

УДК 539.3

© 2003 г. В. И. Мамай

О ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ СДВИГОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

С целью выяснения пределов применимости предложенной ранее [1] модели сдвиговых нераспространяющихся расслоений для расчета трехслойных стержней с дефектами типа расслоений построено и проанализировано численное решение соответствующей трехмерной задачи теории упругости с использованием программного конечноэлементного комплекса ANSYS (Analysis of Systems) версии 6.1. Оценены пределы применимости предложенной модели расслоений.

Анализ состояний исследований по проблеме прочности тонкостенных многослойных конструкций с дефектами типа расслоений можно найти в работе [2]. Для расчета трехслойных стержней с расслоениями была предложена [1] новая модель нераспространяющихся сдвиговых расслоений, обобщенная [3] на случай трехслойных пластин с расслоениями.

Разработанная модель [1, 3] естественным образом обобщает известную модель Кирхгофа, сдвиговую модель С.П. Тимошенко и модель ломаной линии Э.И. Григолюка [4] на трехслойные конструкции с расслоениями сдвигового типа и поперечным обжатием заполнителя [5].

Оценка достоверности принятых при построении модели [1] гипотез деформирования трехслойного стержня с расслоениями сдвигового типа проведена путем анализа результатов численных расчетов.

1. Модель сдвигового расслоения. Обсудим сначала основные гипотезы принятой модели сдвигового расслоения. Рассматривается изгиб при термосиловом статическом нагружении трехслойных стержней несимметричной структуры по толщине с дефектами на поверхностях контакта слоев типа расслоений. Внешние слои считаются тонкими, упругими, изотропными, различной толщины, для них полагается справедливой гипотеза плоских сечений стержней Бернулли. Промежуточный средний слой – заполнитель считается трансверсально-изотропным, воспринимающим продольные и поперечные силы и моменты, а также передающим поперечный сдвиг и сжимаемым в поперечном направлении.

Трехслойный стержень находится под действием поперечных нагрузок $q_1(x)$ и $q_2(x)$, приложенных к несущим слоям, и неравномерно нагрет по длине и толщине до заданной температуры $T(x, z)$ (фиг. 1).

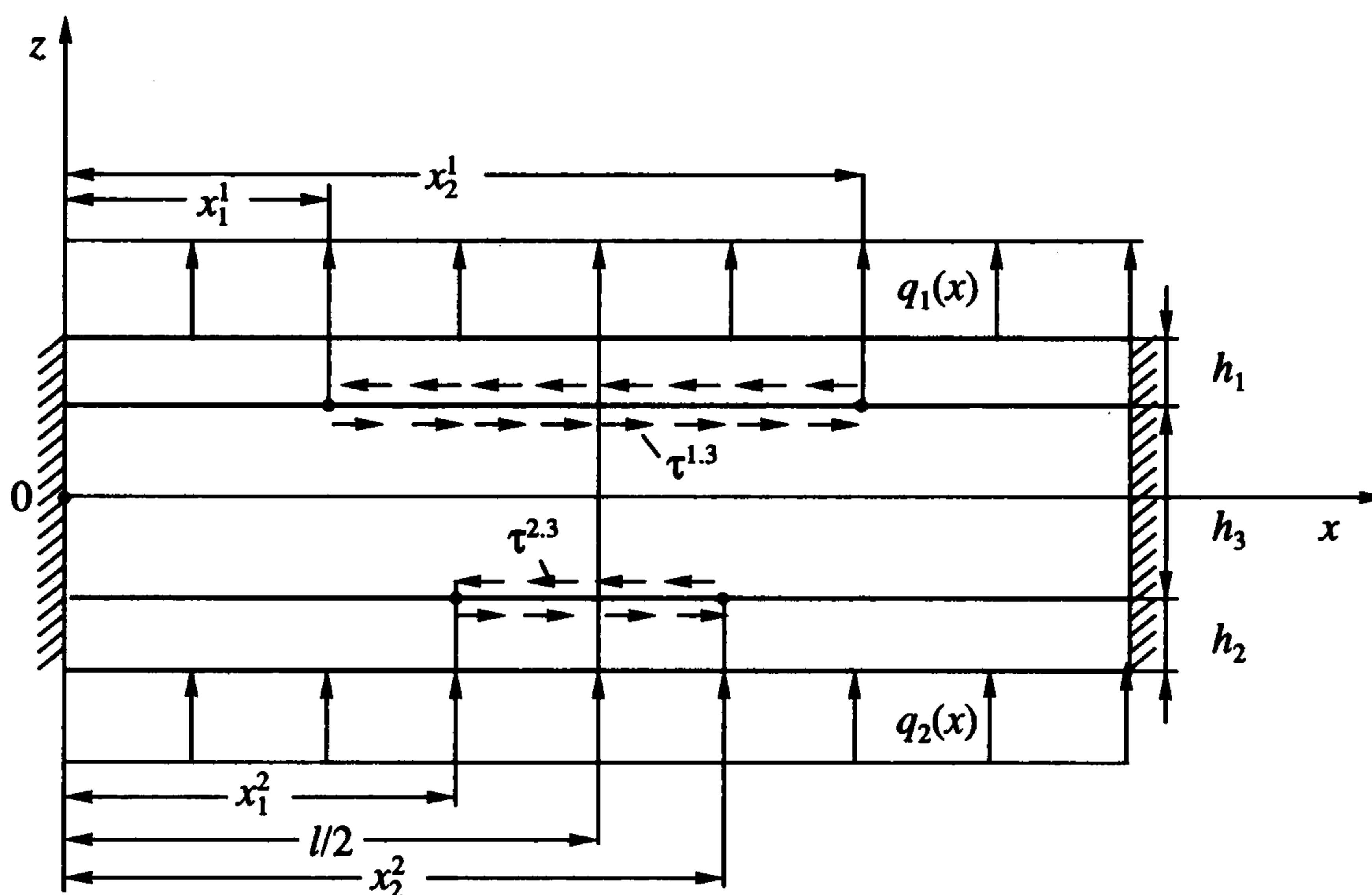
Вводятся следующие обозначения: x – продольная координата ($0 < x < l$), z – поперечная координата, $h_1, h_2, h_3 = 2c$ – толщины соответственно первого, второго несущих слоев и заполнителя, $\Delta x^k = x_2^k - x_1^k$ – длина расслоения ($k = 1, 2$ – номер расслоения).

