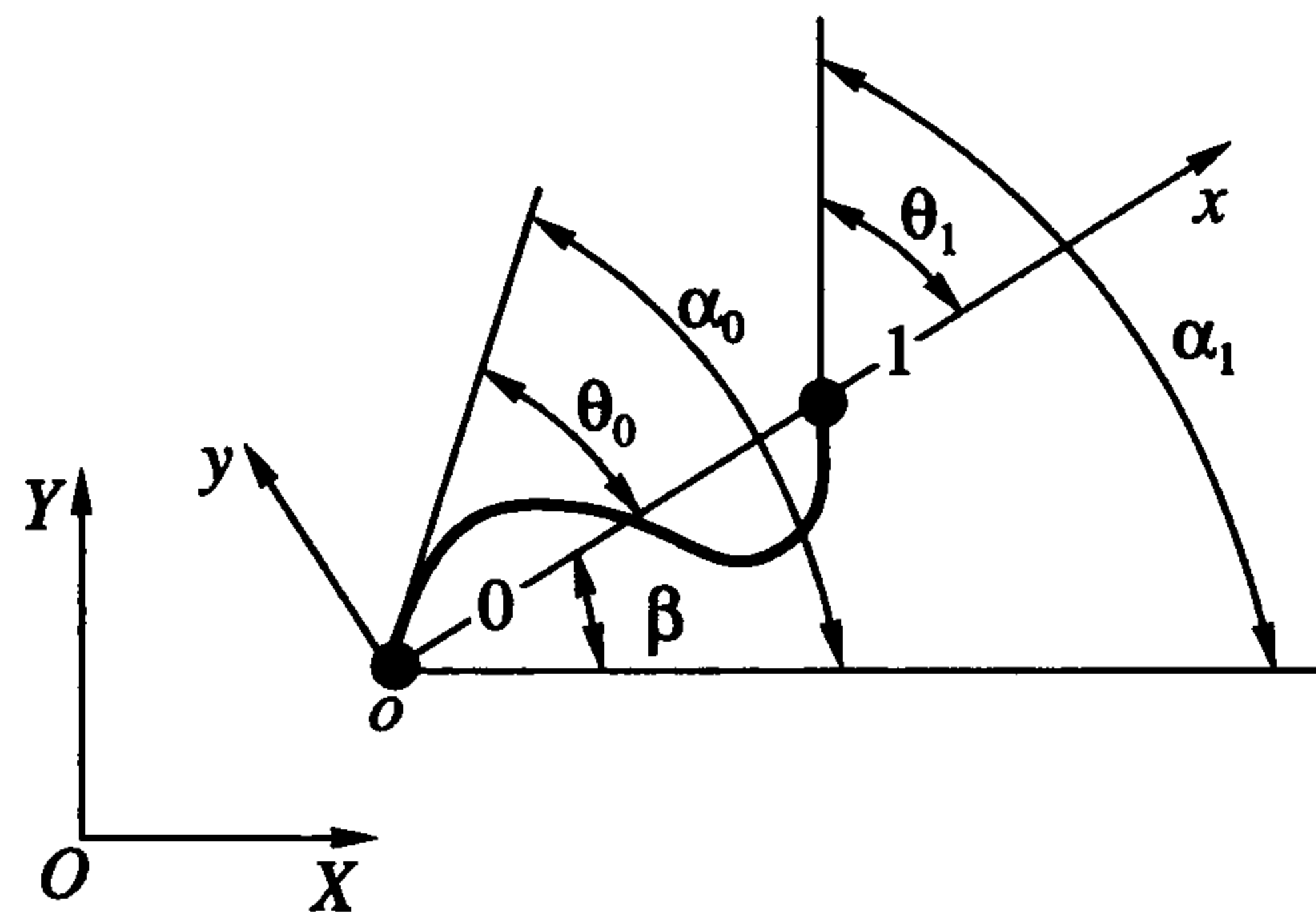
Каждому отрезку  $\Delta \lambda$  при пошаговом интегрировании параметризованных уравнений соответствует некоторый отрезок  $\Delta t$ , меняющий свою длину при движении по ИК. Таким образом, параметризация автоматически адаптирует шаг  $\Delta t$  к характеру изменения ИК. Этот факт отражен на фиг. 2, где точками показаны зависимости  $\Delta t(t)$  для значений  $\Delta \lambda = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$ . Отрезки прямых разной длины соответствуют интегрированию уравнений с постоянным шагом без использования параметризации. Штриховая прямая (с номером 1) на фиг. 2,а обозначает некоторое пограничное значение шага интегрирования  $\Delta t$ , обеспечивающее приемлемую точность интегрирования. Прямая с номером 2 соответствует графикам решений  $x_1(t), y_1(t)$ , изображенных штриховыми линиями на фиг. 1,б для  $\Delta t = 10^{-2}$ . Как указывалось выше, интегрирование при  $\Delta t > 10^{-2}$  приводит к расходимости итераций. Это показано прямыми отрезками (с номерами от 2 до 11, им соответствуют значения  $\Delta t \approx 0.010, 0.011, 0.012, 0.015, 0.020, 0.060, 0.100, 0.140, 0.180, 0.220$ ), обрывающимися при некоторых значениях параметра времени  $t$ , при которых итерационный процесс начинает расходиться.

На фиг. 3 точками показаны зависимости числа итераций от времени при интегрировании параметризованных уравнений с шагом  $\Delta \lambda = 0.1$  и  $\Delta \lambda = 1.0$ .

