УДК 539.3:534.1

© 2003 г. Ю. Г. Балакирев

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ БУБНОВА

Исследуются свободные колебания механических систем методом Бубнова с использованием координатных функций, не удовлетворяющих всем граничным условиям задачи. Для устранения невязок в граничных условиях вводятся корректирующие функции, ортогональные ко всем учтенным в расчете координатным функциям при анализе собственных колебаний механических систем. Такой способ построения корректирующих функций выявляет существование в частотном уравнении и в выражениях для форм колебаний разностей близких чисел и при учете заданного числа N координатных функций обеспечивает повышение точности расчета всех собственных частот механической системы, не превосходящих $(N+1)$-ю парциальную частоту, с увеличением числа членов степенного ряда по частотному параметру в корректирующих функциях. В пределе при стремлении к бесконечности числа членов этого степенного ряда обеспечивается получение точных значений частот и форм колебаний системы в указанном частотном диапазоне.

Истоки и развитие метода Бубнова подробно исследованы в книге Э.И Григолюка [1]. Координатные функции в методе Бубнова должны удовлетворять всем граничным условиям краевой задачи, и часто подбор такой полной системы функций становится сложным. Был рассмотрен [2, 3] эффективный способ преодоления этой трудности путем введения корректирующих функций.

Ниже в отличие от работ [2, 3] при анализе собственных колебаний механических систем предлагается корректирующие функции, каждая из которых представляется степенным рядом по частотному параметру, ортогонализировать ко всем учтенным в расчете координатным функциям. Показано, что количество учтенных координатных функций ограничивает сверху исследуемый частотный диапазон механической системы. Корректирующие функции устраняют невязки в граничных условиях и повышают точность расчета собственных частот и форм колебаний в рассматриваемом частотном диапазоне. В пределе при стремлении к бесконечности числа членов степенного ряда в корректирующих функциях обеспечивается получение точных значений частот и форм колебаний системы только в указанном частотном диапазоне. Ортогонализация корректирующих функций к учтенным в расчете координатным функциям в задачах синтеза динамических характеристик составных конструкций позволила устранить "развал" решения при его реализации на ЭВМ [4–6].

1. Корректирующие функции в задачах динамики. Рассматривается одномерная краевая задача определения собственных частот и форм колебаний механической системы, записываемая в виде

$$\begin{aligned} &L(u) - \lambda u = 0 \\ &M_i(u(a)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad M_i(u(b)) = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{aligned} \tag{1.1}$$

(L – оператор краевой задачи порядка $2n$, λ – частотный параметр, $u(x)$ – искомая функция, M_t – операторы граничных условий, $[a, b]$ – отрезок определения краевой задачи).

Пусть имеется полная на отрезке $[a, b]$ система координатных функций $\{\varphi_k\}$, не удовлетворяющая (или удовлетворяющая не всем) граничным условиям решаемой краевой задачи (1.1).

Следуя описанному ранее подходу [3], общее (а не частное, как в классическом методе Бубнова) решение краевой задачи (1.1) ищем в виде

$$u = \sum_f(x) + \sum_\varphi(x); \quad \sum_f(x) = \sum_{i=1}^{2n} C_i f_i(x), \quad \sum_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x) \tag{1.2}$$

где f_i $(i = 1, 2,\ldots, 2n)$ корректирующие функции, вводимые для устранения невязок в граничных условиях.

Постоянные C_i в формуле (1.2) определяются из граничных условий задачи, а коэффициенты A_k определяются с помощью процедуры Бубнова: решение (1.2) подставляется в исходное уравнение (1.1), которое затем поочередно ортогонализируется на отрезке $[a, b]$ к учтенным в расчете функциям φ_k $(k = 1, 2,\ldots, N)$.

Итак, постоянные C_i определяем из граничных условий задачи

$$M_j\left(\sum_f(x)\right) + M_j\left(\sum_\varphi(x)\right) = 0 \tag{1.3}$$
$$(x = a \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad x = b \quad \text{при} \quad j = n+1, n+2, \ldots, 2n)$$

Уравнения для вычисления коэффициентов A_k имеют вид:

$$\int_a^b\left[L\left(\sum_f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j\varphi_j(x)\right) - \lambda\left(\sum_f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j\varphi_j(x)\right)\right]\varphi_k(x)dx = 0 \tag{1.4}$$

В реальных расчетах число уравнений (1.4) конечно: $k = 1, 2,\ldots, N$, а потому получаемое решение является приближенным. Из равенства нулю определителя однородной системы алгебраических уравнений следует уравнение для определения собственных частот исследуемой механической системы. Однозначность определения форм колебаний, определяемых значениями коэффициентов C_i, A_k, обеспечивается введением дополнительного условия нормировки.