Для описания деформирования трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем и расслоениями сдвигового типа гипотезы ломаной линии недостаточно. Необходимо ввести дополнительные предположения.

Для учета сжимаемости заполнителя принимается линейный закон распределения нормальных перемещений по толщине среднего слоя [5]

$$w^3 = w + \frac{z}{c}v; \quad w = \frac{w^1 + w^2}{2}; \quad v = \frac{w^1 - w^2}{2}$$

где w^k – прогиб k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), v – функция, характеризующая обжатие заполнителя. Для несжимаемого заполнителя $w^1 = w^2$ и $v = 0$.



Фиг. 1

Предполагается, что на поверхностях контакта внешних слоев с заполнителем имеются дефектные зоны, которые моделируются нераспространяющимися сдвиговыми расслоениями. Для них характерен разрыв только продольных компонент вектора перемещений.

На границах контакта несущих слоев с заполнителем нормальные перемещения считаются непрерывными во всей области, а тангенциальные перемещения непрерывны, пока поперечные касательные напряжения σ_{xz}^{k3} ($k = 1, 2$), передаваемые в зонах расслоений от несущих слоев заполнителю, не превысят предельно допустимых для материала заполнителя величин, определяемых по закону Кулона–Амонтона

$$\sigma_{xz}^{k3} \leq [\sigma_{xz}^{k3}] + f_k \sigma_z^3$$

где $[\sigma_{xz}^{k3}]$ – заданные предельные для данного материала значения касательных напряжений, характеризующие сцепление контактируемых поверхностей, не зависящее от нормального давления, f_k – коэффициенты трения, σ_z^3 – нормальные напряжения на границах контакта заполнителя с несущими слоями.

После того как межслоевые касательные напряжения σ_{xz}^{k3} превзойдут допустимую величину, возникает проскальзывание между слоями (взаимные смещения слоев в зонах расслоений) и появляются межслоевые касательные усилия τ^{k3} ($k = 1, 2$) (фиг. 1).

По аналогии с теорией составных стержней с упругоподатливыми связями сдвига принимается, что ввиду малости деформаций межслоевые касательные усилия пропорциональны взаимным смещениям слоев в зонах расслоений

$$\tau^{k3}(x) = \lambda_k (u^k - u^3) \Big|_{z=(-1)^{k+1}c} \quad x \in [\Delta x^k], \quad k = 1, 2$$

где λ_k – заданные постоянные, аналогичные по смыслу коэффициентам жесткости швов в теории составных стержней, u^k – продольные перемещения k -го несущего слоя.

Эти соотношения могут быть обобщены на случай учета нелинейной связи между усилиями τ^{k3} и взаимными смещениями слоев в областях расслоений. В настоящей работе анализируются только линейные соотношения.

Продольные перемещения слоев трехслойного стержня для бездефектных и дефектных областей определяются следующими формулами:

$$u^1 = u_1 - (z - c) \frac{dw^1}{dx}, \quad c \leq z \leq c + h_1; \quad u^2 = u_2 - (z + c) \frac{dw^2}{dx}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c$$

$$u^3 = u + z \left(\alpha^3 - \frac{dw}{dx} \right) - \frac{z^2}{2c} \frac{dv}{dx}, \quad -c_2 \leq z \leq c$$

где u_1, u_2, u – продольные перемещения срединной линии несущих слоев и заполнителя, $\alpha^3 = \epsilon_{xz}^3$ – угол поперечного сдвига в заполнителе.

В бездефектной области в силу непрерывности продольных перемещений имеем

$$u^1 = u^3|_{z=c} = u + c \left(\alpha^3 - \frac{dw}{dx} \right) - \frac{c}{2} \frac{dv}{dx}, \quad u^2 = u^3|_{z=-c} = u - c \left(\alpha^3 - \frac{dw}{dx} \right) - \frac{c}{2} \frac{dv}{dx}$$

Таким образом, в соответствии с принятыми гипотезами продольные перемещения u^i ($i = 1, 2, 3$) и нормальные перемещения w^i ($i = 1, 2, 3$) имеют следующее распределение по толщине трехслойного пакета.

Продольные перемещения u^1, u^2, u^3 при переходе от слоя к слою непрерывны в бездефектной области и терпят конечный разрыв в зонах сдвиговых расслоений. Закон изменения по толщине перемещений u^1 и u^2 (наружные слои) линейный, перемещения u^3 (заполнитель) – нелинейный.

Нормальные перемещения w^1, w^3, w^2 в бездефектных областях и в зонах сдвиговых расслоений непрерывны при переходе от слоя к слою, постоянны по толщине в несущих слоях и распределены по толщине заполнителя по линейному закону.

Из вариационного уравнения задачи следует, что полным и обобщенным усилиям $N^1, N^2, N, H, M, L, dM/dx, dL/dx$ трехслойного стержня с расслоениями должны соответствовать следующие обобщенные перемещения: $u^1, u^2, u, \alpha^3, dw/dx, dv/dx, w, v$. Поэтому число основных независимых неизвестных задачи об изгибе трехслойного осесимметрично нагруженного стержня равно 16.

Кроме того, неизвестные касательные межслоевые усилия τ^{k3} взаимодействия слоев в зонах расслоений определяются через продольные перемещения на границах контакта дефектных областей.

Здесь ограничимся лишь обсуждением модели сдвигового нераспространяющегося расслоения. Дифференциальные уравнения задачи, граничные условия и условия стыковки решений в дефектных и бездефектных зонах были приведены и подробно обсуждены ранее [2, 3], причем была также приведена система разрешающих уравнений в нормальной форме Коши для интегрирования их методом ортогональной прогонки.

2. Тестирование программы. Тестирование программы выполнено на классической задаче изгиба с учетом сдвига призматического стержня длиной l прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) под действием равномерного поперечного внешнего давления q .