*Моделирование динамики гибкого консольного стержня, в начальном состоянии свернутого в кольцо изгибающим моментом.* Рассматривается задача о геометрически нелинейном динамическом поведении упругого гибкого стержня, консольно закрепленного на одном конце. В начальном состоянии стержень свернут в кольцо изгибающим моментом, приложенным на свободном от закрепления конце и равным  $2\pi EJ/L$ , где  $EJ$  – изгибная жесткость,  $L$  – длина стержня. В момент времени  $t = 0$  действие момента прекращается и начинается процесс динамического движения (развертывания) в плоскости под действием упругих и инерционных сил.

Задача решается в конечно-элементной постановке в соответствии с описанным ранее подходом [3, 4]. Силы гравитации и демпфирование колебаний не учитываются.

Каждый элемент (см. фиг. 4) связывается с локальной (элементной) системой координат  $ox$  таким образом, чтобы одна из осей (например, ось  $ox$ ) проходила через узлы элемента 0.1. Перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости элементных осей, совершающих движение относительно неподвижной системы координат  $OXY$ , учитываются строго. В качестве функций формы принимаются квазистатические аппроксимации локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента в переменных элементной системы координат. Они строятся на основе решения однородной линейной статической задачи в зависимости от углов поворота узловых сечений элемента  $\theta_0, \theta_1$  как функций времени  $t$ . Стержень считается растяжимым. Принимается также, что поперечные сечения элементов могут поворачиваться и сдвигаться друг относительно друга, т.е. учитываются деформации осредненного сдвига. Для упрощения вычислений распределенные массовые характеристики стержня (масса, моменты инерции) и нагрузка приводятся к узлам конечно-элементной модели. В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные координаты узлов и углы поворотов поперечных сечений стержня, ассоциированных с этими узлами, относительно системы координат  $OXY$ .



Фиг. 4

Нелинейные уравнения движения записываются в обобщенных координатах в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$m_i \ddot{q}_i + \frac{\partial U^\Sigma}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

Здесь  $m_i$  –  $i$ -й элемент диагональной матрицы масс,  $U^\Sigma = U^{(1)} + \dots + U^{(N)}$  – потенциальная энергия системы, где  $U^{(k)}$  – потенциальная энергия  $k$ -го элемента;  $Q_i$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$  с номером  $i$ ,  $N$  – число обобщенных координат. В дальнейшем, для простоты записи, верхние индексы будем опускать, подразумевая, что все обозначения относятся к элементу с номером  $k$ .

Потенциальная энергия элемента при конечных деформациях (при учете квадратичных членов по углу поворота поперечных сечений) записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{EJ}{l} [(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + 3\kappa(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2] + \frac{N^2 l}{EF} \right\}$$

Продольная сила  $N$ , постоянная по длине элемента, и безразмерный коэффициент  $\kappa$  определяются как

$$N = EF \left\{ \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \frac{\kappa^2}{5}(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2 \right] \right\}, \quad \kappa = \left( 1 + \frac{12EJ}{l^2 GF_c} \right)^{-1}$$

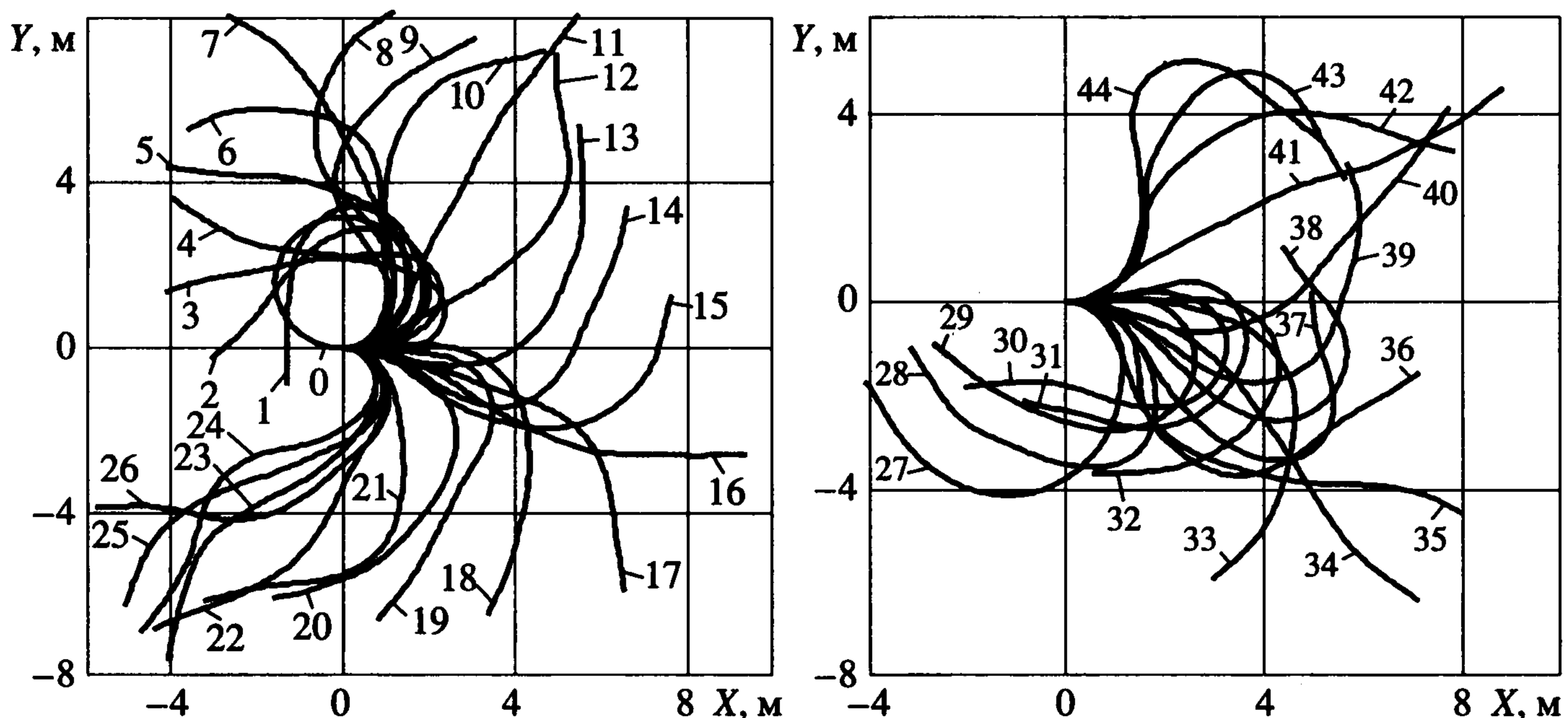
Продольное перемещение узла 1 в направлении оси  $ox$  относительно узла 0 равно