Если координатные функции удовлетворяют всем краевым условиям, то из уравнений (1.3) следует, что все C_i равны нулю. При этом уравнения (1.4) переходят в классическую систему уравнений метода Бубнова, из которых можно получить приближенные значения N искомых низших частот и форм колебаний. Отличия вычисленных значений частоты и формы от точного решения растут с увеличением номера тона колебаний.

Если координатные функции – решения краевой задачи, отличающейся от (1.1) только краевыми условиями, то каждой функции φ_k соответствует своя парциальная частота σ_k. Если такие координатные функции неизвестны, их и соответствующие им парциальные частоты можно приближенно определить методом Бубнова из системы (1.4) при $C_i = 0$ $(i = 1, 2,\ldots, 2n)$. Иными словами, этот случай всегда можно реализовать с помощью перехода к новым координатным функциям, т.е. с помощью линейного преобразования в уравнениях (1.2) – (1.4).

При этом коэффициенты A_k в уравнениях (1.4) оказываются не связанными между собой. Если ни одна из искомых частот не совпадает с парциальными частотами, то с помощью уравнений (1.4) можно исключить A_k из уравнений (1.3) и (1.2). Если координатные функции не удовлетворяют только нескольким (например, одному) граничным условиям исходной задачи, то количество корректирующих функций равно числу неудовлетворенных граничных условий. Иногда таким образом удается построить точное решение в рядах для достаточно сложных механических систем [3].

В соответствии с описанным ранее подходом [3] корректирующие функции $f_i(x)$ представляются в виде степенного ряда по частотному параметру

$$f_i(x) = f_{0i}(x) + \lambda f_{1i}(x) + \ldots + \lambda^p f_{pi}(x) \tag{1.5}$$

Функции $f_{0i}(x)$, $a_{1i}(x), \ldots, f_{pi}(x)$ определяются из рекуррентной последовательности статических краевых задач вида

$$\begin{gathered} L(f_{0i}) = \sum_{l=1}^{N} B_l \varphi_l(x), \quad M_j(f_{0i}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n; \quad j \neq i \\ M_i(f_{0i}) = 1; \quad \int_a^b f_{0i} \varphi_l(x) dx = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N \\ L(f_{ki}) = f_{(k-1)i}, \quad M_j(f_{ki}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n; \quad k = 1, 2, \ldots, p \end{gathered} \tag{1.6}$$

Напомним, что в граничных условиях аргумент функций принимает конкретное значение ($x = a$ или $x = b$).

В уравнениях (1.6) корректирующие функции ортогональны ко всем учтенным в расчете координатным функциям, а в работе [3] корректирующие функции ортогонализируются только к координатным функциям с нулевыми парциальными частотами, которые описывают перемещение механической системы как твердого тела.

Первые функции f_{0i} в формулах (1.5) устраняют невязки в граничных условиях и вместе с последующими функциями f_{ki} ($k = 1, 2, \ldots, p$) ускоряют сходимость рядов по координатным функциям в полученном решении.

Пусть координатные функции $\{\varphi_k\}$ – решения (базовой) краевой задачи вида (1.1) с измененным одним краевым условием. Пусть для определенности невыполненное граничное условие имеет вид

$$M_i[u(b)] = 0 \tag{1.7}$$

В этом случае [3] достаточно ввести одну корректирующую функцию $f(x)$. Тогда решение задачи (1.1) можно записать в виде

$$u = Cf(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x) \tag{1.8}$$

В системе (1.3) останется лишь одно уравнение

$$CM_i(f(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k M_i[\varphi_k(b)] = 0 \tag{1.9}$$

Уравнения (1.4) примут вид

$$\begin{gathered} a_k(\sigma_k - \lambda) A_k - C a_k B_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N \\ a_k(\sigma_k - \lambda) A_k - C\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1} M_i[\varphi_k(b)] = 0, \quad k = N+1, N+2, \ldots \end{gathered} \tag{1.10}$$

Если искомые частоты не совпадают ни с одной из парциальных частот σ_k, то с помощью уравнений (1.10) можно исключить A_k из соотношений (1.8) и (1.9):

$$u = C\left[f_i(x) + \sum_{k=1}^{N}\frac{B_k\varphi_k(x)}{\sigma_k-\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1}\frac{M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x)}{a_k(\sigma_k-\lambda)}\right]$$

$$C\left[M_i(f_i(b)) + \sum_{k=1}^{N}\frac{B_kM_i[\varphi_k(b)]}{\sigma_k-\lambda} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{a_k(\sigma_k-\lambda)}\right] = 0 \qquad (1.11)$$

Из равенства нулю выражения в квадратных скобках во втором уравнении (1.11) следует уравнение для расчета собственных частот системы.