Теория призматических стержней Бернулли дает следующие формулы для величин максимального прогиба в центре стержня с двумя опорами:

$$w = w^b + w^s; \quad w^b = \frac{k}{384} \frac{Ql^3}{EJ}, \quad w^s = \frac{Ql}{8G\omega_c} \quad (2.1)$$

Здесь $Q = qlb$ – величина распределенной внешней нагрузки, $J = bh^3/12$ – момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси; $\omega_c = bh$ – приведенная площадь поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, $G = E/(2(1 + \nu))$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, для шарнирно опертого стержня $k = 5$, для жесткого защемления на обеих опорах $k = 1$.

Одномерное решение для стержня Бернулли сопоставляется с численным решением трехмерной задачи линейной теории упругости для трехмерного стержня. Было построено конечноэлементное решение задачи изгиба трехмерного однородного призматического стержня ($b \times h \times l$) прямоугольного поперечного сечения под действием равномерного давления q . Использовались программный комплекс ANSYS версии 6.1 и та же методика разбиения объемов гексагональными конечными элементами, что и в последующей задаче изгиба стержня с расслоением.

Для трехмерного стержня принимались следующие безразмерные геометрические и жесткостные характеристики: безразмерная длина стержня $L = 0.2-1.0$; отношение сторон стержня прямоугольного поперечного сечения всегда составляло $h/b = 4/5$, отношение h/l изменялось в пределах от $1/25$ до $1/5$; $E = 0.7 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$.

Для относительно более короткого стержня из данного ряда вклад сдвиговой составляющей для шарнирного опирания составляет в соответствии с формулами (2.1) 8.3%, для жесткого защемления – 41.6%. С увеличением длины стержня вклад сдвиговой составляющей уменьшается, как это показано на фиг. 2, где по оси абсцисс отложена относительная длина стержня L , а по оси ординат – величины w^s/w^b в процентах; кривая 1 соответствует случаю жесткого защемления стержня на опорах, кривая 2 – шарнирному опиранию.

Точность вычислений прогибов методом конечных элементов для шарнирного опирания выше, чем для жесткого защемления. Это объясняется тем, что условия шарнирного опирания являются естественными граничными условиями соответствующей вариационной задачи. Для балок с длиной от $L = 0.2$ до $L = 1$ отличие стержневого решения для нормального прогиба от трехмерного конечноэлементного составляет для шарнирного опирания доли процента, а для жесткого защемления не превышает 1.3%. Сопоставление результатов вычисления максимальных прогибов по балочной теории и методом конечных элементов дано на фиг. 3, где по оси абсцисс отложена относительная длина стержня, а по оси ординат – отношение прогиба в центре пролета стержня (w) по формуле (2.1) к вычисленному методом конечных элементов прогибу (w_c) в процентах; кривая 1 соответствует случаю шарнирного опирания стержня на опорах, кривая 2 – жесткому защемлению на опорах.

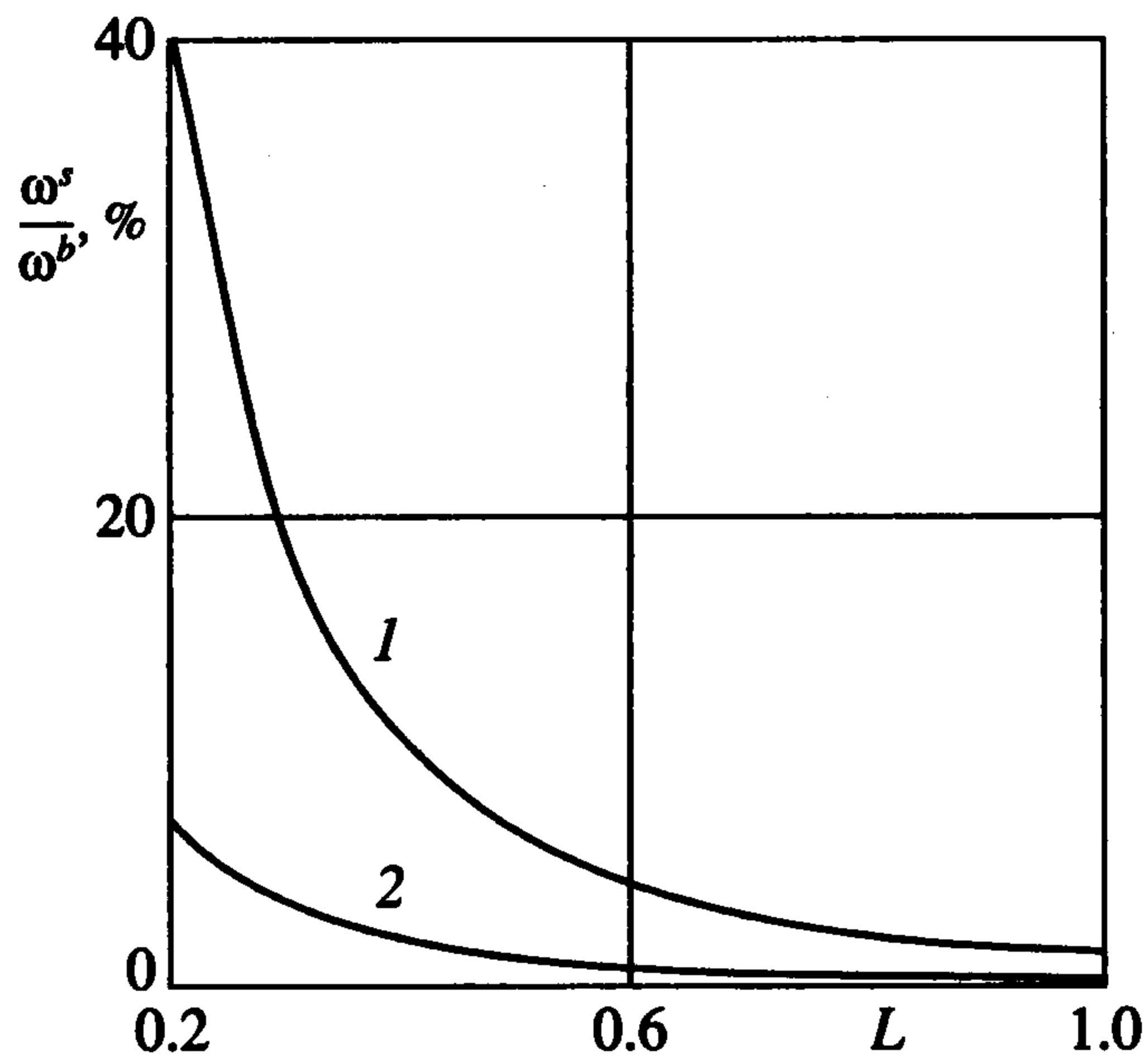
Таким образом, тестовые вычисления показали, что используемый метод конечных элементов и принятое конечноэлементное представление адекватно описывают процесс изгиба со сдвигом однородного трехмерного стержня без расслоений.