$u_1 = \sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2} - l$ ,  $l$  – длина элемента до деформации;  $\beta$  – угол поворота подвижной элементной системы координат  $oxy$  относительно инерциальной системы координат  $OXY$ ;  $EJ$ ,  $EF$ ,  $GF_c$  – соответственно жесткости на изгиб, растяжение–сжатие и сдвиг.

Предварительно была решена статическая задача о сильном деформировании стержня (прямолинейного в начальном состоянии) изгибающим моментом указанной выше величины. Задача решалась с использованием наилучшей параметризации для уравнений статического состояния [15]. Разрешающая система уравнений в этом случае имеет вид

$$\left\| \frac{\partial^2 U^\Sigma}{\partial q_i \partial q_j} \right\| \frac{d}{dp} \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_1^* \\ \vdots \\ F_N^* \end{matrix} \right\| \quad (5.5)$$

где  $q_i$ ,  $F_i^*$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – обобщенные координаты и амплитудные значения внешних узловых сил и моментов, соответствующие этим координатам. Параметр нагрузки  $p$ ,



Фиг. 5

изменяющийся в пределах от 0 до 1, связан с аргументом (длиной ИК) дифференциальным соотношением

$$\frac{dp}{d\lambda} = J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + ff}}$$

Здесь  $f$  – вектор правых частей системы (5.5), разрешенной относительно производных  $dq_i/dp$ .

В результате была найдена конфигурация – окружность радиуса  $L/(2\pi)$ , которая определяла начальное состояние системы для решения динамической задачи.

После параметризации система уравнений (5.4) принимает вид

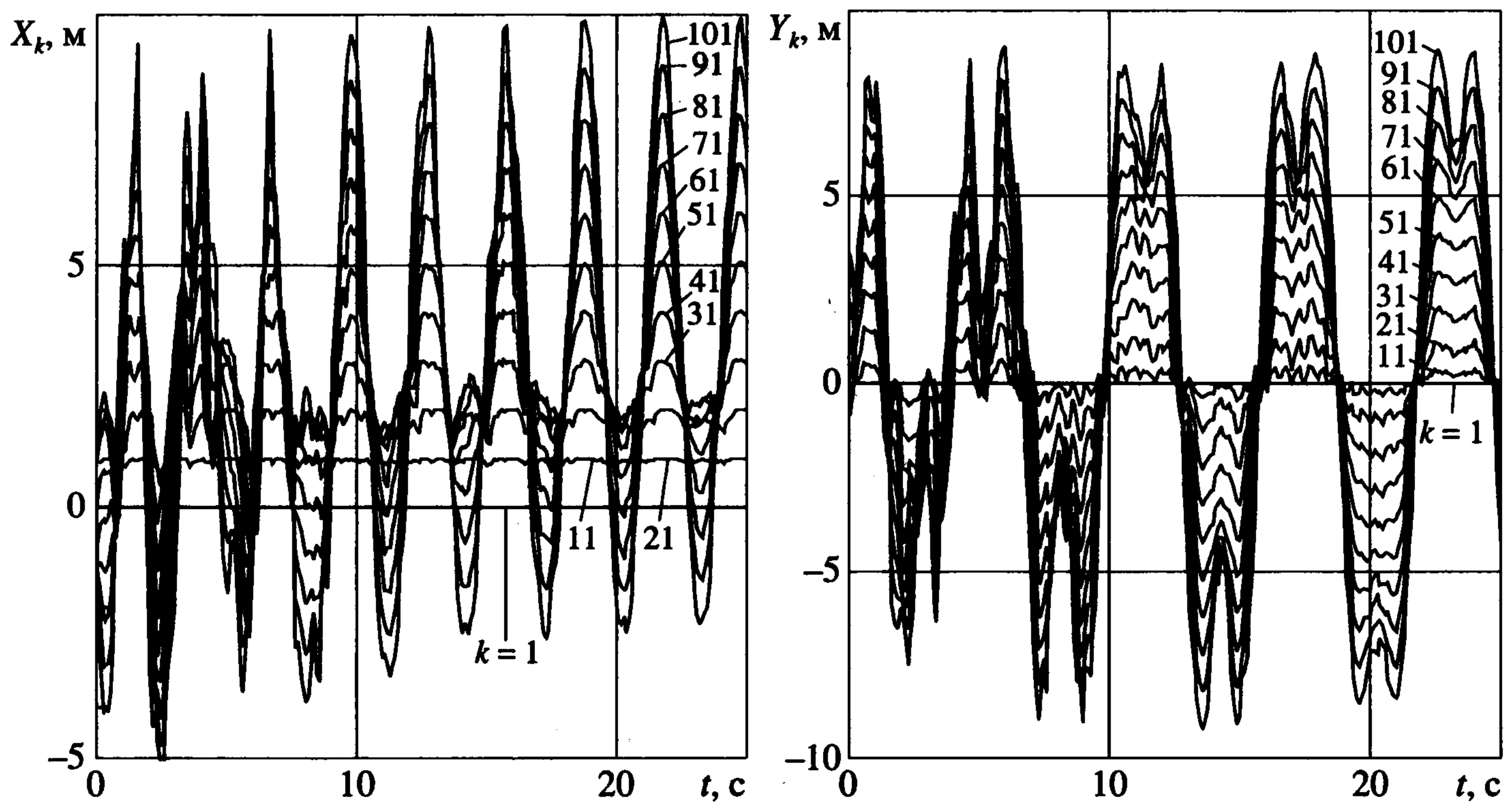
$$v'_i = \frac{1}{Jm_i} \left( Q_i - \frac{\partial U^\Sigma}{\partial q_i} \right), \quad q'_i = \frac{v_i}{J}, \quad t' = \frac{1}{J}; \quad J = \sqrt{1 + qq + vv}$$