Каждая из N первых координатных функций представлена в уравнениях (1.11) слагаемым, пропорциональным $(\sigma_k - \lambda)^{-1}$, которое не зависит от количества членов степенного ряда в корректирующей функции (1.5).

Если $\sigma_k = 0$, то соответствующее слагаемое не может быть представлено никаким степенным рядом, а потому ортогонализировать корректирующую функцию к координатным функциям, описывающим движение базовой (по терминологии работы [3]) системы как твердого тела, нужно обязательно.

Если же $\sigma_k \neq 0$, то имеем:

при $\lambda < \sigma_k$

$$\frac{1}{\sigma_k-\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{\sigma_k^{l+1}} = \sum_{l=0}^{p}\frac{\lambda^l}{\sigma_k^{l+1}} + \left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1}\sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{\lambda^l}{\sigma_k^{l+1}} = \sum_{l=0}^{p}\frac{\lambda^l}{\sigma_k^{l+1}} + \left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1}\frac{1}{\sigma_k-\lambda} \qquad (1.12)$$

при $\lambda > \sigma_k$

$$\frac{1}{\sigma_k-\lambda} = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sigma_k^l}{\lambda^{l+1}} = -\sum_{l=0}^{p}\frac{\sigma_k^l}{\lambda^{l+1}} + \left(\frac{\sigma_k}{\lambda}\right)^{p+1}\sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{\sigma_k^l}{\lambda^{l+1}} = -\sum_{l=0}^{p}\frac{\sigma_k^l}{\lambda^{l+1}} + \left(\frac{\sigma_k}{\lambda}\right)^{p+1}\frac{1}{\sigma_k-\lambda} \qquad (1.13)$$

Отметим, что при любых конечных значениях p в формулах (1.12), (1.13), если $\lambda \neq \sigma_k$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{\sigma_k-\lambda} = \sum_{l=0}^{p}\frac{\lambda^l}{\sigma_k^{l+1}} + \left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{p+1}\frac{1}{\sigma_k-\lambda} = -\sum_{l=0}^{p}\frac{\sigma_k^l}{\lambda^{l+1}} + \left(\frac{\sigma_k}{\lambda}\right)^{p+1}\frac{1}{\sigma_k-\lambda} \qquad (1.14)$$

При увеличении p в соотношениях (1.12), (1.13) при оговоренных ограничениях, накладываемых на величину λ, вторые слагаемые уменьшаются по модулю, становясь с некоторого значения p пренебрежимо малыми по сравнению с первыми слагаемыми, а в пределе при $p \to \infty$ вторые слагаемые стремятся к нулю.

Если же значения λ выходят за оговоренные для каждого уравнения пределы, то бесконечные степенные ряды в формулах (1.12), (1.13) расходятся, а выделение отрезка из p первых членов расходящихся рядов (как в (1.14)) приводит к появлению разностей двух близких чисел. Пренебрежение вторыми слагаемыми в (1.14) при "неправильных" значениях λ приведет к грубой ошибке: оба слагаемых в сумме близки по модулю, но имеют различные знаки. Чем больше p (и чем дальше λ от границ "правильной" области), тем ближе модули обоих слагаемых. Естественно, в этих условиях переход к пределу при $p \to \infty$ невозможен. В реальных же вычислениях "развал" решения может наступить при конечном значении p.

Итак, предлагаемая здесь ортогонализация корректирующих функций к N первым координатным функциям приводит к тому, что в частотном диапазоне $0 \leq \lambda < \sigma_{N+1}$ степенной ряд в (1.5) при $p \to \infty$ сходится к величине, характеризующей "вклад" в решение остальных координатных функций φ_k ($k = N + 1, N + 2,\ldots$), так что последние (третьи) слагаемые в квадратных скобках формул (1.11) исчезают. В расчетах на ЭВМ возможность пренебрежения этими слагаемыми при вычислениях низших частот и форм колебаний механических систем реализуется при конечном достаточно малом значении степени полинома p (это значение p уменьшается с увеличением числа N учтенных в расчете координатных функций).