3. Решение трехмерной задачи линейной теории упругости для стержня с расслоением. Используется метод конечных элементов программного комплекса ANSYS 6.1.

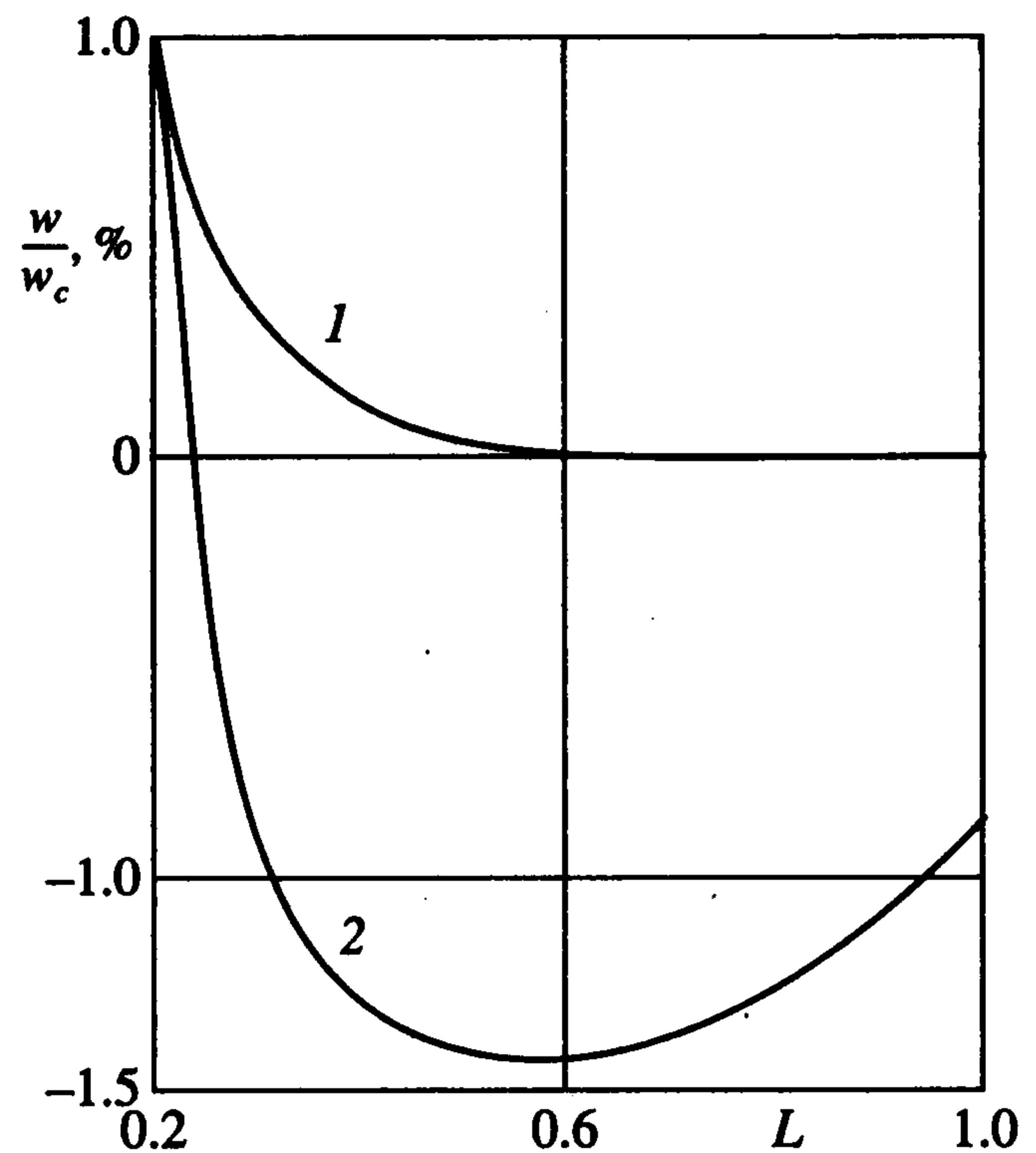
Как известно, ключевые моменты при решении задачи методом конечных элементов – выбор типа конечного элемента, способ разбиения объема на эти элементы и метод решения систем алгебраических уравнений. В рассматриваемом здесь случае задача усложняется еще и тем, что в зоне расслоения приходится решать итерационным методом нелинейную контактную задачу теории упругости. Даже для такого мощного вычислительного инструмента задача достаточно сложна.

Конечные элементы. В качестве конечных элементов приняты SOLID45, 64 и 95.

Конечный элемент SOLID45 – это трехмерный восьмиузловой гексагональный элемент, который может трансформироваться в призму и тетраэдр. Узлы расположены в вершинах гексаэдра и каждый из них имеет три степени свободы. Этот элемент позволяет изучать пластичность, ползучесть, выпучивание, предельные напря-



Фиг. 2



Фиг. 3

жения, большие прогибы и деформации для изотропного и ортотропного материалов. Элемент SOLID64 есть аналог SOLID45 для анизотропного материала.

Контрольные вычисления проводились с помощью конечного элемента SOLID95, который является версией более высокого порядка гексагонального элемента SOLID45. Это трехмерный двадцатиузловой гексагональный элемент с шестьюдесятью степенями свободы для исследования задач механики деформируемого твердого тела.

В качестве контактных конечных элементов приняты TARGE170 и CONTA174.

Параметры контактного взаимодействия. Контактные элементы содержат 14 реальных постоянных, с помощью которых описываются механические и геометрические свойства контактирующих поверхностей. Из них две реальные постоянные больше других влияют на процесс сходимости и решение контактной задачи: f_{kn} – жесткость контакта по нормали, f_{kt} – тангенциальная (сдвиговая) контактная жесткость.