Вектор  $q = [q_1, \dots, q_N]^T$  является аналогом вектора  $u$  в (1.1),  $v = [v_1, \dots, v_N]^T$ .

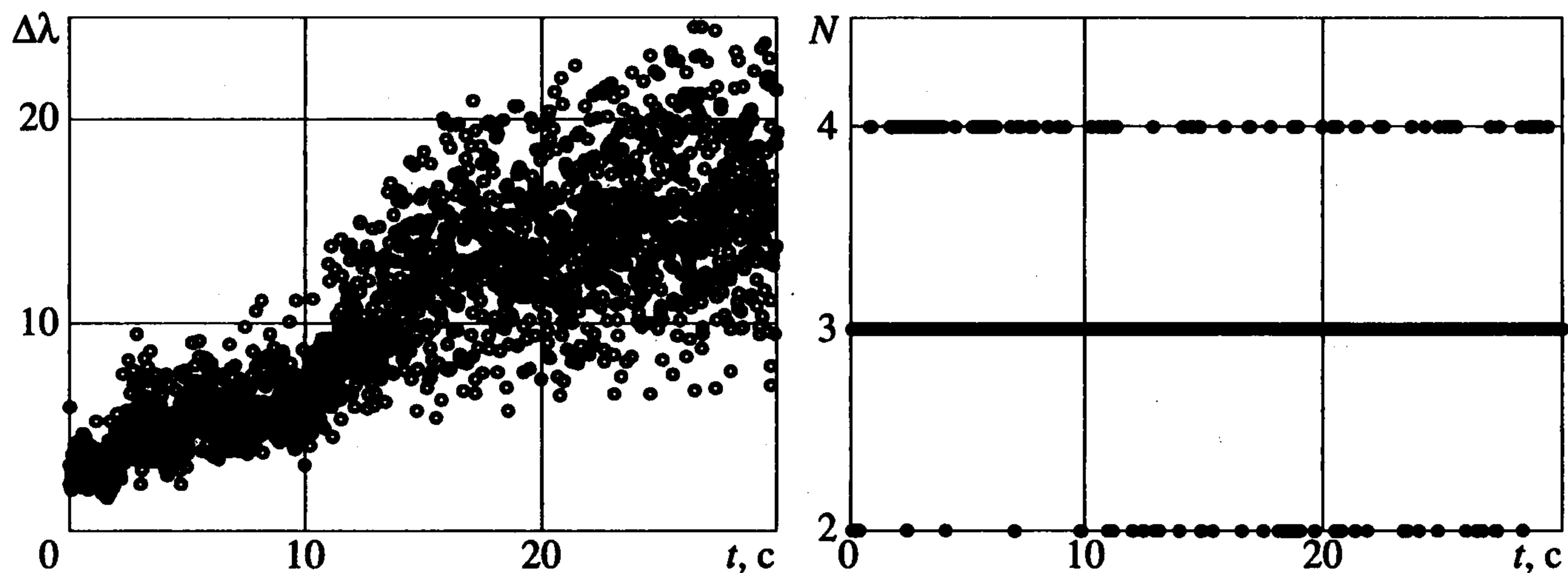
Для расчетов принимались следующие значения параметров задачи:  $L = 10$  м,  $EF = 2.88 \cdot 10^7$  Н,  $EJ = 960$  Н · м<sup>2</sup>,  $GF_c = 1.108 \cdot 10^7$  Н, массовая плотность  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>. Стержень был разбит на 100 элементов равной длины.