2. Продольные колебания стержня. Рассмотрим задачу расчета собственных частот и форм продольных колебаний консольно закрепленного однородного стержня, определяемых из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \lambda^2 u = 0; \quad u(0) = \frac{du(1)}{d\alpha} = 0 \quad \left(\alpha = \frac{x}{l}, \lambda^2 = \frac{m\omega^2 l^2}{EF}\right) \tag{2.1}$$

где l – длина стержня, m – его погонная масса, EF – жесткость на растяжение-сжатие, ω – круговая частота колебаний, x – продольная координата сечений стержня, отсчитываемая от нижнего закрепленного конца.

Задача (2.1) имеет точное решение, которое получается и методом Бубнова, если выбрать координатные функции $\{\sin(k-1/2)\pi\alpha\}$ ($l = 1, 2, \ldots, \infty$):

$$\lambda_k = (k-1/2)\pi; \quad u_k = \sin(k-1/2)\pi\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Если выбрать полную систему координатных функций $\{\varphi_k\} = \{\sin k\pi\alpha\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) (формы колебаний стержня с закрепленными концами), которые не удовлетворяют лишь одному граничному условию, то нужно ввести одну корректирующую функцию. Решение задачи представится в виде

$$u = C(f_0(\alpha) + \lambda^2 f_1(\alpha) + \ldots + \lambda^{2t} f_t(\alpha)) + \sum_{k=1}^{n_1} A_k \sin k\pi\alpha + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} A_k \sin k\pi\alpha \tag{2.3}$$

Функции $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_t(\alpha)$ – решения последовательности статических краевых задач

$$\frac{d^2 f_0}{d\alpha^2} = -\sum_{k=1}^{n_1} B_k \sin k\pi\alpha; \quad f_0(0) = 0; \quad f_0'(1) = 1; \quad \int_0^1 f_0 \sin k\pi\alpha d\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n_1$$
$$\frac{d^2 f_j}{d\alpha^2} = -f_{j-1}; \quad f_j(0) = 0, \quad f_j(1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t \tag{2.4}$$

Первые два члена корректирующей функции, определенные из краевых задач (2.4), примут вид

$$f_0 = \frac{2}{2n_1+1}\left(\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{k\pi}\right), \quad f_1 = \frac{2}{2n_1+1}\left(\frac{\alpha-\alpha^3}{12} + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{(k\pi)^3}\right) \tag{2.5}$$

Если ограничиться одним членом f_0 в корректирующей функции, то решение исходной задачи запишется в виде

$$u(\alpha) = C_1\left\{\frac{1}{2n_1+1}\left(\alpha + 2\sum_{k=1}^{n_1} \frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{k\pi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{2n_1+1}\sum_{k=1}^{n_1} \frac{(-1)^k k\pi \sin k\pi\alpha}{\lambda^2 - (k\pi)^2} + \frac{2\lambda^2}{2n_1+1}\sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{k\pi(\lambda^2 - (k\pi)^2)}\right\} \tag{2.6}$$

Частоты колебаний определяются из уравнения

$$1 + \frac{2}{2n_1+1}\sum_{k=1}^{n_1} \frac{(k\pi)^2}{\lambda^2 - (k\pi)^2} + \frac{2\lambda^2}{2n_1+1}\sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - (k\pi)^2} = 0 \tag{2.7}$$

При двучленном приближении корректирующей функции $f_0 + \lambda^2 f_1$ решение задачи (2.1) запишется в виде

$$u(\alpha) = \frac{C_1}{2n_1+1}\left\{\left(\alpha + 2\sum_{k=1}^{n_1}\frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{k\pi}\right) + \lambda^2\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{6} + 2\sum_{k=1}^{n_1}\frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{(k\pi)^3}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{n_1}\frac{(-1)^k k\pi \sin k\pi\alpha}{\lambda^2 - (k\pi)^2} + 2\lambda^4 \sum_{k=n_1+1}^{\infty}\frac{(-1)^k \sin k\pi\alpha}{(k\pi)^3(\lambda^2 - (k\pi)^2)}\right\} \tag{2.8}$$

Соответствующее частотное уравнение получается при подстановке выражения (2.8) в граничное условие на свободном торце:

$$1 + \frac{2}{2n_1+1}\left\{\lambda^2\left(-\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n_1}\frac{1}{(k\pi)^2}\right) + \sum_{k=1}^{n_1}\frac{(k\pi)^2}{\lambda^2-(k\pi)^2} + \lambda^4\sum_{k=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2(\lambda^2-(k\pi)^2)}\right\} = 0 \tag{2.9}$$

Произвольный множитель C_1 в уравнениях (2.6), (2.8) доопределяется при введении того или иного условия нормировки для форм колебаний.