Остальные 12 постоянных с помощью специального алгоритма либо задаются по умолчанию, либо вычисляются по заданным значениям постоянных f_{kn} и f_{kt} . Разработчики программного комплекса предлагают также способ перебора постоянных f_{kn} и f_{kt} из заданного диапазона значений под контролем сходимости процесса и получаемых результатов. Этот прием подбора постоянных хорошо известен, достаточно универсален, но требует постоянного контроля получаемых результатов.

Теперь относительно реальных постоянных изучаемой сдвиговой модели расслоений [1]. В контактном блоке программы используются все три параметра принятой модели сдвигового расслоения: $[\sigma_{xz}^{k3}]$ – адгезионное сцепление, f_k – коэффициент трения и $\lambda_k = f_{kt}$ – сдвиговая контактная жесткость. Постоянная f_{kn} не входит в число основных параметров принятой модели [1] сдвигового расслоения. Тем не менее она остается основной при изучении процесса деформирования изучаемой конструкции со сдвиговым расслоением. Объясняется это тем, что изучается изгиб трехслойных конструкций со сжимаемым наполнителем. Вычисления показывают, что наполнитель деформируется при этом существенным образом.

Анализ полученных результатов. Было предпринято специальное исследование по подбору конечноэлементного разбиения с контролем времени счета и сходимости итерационного процесса. Наилучшим при осесимметричном деформировании оказался вариант разбиения всех продольных линий половины стержня на двадцать частей и каждого из слоев по толщине и ширине на десять частей. Число узлов составило при этом 7381, а время счета 16 мин для процессора типа Pentium. При построении итерационного процесса решения нелинейной контактной задачи принят метод Ньютона–Рафсона. При решении систем алгебраических уравнений – метод сопряженных градиентов при относительной погрешности вычисления 10^{-6} .

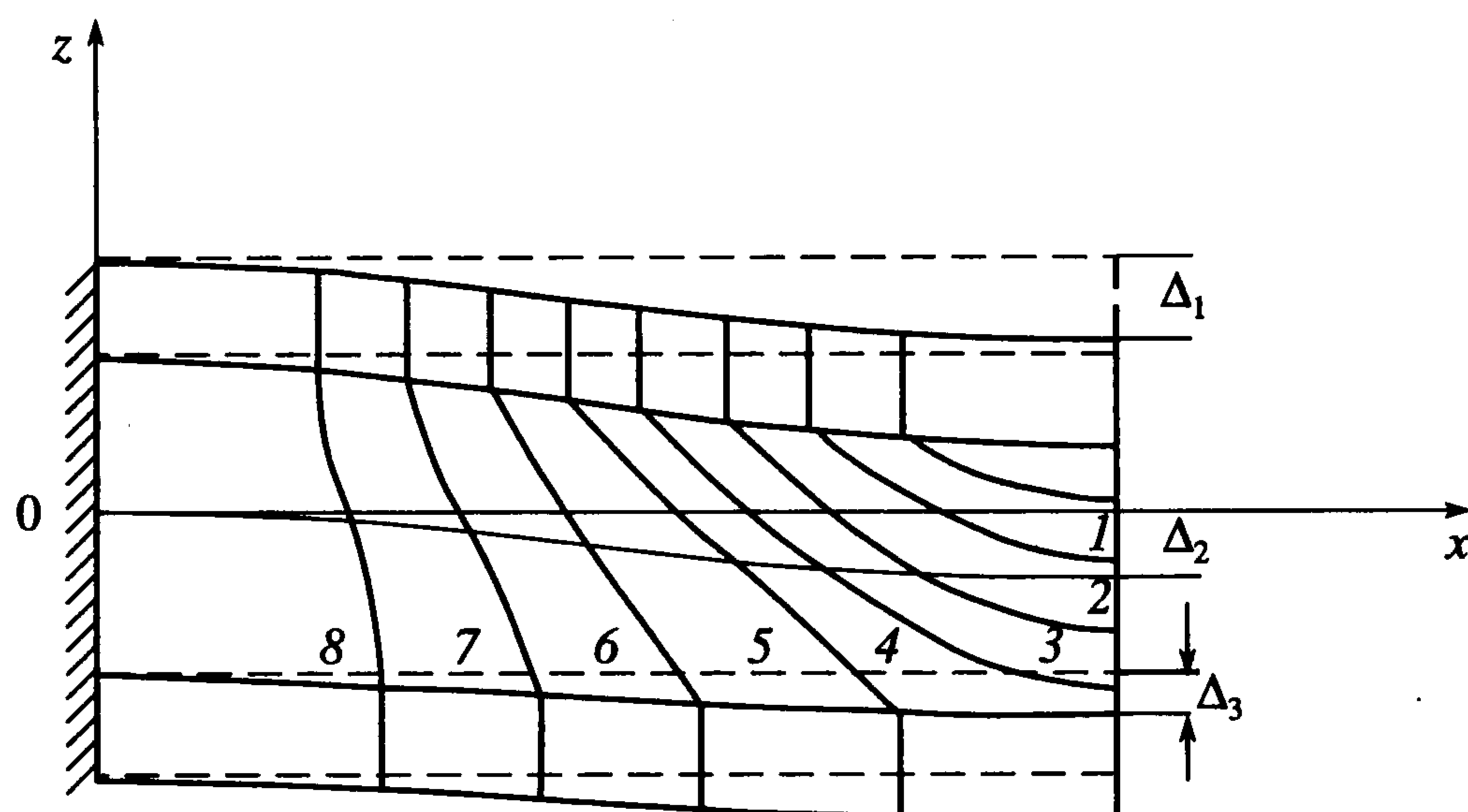
Исследование применимости предложенной ранее модели сдвигового расслоения [1] проводилось на относительно толстом трехслойном стержне, когда эффекты сдвиговых деформаций более ярко выражены. Модули упругости несущих слоев и заполнителя различались на три порядка. Вычисления выполнены для двух вариантов граничных условий: шарнирного опирания на смещаемый контур и жесткого защемления на неподвижном контуре. Отметим трудности формулировки граничных условий, особенно для первого случая граничных условий. При этом для относительно более мягкого заполнителя появляются эффекты независимой работы слоев, как при изгибе балки на упругом основании. Наблюдается также выдавливание заполнителя в средней части пролета для не очень широкого стержня. Вычисления показали, что для закрепления торца трехслойной конструкции на опоре необходимо вводить специальную конструкцию и для нее ставить граничные условия.