Интегрирование проводилось в интервале от 0 до 30 с. Шаг интегрирования по параметру продолжения адаптировался к процессу построения ИК по оценке локальной погрешности интегрирования. В качестве максимальной допустимой величины локальной погрешности принималась величина  $10^{-9}$ . Без адаптации шага к ИК проведение интегрирования оказалось неэффективным, требующим больших вычислительных затрат. Итерации контролировались по оценке погрешности, максимальное допустимое значение которой принималось равным  $10^{-10}$ . Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 5–7.

На фиг. 5 представлены различные конфигурации стержня, соответствующие движению в интервале  $0 \leq t \leq 4.4$  с и упорядоченные по времени с шагом около 0.1 с (кривые 1–44). Кривая 0 – окружность, соответствующая начальной (статической) конфигурации стержня. По осям графиков отложены абсолютные координаты (в метрах). На фиг. 6 представлены зависимости узловых координат  $X$  и  $Y$  (отсчитываемых вдоль осей ординат в метрах) как функции времени  $t$  (отсчитываемого вдоль осей абсцисс в секундах). Кривые построены для ряда узлов с номерами, показанными



Фиг. 6

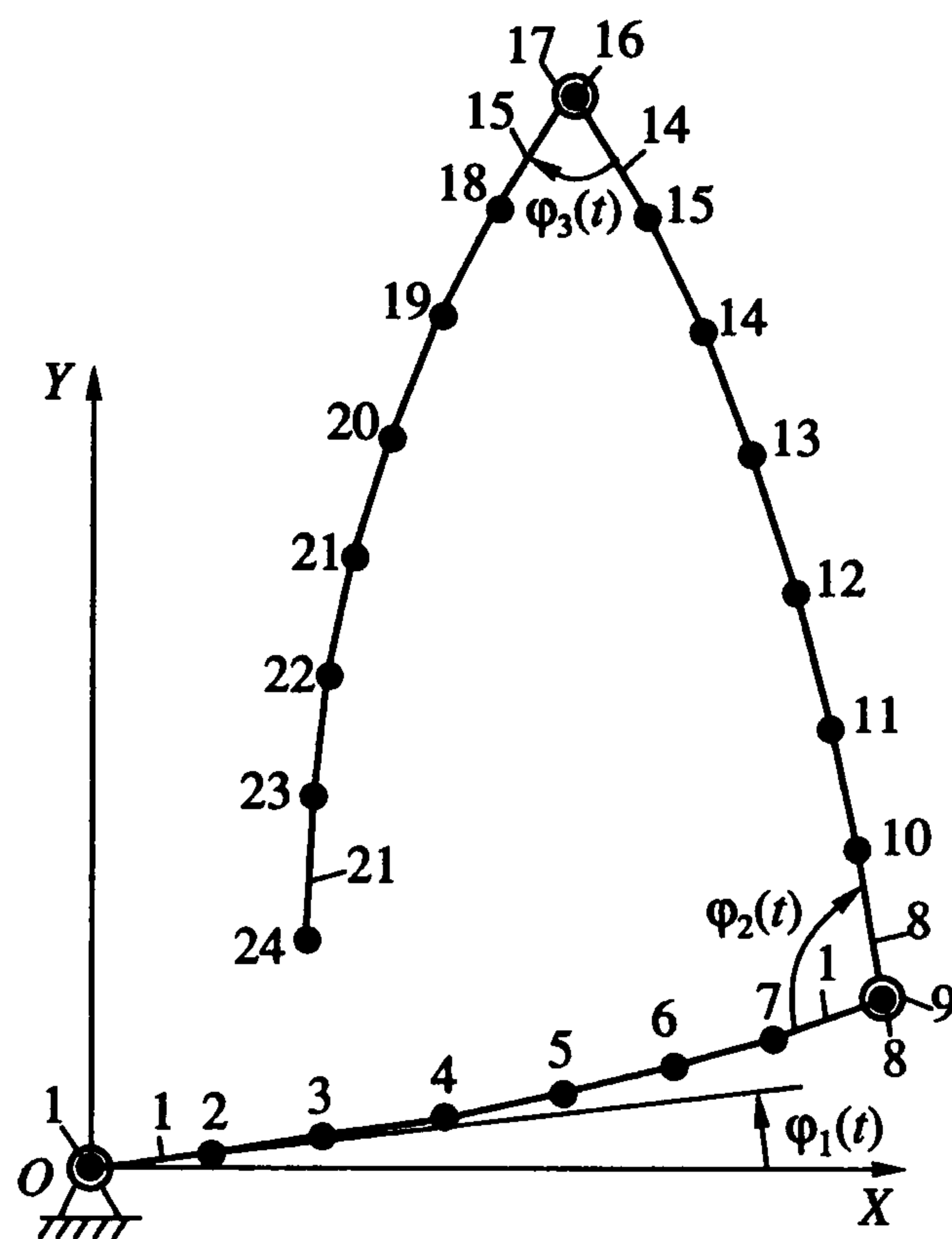


Фиг. 7

ми справа. Узлы были последовательно пронумерованы от 1 до 101, начиная от заделки стержня до его свободного конца. В левой части фиг. 7 точками показано, как меняется шаг интегрирования при его адаптации к процессу построения ИК по оценке локальной погрешности вычислений, а в правой части точками дана зависимость числа итераций от времени; видно, что при заданных параметрах точности вычислений среднее число итераций равно трем.

Интегрирование уравнений движения по алгоритму (5.1) с использованием простых итераций, но без процедуры параметризации оказалось практически невозможным: итерационный процесс расходился в начале интегрирования при всех разумных значениях шага интегрирования.