В предельном случае при $n_1 = 0$ решения (2.6), (2.7) и (2.8), (2.9) переходят в решения, полученные ранее [2].

На участке $(0, (n_1 + 1)\pi)$ корректирующий ряд по частотному параметру сходится при неограниченном увеличении числа членов. Поэтому при конкретном значении n_1 с увеличением числа членов корректирующего ряда последним членом в уравнении (2.9) можно пренебречь при поиске частот в интервале $(0, (n_1 + 1)\pi)$.

Первая собственная частота консольно закрепленного стержня ($\lambda_1 = \pi/2$) лежит в области сходимости корректирующего степенного ряда, а потому при ее поиске можно не учитывать ни одной координатной функции. Выпишем первые четыре члена корректирующего ряда, определяемые из краевых задач (2.4) при $n_1 = 0$:

$$f_0 = \alpha,\ f_1 = \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{6},\ f_2 = \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^3}{36} + \frac{7\alpha}{360},\ f_3 = -\frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^5}{720} - \frac{7\alpha^3}{2160} + \frac{31\alpha}{15120} \tag{2.10}$$

Решение краевой задачи (2.1) записывается в виде:

$$u(\alpha) = C_1\left\{\alpha + \lambda^2\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{6}\right) + \lambda^4\left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^3}{36} + \frac{7\alpha}{360}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda^6\left(-\frac{\alpha^7}{5040} + \frac{\alpha^5}{720} - \frac{7\alpha^3}{2160} + \frac{31\alpha}{15120}\right)\right\} \text{ (форма колебаний)} \tag{2.11}$$

$$1 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^4}{45} - \frac{2\lambda^2}{945} = 0 \text{ (частотное уравнение)} \tag{2.12}$$

Единственный положительный действительный корень уравнения (2.12) $\lambda_1 = 1.732051$ при учете двух членов корректирующего ряда, $\lambda_1 = 1.600720$ при учете трех членов корректирующего ряда и $\lambda_1 = 1.577660$ при учете четырех членов корректирующего ряда, а точное значение корня $\lambda_1 = \pi/2$.

Расчеты трех низших частот колебаний консольного стержня с использованием уравнений (2.7) и (2.9) проводились на ЭВМ с двойной точностью. С учетом одной координатной функции первая собственная частота определяется из уравнения (2.9) с тремя верными знаками, а из уравнения (2.7) – с погрешностью более 15%. С учетом десяти координатных функций из уравнения (2.9) получаем четыре верных знака для λ_1 и три верных знака для частот λ_2, λ_3. Погрешность расчета трех низших частот из уравнения (2.7) с учетом десяти координатных функций составляет ~2%. При учете ста координатных функций имеем шесть–семь верных знаков в значениях искомых частот из уравнения (2.9) и только два верных знака из уравнения (2.7).

Разложение точного выражения для формы колебаний по выбранным координатным функциям приводит к достаточно медленно сходящемуся ряду

$$u_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k\pi \sin k\pi\alpha}{\lambda_i^2 - (k\pi)^2} \tag{2.13}$$

При вычислении производной этого выражения в точке $\alpha = 1$ получим расходящийся ряд. Конечное число членов этого ряда присутствует и в уравнениях (2.7), (2.9). Процедура ортогонализации обнаруживает особенности решения: наличие малых разностей (второе слагаемое в (2.9)) и плохо сходящихся рядов (третье слагаемое в (2.9)). Эти особенности реально присутствуют в завуалированной форме и в решениях работ [2, 3].

3. Колебания стержня на упругих опорах. Собственные частоты и формы продольных колебаний стержня с упругими опорами в промежуточных сечениях определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \lambda^2 u = 0; \quad \frac{du(0)}{d\alpha} = \frac{du(1)}{d\alpha} = 0, \quad \left.\frac{du}{d\alpha}\right|_{\alpha_k - 0}^{\alpha_k + 0} = C_k u(\alpha_k), \quad u\Big|_{\alpha_k - 0}^{\alpha_k + 0} = 0 \tag{3.1}$$

$$\left(\alpha = \frac{x}{l}, \quad \lambda^2 = \frac{m\omega^2 l^2}{EF}, \quad \bar{C}_k = \frac{C_k l}{EF}\right)$$

(C_k – жесткость опоры в сечении $\alpha = \alpha_k$, остальные обозначения те же, что в разд. 2).