В результате вычислений получены многочисленные графики распределения перемещений и напряжений по толщине и длине трехслойного стержня с дефектами типа расслоений. Построены графики распределения перемещений и напряжений по толщине стержня в четырех сечениях по его длине. Представлены также графики распределения перемещений u , v и w по длине пролета трехслойного стержня. Получены соответствующие распределения напряжений σ_x , σ_y и σ_{xy} . Кроме того, дано трехмерное распределение всех этих величин на самой конструкции, причем показаны ее деформированное и недеформированное состояния. Приведены распределения усилий и перемещений на контактных поверхностях, а также показано деформирование самих контактных поверхностей¹.

Приведем здесь лишь наиболее характерные графики для короткого стержня $h/l = 1/5$, когда зона расслоения между заполнителем и несущими слоями занимает половину центральной части пролета стержня. Дадим сначала распределение нормальных перемещений w . На фиг. 4 показана боковая поверхность половины длины трехслойного стержня в деформированном и недеформированном (штриховые линии) состояниях и приведены линии одинакового уровня нормальных перемещений w , обозначенных цифрами 1–8. Распределение прогибов w на фиг. 4 позволяет оценить применимость гипотезы ломаной линии при расчете трехслойных стержней с расслоениями в дефектных и бездефектных областях. Так, для рассматриваемого стержня эта гипотеза неприменима в бездефектной области в зоне заделки стержня и в большей части зоны сдвиговых расслоений. Обращаем внимание на характерное распределение прогибов в средней части пролета стержня, что объясняется обжатием заполнителя. Обжатием заполнителя объясняются также полученные соотношения между прогибами слоев стержня в его центральной части (фиг. 4) $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \Delta_3$.

Перемещения u , v , w в точке (x, y, z) , отнесенные к максимальному значению перемещения w в точке $(x, 0, z)$, обозначим через \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} .

¹ Подробности см.: *Мамай В.И.* Возможности численного эксперимента для оценки применимости одной модели сдвигового расслоения тонкостенных конструкций. Отчет № 4593. М.: НИИМеханики МГУ, 2001. 92 с.



Фиг. 4

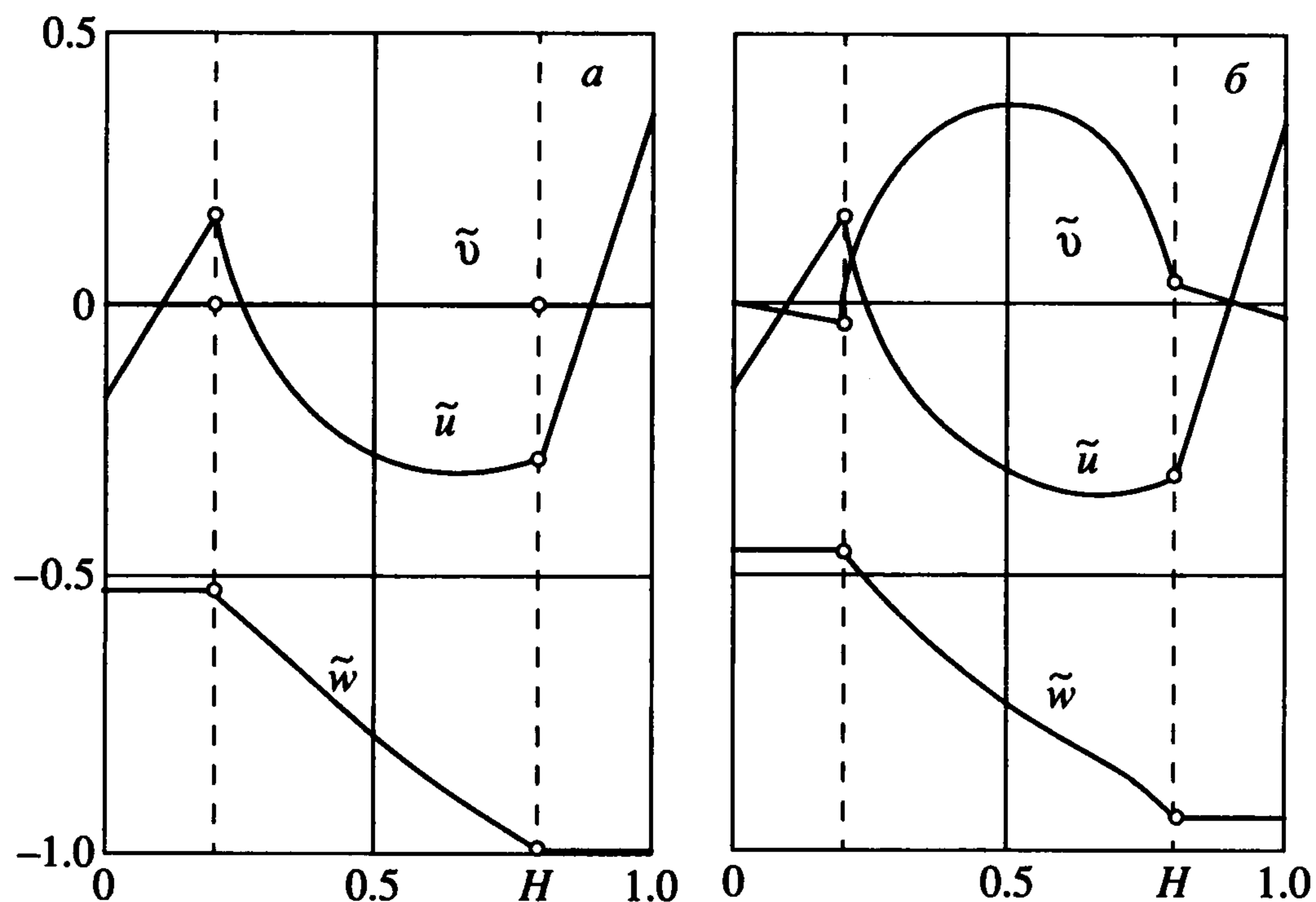
На следующих двух фигурах показаны распределения перемещений \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} по толщине пакета в плоскости симметрии стержня (а) и на его боковой поверхности (б) в бездефектной области при $x = 0.25 L/2$ (фиг. 5) и в области расслоений при $x = 0.75 L/2$ (фиг. 6). Штриховые линии соответствуют поверхностям контакта несущих слоев и заполнителя. По оси абсцисс отложены безразмерная толщина стержня H , а по оси ординат – безразмерные перемещения \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} . Как следует из приведенных графиков, наибольшие изменения при переходе от плоскости $(x, 0, z)$ на боковую поверхность стержня претерпевают \tilde{v} по всей толщине пакета и \tilde{w} в области заполнителя. В зоне сдвиговых расслоений \tilde{u} и \tilde{v} терпят разрыв на стыке заполнителя и несущих слоев.