Интегрирование непараметризованных уравнений на основе формул (5.1) с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона позволило решить задачу. Однако он оказался менее эффективным по сравнению с методом простых итераций в параметризованном случае из-за сложности используемого алгоритма, связанного с вычислением матрицы Якоби и решением линеаризованной системы алгебраических уравнений. Время интегрирования непараметризованной задачи с использовани-



Фиг. 8

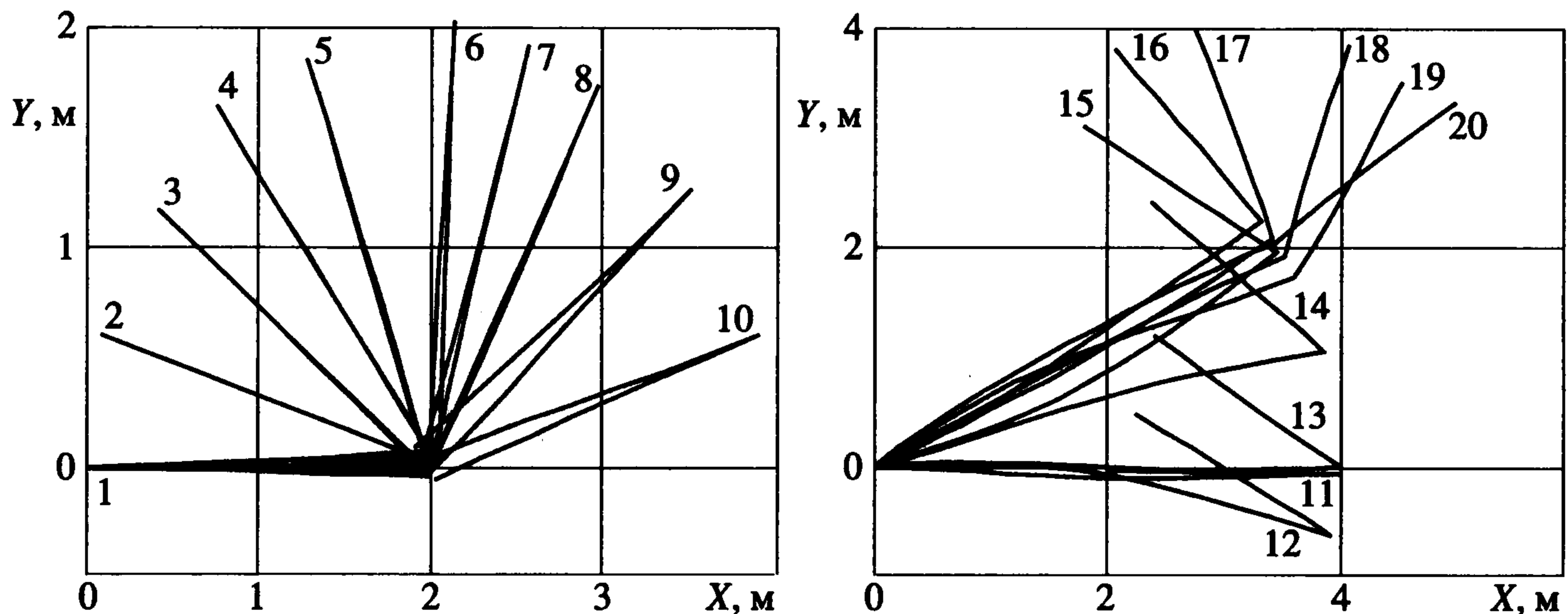
ем итераций Ньютона–Рафсона оказалось примерно в 1.8 раза больше времени интегрирования параметризованных уравнений с использованием простых итераций, причем эта разница имеет тенденцию к заметному увеличению с ростом размерности задачи (числа конечных элементов). Интегрирование задачи с использованием модифицированного метода Ньютона–Рафсона также не дало выигрыша: потребовалось примерно в 1.5 раза больше времени по сравнению с интегрированием параметризованных уравнений.

*Моделирование динамики разворачивания системы, состоящей из трех гибких стержней, соединенных шарнирами.* Рассматривается система из трех гибких стержней, соединенных последовательно через шарниры. Считается, что поперечные сечения стержней имеют одинаковые геометрические и жесткостные характеристики. Для расчетов приняты следующие значения параметров задачи:  $EF = 7.2 \cdot 10^6 \text{ Н}$ ,  $EJ = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $GF_c = 2.7692 \cdot 10^6 \text{ Н}$ , массовая плотность  $\rho = 2800 \text{ кг/м}^3$ .