В качестве полной системы координатных функций выберем формы продольных колебаний свободного (без опор) стержня, т.е. $\{\varphi_i\} = \{\cos i\pi\alpha\}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$). Этим формам соответствуют собственные частоты и приведенные массы колебаний

$$\sigma_i^2 = (i\pi)^2, \quad a_i = \int_1^0 \varphi_i^2 da = \frac{1}{2}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как координатные функции не удовлетворяют динамическому условию на опорах, решение исходной задачи представим в виде

$$u(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} D_k f_k(\alpha) + \sum_{i=0}^{p} A_i \cos i\pi\alpha + \sum_{i=p+1}^{\infty} A_i^* \cos i\pi\alpha \tag{3.2}$$

Корректирующие функции, количество которых равно числу промежуточных опор, являются решениями статических краевых задач вида

$$\frac{d^2 f_k}{d\alpha^2} = -\sum_{i=0}^{p} D_{ki} \cos i\pi\alpha$$

$$\frac{df_k(-0)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df_k(1+0)}{d\alpha} = 0, \quad \left.\frac{df_k(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha_k - 0}^{\alpha_k + 0} = 1, \quad f_k(\alpha)\Big|_{\alpha_k - 0}^{\alpha_k + 0} = 0 \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 f_k \cos i\pi\alpha d\alpha = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, N; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, p$$

В уравнениях (3.3) сумма вида $\sum_{i=0}^{p} D_{kt}\cos i\pi\alpha$ не может быть нулевой, так как первая координатная функция описывает продольное смещение жесткого стержня и ей соответствует нулевая собственная частота [2, 3].

Решение краевой задачи (3.3) запишется в виде

$$f_k(\alpha) = f_k^*(\alpha) + 2\sum_{i=1}^{p}\frac{\cos i\pi\alpha_k \cos i\pi\alpha}{(i\pi)^2}$$

$$f_k^*(\alpha) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(\alpha^2+\alpha_k^2)+\alpha_k-\dfrac{1}{3}, & 0\le\alpha\le\alpha_k-0 \\ -\dfrac{1}{2}[\alpha^2+1]^2+\alpha_k^2+\dfrac{1}{6}, & \alpha_k+0\le\alpha\le 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

После подстановки выражения (3.2) в уравнение (3.1) и проведения процедуры Бубнова ортогонализации полученного выражения к координатным функциям получаются уравнения для определения неизвестных A_i. Коэффициенты D_k вычисляются из динамических условий на опорах

$$A_0 = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{N} D_k, \quad A_i(\lambda^2-(i\pi)^2) = 2\sum_{k=1}^{N} D_k\cos i\pi\alpha_k, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$A_i^*(\lambda^2-(i\pi)^2) = 2\lambda^2\sum_{k=1}^{N} D_k\frac{\cos i\pi\alpha_k}{(i\pi)^2}, \quad i = p+1, p+2, \dots \tag{3.5}$$

$$D_j = \bar{C}_j\left\{\sum_{k=1}^{N} D_k f_k(\alpha_k) + \sum_{i=1}^{p} A_i\cos i\pi\alpha_k + \sum_{i=p+1}^{\infty} A_i^*\cos i\pi\alpha_k\right\}$$

Из условия равенства нулю определителя системы (3.5) следует уравнение для вычисления частот колебаний стержня с промежуточными опорами.

Когда имеется одна опора в сечении $\alpha = \alpha_k$, уравнения (3.5) примут вид

$$A_0 = \frac{D_1}{\lambda^2}, \quad A_i(\lambda^2-(i\pi)^2) = 2D_1\cos i\pi\alpha_k, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$A_i^*(\lambda^2-(i\pi)^2) = \frac{2\lambda^2}{(i\pi)^2}D_1\cos i\pi\alpha_k, \quad i = p+1, p+2, \dots \tag{3.6}$$

$$D_1 = \bar{C}_k\left\{D_1\left[-\alpha_k^2+\alpha_k-\frac{1}{3}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\cos^2 i\pi\alpha_k}{(i\pi)^2}\right] + \sum_{i=0}^{p} A_i\cos i\pi\alpha_k + \sum_{i=p+1}^{\infty} A_i\cos i\pi\alpha_k\right\}$$

Если ни одна из частот стержня с опорой не совпадает ни с одной частотой стержня без опор, то неизвестные A_0, A_i, A_i^* исключаются из последнего уравнения (3.6) и получается следующее уравнение:

$$D_1\left\{\bar{C}_1\left[-\alpha_k^2+\alpha_k-\frac{1}{3}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\cos^2 i\pi\alpha_k}{(i\pi)^2}+\frac{1}{\lambda^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\cos^2 i\pi\alpha_k}{\lambda^2-(i\pi)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\lambda^2\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{\cos^2 i\pi\alpha_k}{(i\pi)^2[\lambda^2-(i\pi)^2]}\right]-1\right\} = 0 \tag{3.7}$$

Если $p = 0$, то из (3.7) следует частотное уравнение работы [2].