В заключение приведем (фиг. 7) типичный график распределения продольных перемещений u по толщине в плоскости симметрии стержня в сечении $x = 0.75 L/2$ по длине стержня (в зоне расслоений). По оси абсцисс отложена безразмерная высота стержня, а по оси ординат отношение перемещения u вдоль оси x к значению максимального перемещения u_{\max} на стыке заполнителя и наружного несущего слоя. Штрихами, как и прежде, отмечены области контакта наружных слоев и заполнителя.

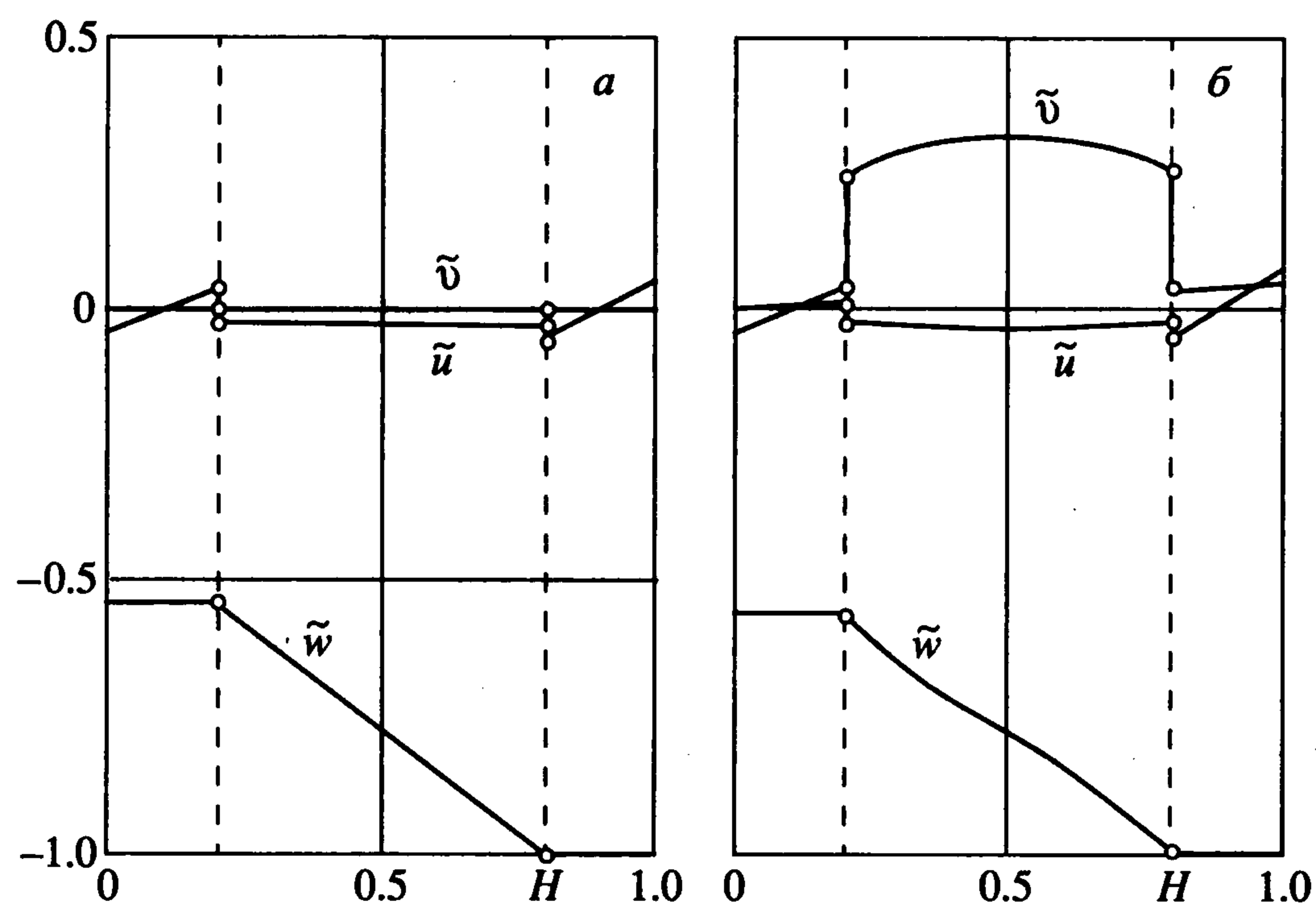
Анализ приведенных распределений перемещений w и u по толщине трехслойного пакета показывает, что принятые в [1] кинематические гипотезы в основном справедливы как в областях с расслоениями, так и в бездефектных областях. Однако они заметно нарушаются в наиболее деформированных частях стержня, а также на его боковых поверхностях.

4. Модальный анализ. Программный комплекс ANSYS 6.1 позволяет изучать также формы колебаний предварительно напряженной конструкции. В рассматриваемом случае изгиба трехслойного стержня с расслоением сдвигового типа такой модальный анализ позволяет в какой-то мере судить о совместной работе слоев в зоне сдвигового расслоения.

