УДК 539.3

© 2003 г. Л. А. Фильштинский

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Построена полная система однородных решений задачи Дирихле для анизотропного слоя. Эти решения представляют собой ряды, содержащие метагармонические функции сложного аргумента, зависящего от всех трех координат. Полученное решение может быть использовано при рассмотрении граничных задач теории потенциала для кусочно-однородного слоя.

Многие задачи гидродинамики, стационарной теплопроводности, электро- и магнитостатики для существенно анизотропных сред сводятся к интегрированию общего дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа. При рассмотрении соответствующих граничных задач для кусочно-однородного слоя целесообразно использовать метод однородных решений. Этот метод, восходящий к работе А.И. Лурье [1], оказался весьма эффективным при исследовании напряженно-деформированного состояния изотропных или трансверсально-изотропных толстых пластин [2]. Однако при рассмотрении тел с анизотропией общего вида возникают трудности, связанные с построением полных систем однородных решений граничных задач. Для того чтобы показать, в чем тут дело, и наметить аналитические процедуры построения однородных решений, ниже рассматривается однородная задача Дирихле для анизотропного слоя.

1. Постановка задачи. Операторный подход. Речь идет об интегрировании дифференциального уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{L(D)u} = 0$$
$$\mathbf{L(D)} = \sum_{m,n=1}^{3} a_{mn}\partial_m\partial_n, \quad \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_{nm} = a_{mn}, \quad a_{33} > 0 \tag{1.1}$$

в слое $-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h < x_3 < h$ при выполнении однородных граничных условий на его основаниях

$$u|_{x_3 = \pm h} = 0 \tag{1.2}$$

а также условия затухания решения на бесконечности ($|x_1| \to \infty, |x_2| \to \infty$).

Решение граничной задачи (1.1), (1.2) проведем операторным методом. Полагая $u' = \partial_3 u$, $u'' = \partial_3^2 u$ представим уравнение (1.1) в виде

$$u'' + 2Au' + Bu = 0$$

$$A = \frac{1}{a_{33}}(a_{13}\partial_1 + a_{23}\partial_2), \quad B = \frac{1}{a_{33}}(a_{11}\partial_1^2 + 2a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{22}\partial_2^2)$$

Интегрирование этого уравнения с учетом эллиптичности оператора $L(D)$ дает

$$
\begin{aligned}
u &= e^{-Ax_3}\{\cos\alpha x_3 C_1 + \alpha^{-1}\sin\alpha x_3 C_2\} \\
\alpha^2 &= B - A^2 = \Delta_{11}\partial_1^2 + 2\Delta_{12}\partial_1\partial_2 + \Delta_{22}\partial_2^2 \\
\Delta_{11} &= \frac{a_{11}}{a_{33}} - \left(\frac{a_{13}}{a_{33}}\right)^2, \quad \Delta_{12} = \frac{a_{12}}{a_{33}} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}^2} \\
\Delta_{22} &= \frac{a_{22}}{a_{33}} - \left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)^2 > 0 \\
C_1 &= C_1(x_1, x_2), \quad C_2 = C_2(x_1, x_2)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Для определения функций $C_k(x_1, x_2)$ $(k = 1, 2)$ привлечем граничные условия (1.2). С учетом выражения (1.3) приходим к операторной системе уравнений

$$
\begin{aligned}
(\cos h\alpha \operatorname{ch} hA)C_1 - (\alpha^{-1}\sin h\alpha \operatorname{sh} hA)C_2 &= 0 \\
(\cos h\alpha \operatorname{sh} hA)C_1 - (\alpha^{-1}\sin h\alpha \operatorname{ch} hA)C_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Введем разрешающую функцию ψ согласно соотношениям

$$
C_1 = (\alpha^{-1}\sin h\alpha \operatorname{sh} hA)\psi, \quad C_2 = (\cos h\alpha \operatorname{ch} hA)\psi \tag{1.5}
$$

Тогда первое уравнение системы (1.4) будет удовлетворено, а второе приведем к следующему уравнению относительно функции $\psi = \psi(x_1, x_2)$:

$$
(\alpha^{-1}\sin 2h\alpha)\psi = 0 \tag{1.6}
$$

Представим оператор-функцию, фигурирующую в равенстве (1.6), операторным рядом. Получим уравнение бесконечного порядка относительно ψ

$$
\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2h)^{2k+1}}{(2k+1)!}\alpha^{2k}\right)\psi = 0 \tag{1.7}
$$

Для его решения введем систему функций $\varphi_j(x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнению

$$
(\alpha^2 - \mu_j^2)\varphi_j = 0, \tag{1.8}
$$

где μ_j – неизвестные пока параметры.

Из уравнения (1.8) следует, что $\alpha^{2k}\varphi_j = \mu_j^{2k}\varphi_j$, и уравнение (1.7) применительно к функции φ_j дает

$$
\frac{1}{\mu_j}\sin(2h\mu_j)\varphi_j = 0
$$

Таким образом, нетривиальные решения уравнения (1.7) существуют и соответствующие им характеристические числа μ_j определяются равенством

$$
2h\mu_j = \pi j, \quad j = \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots
$$

Далее потребуем, чтобы искомое решение уравнения (1.1) затухало при $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$. Это влечет за собою положительность μ_j, поэтому можем записать

$$
\psi = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_1, x_2) \tag{1.9}
$$

Остановимся на определении собственных функций $\varphi_j (j = 1, 2, \ldots)$.