Частотное уравнение для стержня с опорой следует из условия равенства нулю выражения в фигурных скобках уравнения (3.7). Если опора абсолютно жесткая и расположена в сечении $\alpha_k = 0$, то частотное уравнение запишется в виде

$$-\frac{1}{3}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(i\pi)^2}+\frac{1}{\lambda^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda^2-(i\pi)^2}+2\lambda^2\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{1}{(i\pi)^2[\lambda^2-(i\pi)^2]} = 0 \tag{3.8}$$

С использованием известных сумм рядов при любом p в пределе при $i \to \infty$ уравнение (3.8) принимает вид, совпадающий с точным решением:

$$\frac{\mathrm{ctg}\lambda}{\lambda} = 0 \Rightarrow \cos\lambda = 0 \tag{3.9}$$

4. Изгибные колебания балки. Частоты и формы изгибных колебаний шарнирно опертой по торцам балки с упругой опорой в промежуточном сечении определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d^4w}{d\alpha^4}-\lambda^2 w = 0\\ \left.\frac{d^3w}{d\alpha^3}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = \bar{C}_{yk}w(\alpha_k), \quad \left.w\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = \left.\frac{dw}{d\alpha}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = \left.\frac{d^2w}{d\alpha^2}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = 0\\ w(0) = w(1) = \frac{d^2w(0)}{d\alpha^2} = \frac{d^2w(1)}{d\alpha^2} = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\left(\alpha = \frac{x}{l}, \quad \lambda^2 = \frac{m\omega^2 l^4}{EJ}, \quad \bar{C}_{yk} = \frac{C_{yk}l^3}{EJ}\right)$$

В уравнениях (4.1) m, EJ, l – погонная масса, изгибная жесткость и длина балки, w – прогиб балки, C_{yk} – линейная жесткость опоры в сечении $\alpha = x_k/l$.

Пусть координатными функциями служат формы колебаний шарнирно опертой по торцам балки, которые не удовлетворяют динамическому условию на упругой опоре и характеризуются соотношениями

$$a_{qi} = 1/2, \quad \lambda_{qi}^2 = (i\pi)^4, \quad \eta_i(\alpha) = \sin i\pi\alpha \tag{4.2}$$

Решение краевой задачи (4.1) представляется в виде

$$w = C_1 f + \sum_{i=1}^{n_1} A_i \sin i\pi\alpha + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} A_i^* \sin i\pi\alpha \tag{4.3}$$

Корректирующая функция f, ортогональная к первым n_1 координатным функциям, является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d^4f}{d\alpha^4} = \sum_{i=1}^{n_1} B_i \sin i\pi\alpha\\ \left.\frac{d^3f}{d\alpha^3}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = -1, \quad \left.f\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = \left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = \left.\frac{d^2f}{d\alpha^2}\right|_{\alpha_k-0}^{\alpha_k+0} = 0\\ f(0) = f(1) = \frac{d^2f(0)}{d\alpha^2} = \frac{d^2f(1)}{d\alpha^2} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\int_0^1 f\sin i\pi\alpha d\alpha = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n_1$$

Решение краевой задачи (4.9) записывается в виде

$$f = f^* + 2\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\sin i\pi\alpha_k}{(i\pi)^4} - \frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{3i\pi}\cos i\pi\alpha_k\right)\sin i\pi\alpha$$

$$f^* = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)}{6}\alpha - \dfrac{(\alpha_k-1)}{6}\alpha^3, & 0 \le \alpha \le \alpha_k - 0 \\ -\dfrac{\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k+1)}{6}(\alpha-1) - \dfrac{\alpha_k}{6}(\alpha-1)^3, & \alpha_k + 0 \le \alpha \le 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Система алгебраических уравнений относительно A_i получается после подстановки выражений (4.3), (4.5) в первое уравнение (4.1) и ортогонализации полученного выражения к координатным функциям $\{\eta_i\} = \{\sin i\pi\alpha\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$