Сначала решается задача о напряженно-деформированном состоянии изучаемого трехслойного стержня с расслоениями, т.е. задача изгиба и контактная задача в зоне сдвигового расслоения. Затем методами модального анализа вычисляются первые десять форм и частот собственных колебаний конструкции. Результаты вычислений показали, что более низким собственным частотам соответствуют такие формы колебаний заполнителя в области сдвиговых расслоений, при которых не происходит раскрытия контактирующих поверхностей, что свидетельствует о справедливости



Фиг. 5



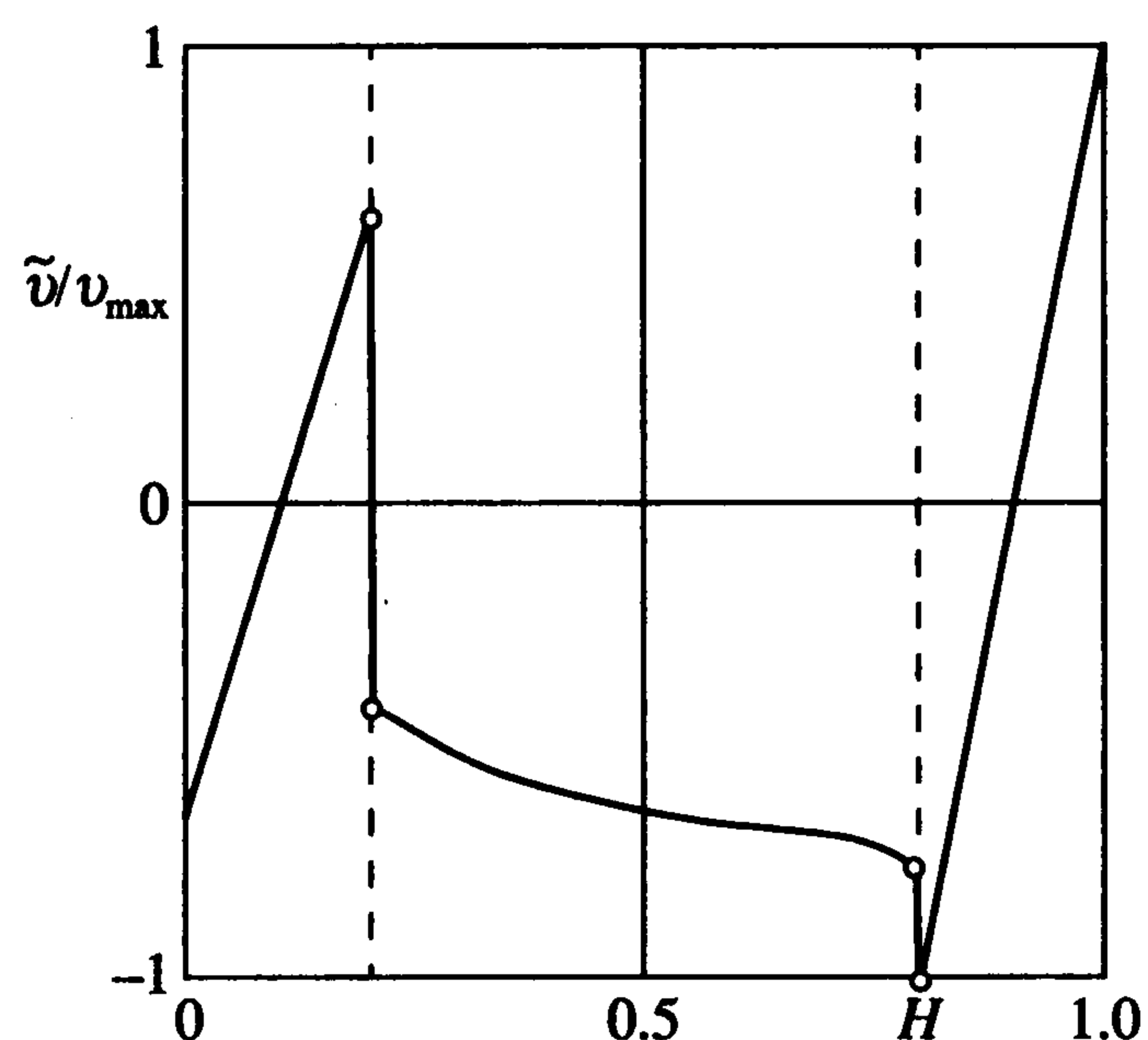
Фиг. 6

гипотезы о непрерывности нормального перемещения w в зоне сдвигового расслоения.

5. Выводы

1. Методом конечных элементов с помощью программного комплекса ANSYS 6.1 решена трехмерная задача изгиба трехслойного объемного стержня с расслоением, которая после проведенного анализа может считаться тестовой при оценках применимости предложенной ранее модели сдвиговых расслоений трехслойных конструкций.

2. Установлено, что для относительно коротких стержней ($h/l \geq 0.25$) предложенная модель трехслойного стержня с расслоением неприменима в основном из-за возможности выдавливания заполнителя на боковых поверхностях трехслойного стержня. Поэтому нежелательно использовать эту модель уже при $h/l \geq 0.15$ для рассматриваемого класса материалов несущих слоев и заполнителя.



Фиг. 7

3. При расчете более коротких стержней лучше использовать метод конечных элементов, причем желательно рассчитывать стержень совместно с механическим устройством закрепления элементов трехслойного пакета на опоре. Граничные условия должны быть поставлены для этого устройства.

4. Гипотеза ломаной линии выполняется весьма удовлетворительно, за исключением области закрепления и областей, где существенно явление выдавливания заполнителя.

5. В области сдвиговых расслоений нормальные перемещения не терпят разрыва, а тангенциальные перемещения терпят разрыв, как это предсказывает принятая модель расслоения.

6. Жесткие несущие слои трехслойного короткого стержня работают по схеме стержней Бернулли.

7. Проведенный модальный анализ показал справедливость гипотезы о непрерывности нормального перемещения w в области сдвигового расслоения.

8. Сдвиговые расслоения по площади 10–15% в средней части пролета стержня мало влияют на величины его нормальных прогибов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И. Модель деформирования неравномерно нагретых трехслойных стержней с расслоениями // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 475–484.
2. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 6–32.
3. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И. Модель изгиба трехслойных пластин с нераспространяющимися расслоениями при статическом нагружении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 3. С. 43–51.
4. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 1. С. 77–84.
5. Иванов А.В., Чулков П.П. Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными несущими слоями // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 101–107.