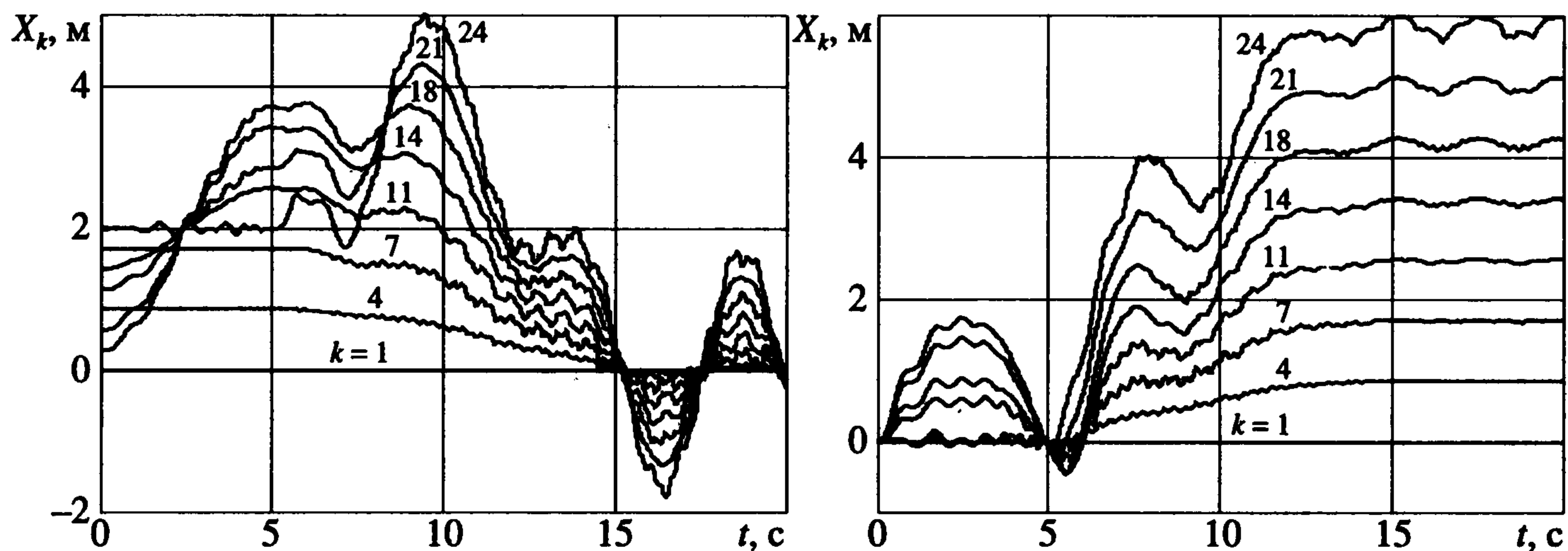
Задача решается в конечно-элементной постановке, аналогично предыдущей задаче о разворачивании консольного стержня. Силы гравитации и демпфирование колебаний не учитываются.

Конечно-элементная модель системы изображена на фиг. 8, где показана нумерация конечных элементов и узлов (номера конечных элементов с 2 по 6, с 9 по 13 и с 16 по 20 опущены). Узел 1 считается неподвижным в пространстве ( $x_1 = y_1 = 0$ ), однако он может свободно вращаться относительно системы координат  $OXY$ . Каждый стержень имеет длину  $L = 2 \text{ м}$ . Модель содержит 21 конечный элемент и 24 узла. Все конечные элементы системы одинаковы и имеют длину  $l = 0.2857 \text{ м}$ . Узлы 8, 9 и 16, 17 образуют шарниры, на перемещения которых ограничения не накладываются. Начальной конфигурацией системы является прямая горизонтальная линия длины  $L = 2 \text{ м}$ . Такому состоянию отвечает, например, такая упаковка системы, когда угол между элементом 1 и осью  $OX$   $\varphi_1(0) = 0$ , угол между элементами 7 и 8  $\varphi_2(0) = \pi$  и угол между элементами 14 и 15  $\varphi_3 = 0$ .

Разворачивание осуществляется в результате предписанного изменения углов между осями стержней в местах их соединения через шарниры, а также в результате



Фиг. 9



Фиг. 10

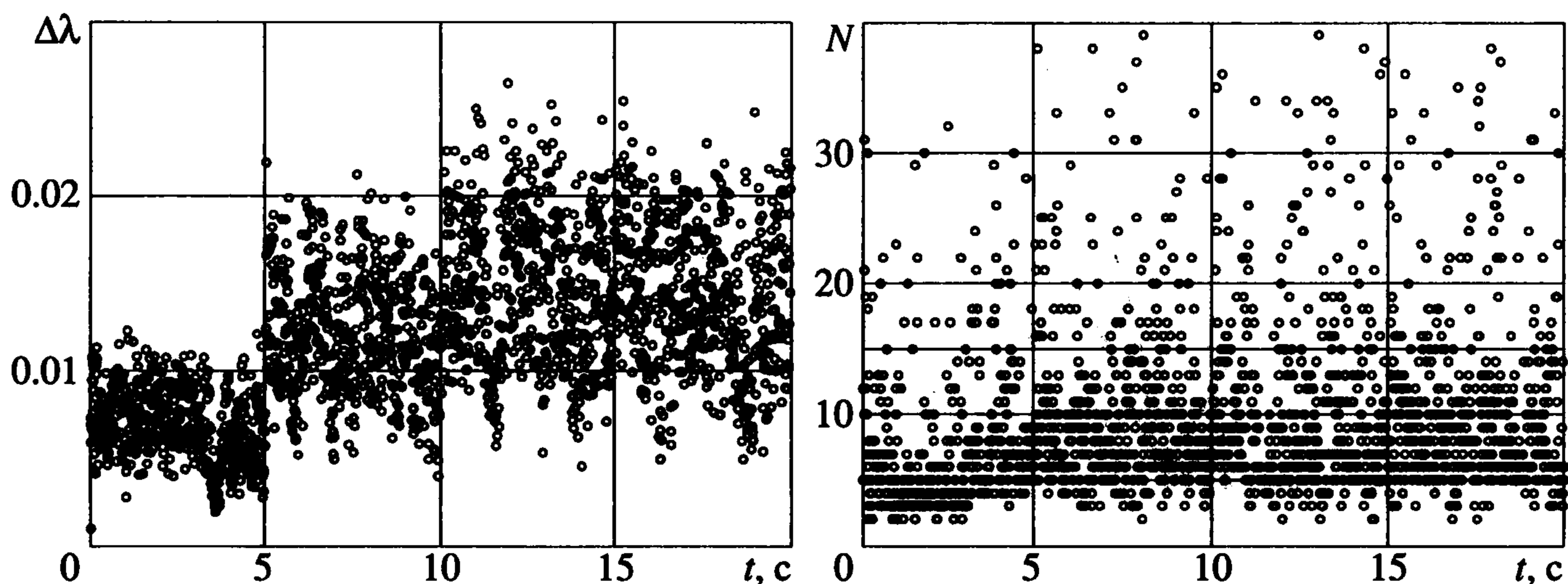
предписанного изменения угла между осью стержня с шарниром в узле 1 и направлением оси  $OX$ . Сначала раскрывается угол  $\varphi_2(t)$  по часовой стрелке, затем – угол  $\varphi_3(t)$  по часовой стрелке и угол  $\varphi_1(t)$  против часовой стрелки как заданные функции времени, где  $t$  – время в секундах. Закон разворачивания системы определяется формулами