$$\begin{gathered} A_i[(i\pi)^4 - \lambda^2] + 2C_1\left[\sin i\pi\alpha_k - \frac{\alpha_k(\alpha_k-1)(i\pi)^3}{3}\cos i\pi\alpha_k\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \\ A_i^*[(i\pi)^4 - \lambda^2] + 2\lambda^2 C_1\left[\frac{\sin i\pi\alpha_k}{(i\pi)^4} - \frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{3(i\pi)}\cos i\pi\alpha_k\right] = 0, \quad i = n_1+1, n_1+2, \ldots \end{gathered} \tag{4.6}$$

Коэффициент C_1 вычисляется из граничного условия на опоре

$$C_1 = \bar{C}_{yk}\left[C_1\left(-\frac{\alpha_k^2(\alpha_k^2-1)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{\sin i\pi\alpha_k}{(i\pi)^4} - \frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{3i\pi}\cos i\pi\alpha_k\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n_1} A_i \sin i\pi\alpha_k + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} A_i^* \sin i\pi\alpha_k\right] \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6), (4.7) образуют систему однородных алгебраических уравнений для определения собственных частот и форм колебаний.

Из условия равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение для балки с промежуточной опорой.

Решение в виде (4.6), (4.7) позволяет вычислить все частоты и формы колебаний при любом расположении упругой опоры (в том числе частоты и формы с узлом в сечении расположения промежуточной опоры). Для определения частот и форм колебаний балки с промежуточной опорой, не совпадающих ни с одной из частот и форм колебаний балки без опоры, частотное уравнение можно преобразовать к более обозримому виду, исключая координаты A_i и A_i^* с помощью уравнений (4.6) из выражений (4.3) и (4.7).

Введем обозначение

$$\chi_i(\alpha_k) = \frac{\sin i\pi\alpha_k}{(i\pi)^4} - \frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{3i\pi}\cos i\pi\alpha_k$$

Тогда частотное уравнение запишется в виде

$$1-\bar{C}_{yk}\Bigg[\underline{\left(-\frac{\alpha_k^2(\alpha_k-1)^2}{3}+2\sum_{i=1}^{n_1}\chi_i(\alpha_k)\sin i\pi\alpha_k\right)}-\underline{\underline{2\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(i\pi)^4}{(i\pi)^4-\lambda^2}\chi_i(\alpha_k)\sin i\pi\alpha_k}}-$$

$$-2\lambda^2\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{(i\pi)^4-\lambda^2}\chi_i(\alpha_k)\sin i\pi\alpha_k\Bigg]=0 \tag{4.8}$$

Формы колебаний вычисляются по формулам

$$w=C_1\left[f-2\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(i\pi)^4}{(i\pi)^4-\lambda^2}\chi_i(\alpha_k)\sin i\pi\alpha-2\lambda^2\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{(i\pi)^4-\lambda^2}\chi_i(\alpha_k)\sin i\pi\alpha\right] \tag{4.9}$$

Малая разность (подчеркнутые одной чертой члены в (4.8)) и отрезок плохо сходящегося ряда (подчеркнут двумя чертами в (4.8)) – это реальности решения, которые стали очевидными при использовании процедуры ортогонализации корректирующей функции к координатным функциям.

В заключение отметим, что разности близких чисел и функций можно заменить бесконечными рядами. Например, в уравнении (2.9)

$$-\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n_1}\frac{1}{(k\pi)^2}=-\sum_{k=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2} \tag{4.10}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00475).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И.* Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. М.: НИИ Механики МГУ, 1996. 58 с.
2. *Шмаков В.П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова-Галеркина к решению краевых задач // Инж. журн. МТТ. 1967. № 5. С. 129–136.
3. *Шмаков В.П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова – Галеркина // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 80–92.
4. *Григорьев В.Г.* О вычислительных аспектах применения корректирующих рядов при синтезе подконструкций по методу свободных границ // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1998. № 4. С. 17–27.
5. *Шмаков В.П., Григорьев В.Г.* Синтез динамических характеристик аналитических и дискретных моделей подконструкций с использованием корректирующих рядов // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 2000. № 2. С. 5–19.
6. *Балакирев Ю.Г.* Об улучшении сходимости модальных разложений в задачах синтеза динамических характеристик составных конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С.159–170.

Королев, Московская обл.
e-mail: mamai@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
23.XII.2002