$$\varphi_1(0 \leq t \leq 5) = 0, \quad \varphi_1(5 \leq t \leq 15) = \frac{t-5}{10} \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1(t > 15) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2(0 \leq t \leq 5) = -\frac{t}{5} \pi, \quad \varphi_2(t > 5) = -\pi$$

$$\varphi_3(0 \leq t \leq 5) = 0, \quad \varphi_3(5 \leq t \leq 10) = -\frac{t-5}{5} \pi, \quad \varphi_3(t > 10) = -\pi$$

Интегрирование осуществлялось в диапазоне времени движения системы от 0 до 20 с. Шаг интегрирования по параметру продолжения адаптировался к процессу построения ИК по оценке локальной погрешности вычислений. В качестве максимальной допустимой величины локальной погрешности принималась величина  $10^{-8}$ . В свою очередь, итерации контролировались по оценке погрешности вычислений, максимальное допустимое значение которой принималось равным  $10^{-10}$ . Результаты интегрирования представлены на фиг. 9–11.



Фиг. 11

На фиг. 9 представлены различные конфигурации стержневой системы, соответствующие движению в интервале  $0 \leq t \leq 10$  с и упорядоченные по времени с шагом около 0.5 с (кривые 1–20). На фиг. 10 показаны координаты  $X_k, Y_k$  как функции времени  $t$  для выбранного ряда значений номера узлов  $t$ . В левой части фиг. 11 точками показано, как меняется шаг интегрирования при его адаптации к процессу построения ИК по оценке локальной погрешности вычислений, в правой части точками дана зависимость числа итераций от времени; при заданных параметрах точности вычислений среднее число итераций равно 7–8.

Проведение расчетов без адаптации шага к ИК (по оценке локальной ошибки интегрирования) оказалось в значительной степени неэффективным. Интегрирование уравнений движения рассматриваемой конструкции по алгоритму (5.1) без использования процедуры параметризации практически невозможно, поскольку простые итерации расходятся в начале интегрирования при всех разумных значениях шага интегрирования.

Так же как и в предыдущей задаче, интегрирование непараметризованных уравнений с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона или его модифицированного варианта позволило получить решение. Но это оказалось менее эффективным по сравнению с процедурой интегрирования параметризованных уравнений с использованием простых итераций. Временные затраты оказались примерно в 1.6 раза большими при использовании метода Ньютона–Рафсона и в 1.4 раза большими при использовании модифицированного метода Ньютона–Рафсона. При этом разница временных затрат увеличивается с ростом размерности задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-000-71, 01-01-00038).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Bathe, K.-J., Wilson, E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 528 p.
3. Данилин А.Н. Нелинейные уравнения движения гибких стержневых систем //Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 177–188.
4. Данилин А.Н. Плоская задача динамики космических систем с гибкими одномерными элементами //Вестн. МАИ. 1995. Т. 2. № 2. С. 61–68.
5. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 161–175.

6. *Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V.* Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether // *Comput. and Structures*. 1999. V. 72. № 1–3. P. 141–147.
7. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
8. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
9. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
10. *Шалашилин Е.Б., Кузнецов Е.Б.* Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру // *Докл. РАН*. 1993. Т. 329. № 4. С. 426–428.
11. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // *Ж. вычисл. математики и мат. физики*. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792–1805.
12. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Наилучший параметр продолжения решения // *Докл. РАН*. 1994. Т. 334. № 5. С. 566–568.
13. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру // *ПММ*. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 14–21.
14. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.
15. *Данилин А.Н., Шалашилин В.И.* О параметризации нелинейных уравнений деформирования твердого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 2000. № 1. С. 82–92.
16. *Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Berlin, etc.: Springer, 1987 = *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
17. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. V.2, Berlin etc.: Springer, 1996 = *Хайпер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
18. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Т.1. М.: Наука, 1973. 631 с.
19. *Danilin A.N., Kuznetsov E.B., Shalashilin V.I.* The best parametrization and numerical solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of the second order // *Functional Differential Equations*. 2001. V. 8. № 1–2, P. 141–146.
20. *Копылов А.В., Кузнецов Е.Б.* Об одном подходе к численному интегрированию задачи Коши для дифференциального уравнения с запаздыванием // *Ж. вычисл. математики и мат. физики*. 2001. Т. 41. № 10. С. 1547–1556.