Вводя невырожденное преобразование координат

$$
\begin{aligned}
&x_1^* = x_1 - p x_2, \quad x_2^* = \sqrt{\Delta^*} x_2 \\
&p = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}, \quad q = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}, \quad \Delta^* = q - p^2 > 0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

приведем уравнение (1.8) к виду

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_*^2 - \gamma_j^2)\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots \\
&\nabla_*^2 = \partial_{1*}^2 + \partial_{2*}^2 = \frac{\alpha^2}{\Delta^* \Delta_{22}} \\
&\gamma_j^2 = \frac{\mu_j^2}{\Delta^* \Delta_{22}}; \quad \partial_{1*} = \frac{\partial}{\partial x_1^*}, \quad \partial_{2*} = \frac{\partial}{\partial x_2^*}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Отсюда следует, что φ_j – метагармонические функции в аффинных переменных x_1^*, x_2^*.

Займемся конструированием решения исходной граничной задачи. Подстановка в равенство (1.3) функций C_1, C_2 (1.5) дает

$$
u = \left\{ \frac{1}{2} e^{A(h - x_3)} \alpha^{-1} \sin[\alpha(h + x_3)] - \frac{1}{2} e^{-A(h + x_3)} \alpha^{-1} \sin[\alpha(h - x_3)] \right\} \psi
$$

Вводя сюда выражение для функции ψ (1.9), получаем решение исходного уравнения (1.1) в символической форме

$$
u = u_+ - u_-, \quad u_\pm = \frac{1}{2} e^{\pm A(h \mp x_3)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{\mu_j} \sin[(h \pm x_3)\mu_j]
\tag{1.12}
$$

Рассмотрим теперь второе решение системы (1.4), полагая

$$
C_1 = (\alpha^{-1} \sin\alpha h \cos A h)\psi_*, \quad C_2 = (\cos\alpha h \operatorname{sh} A h)\psi_*
\tag{1.13}
$$

В этом случае второе уравнение (1.4) удовлетворяется, а первое приводит к разрешающему уравнению (1.6). Рассуждая как прежде, приходим к решению

$$
u_* = u_+ + u_-
\tag{1.14}
$$

Сравнивая представления (1.12) и (1.14), получаем два типа решений исходной граничной задачи (1.1), (1.2)

$$
u_1 = u_+, \quad u_2 = u_-; \quad \mu_j = \pi j/(2h)
\tag{1.15}
$$

В частном случае трансверсально-изотропной среды функции (1.12), (1.14) определяют соответственно кососимметричное и симметричное относительно срединной плоскости слоя решения.

Получим теперь результат воздействия показательной оператор-функции на цилиндрическую функцию. Для этого введем комплексную переменную $z_* = x_1^* + ix_2^* = r_* e^{i\alpha_*}$ и операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} - i\frac{\partial}{\partial x_2^*}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} + i\frac{\partial}{\partial x_2^*}\right)$$

В этих переменных оператор A будет иметь вид

$$A = \beta_*\frac{\partial}{\partial z_*} + \bar{\beta}_*\frac{\partial}{\partial \bar{z}_*}; \quad \beta_* = \frac{a_{13} + \nu_* a_{23}}{a_{33}} = |\beta_*|e^{i\delta}, \quad \nu_* = i\sqrt{\Delta^*} - p \tag{1.16}$$

Поскольку произвольное решение уравнения (1.11) есть свертка простого либо двойного слоя с функцией Макдональда $K_0(\gamma_j r_*)$ [3], достаточно рассмотреть воздействие оператора на эту функцию.

Докажем справедливость следующих равенств:

$$e^{\pm A(h \mp x_3)} K_0(\gamma_j r_*) = K_0(\gamma_j R_\pm) \tag{1.17}$$

$$R_\pm = \sqrt{r_*^2 + (h \mp x_3)^2|\beta_*|^2 \pm 2r_*|\beta_*|(h \mp x_3)\cos(\alpha_* - \delta)} = \sqrt{W_\pm \overline{W}_\pm} = |W_\pm|$$

$$W_\pm = z_* \pm \beta_*(h \mp x_3)$$

где $\overline{W}$ – величина, комплексно сопряженная с W.

Имеем с учетом обозначений (1.16)

$$e^{A(h - x_3)} K_0(\gamma_j r_*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h - x_3)^k}{k!}\left(\beta_*\frac{\partial}{\partial z_*} + \bar{\beta}_*\frac{\partial}{\partial \bar{z}_*}\right)^k K_0(\gamma_j r_*) \tag{1.18}$$

С помощью легко доказываемых соотношений [4]

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} K_0(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{-in\alpha} K_n(\gamma r)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} K_0(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{in\alpha} K_n(\gamma r)$$

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

получаем после преобразований

$$\left(\beta_*\frac{\partial}{\partial z_*} + \bar{\beta}_*\frac{\partial}{\partial \bar{z}_*}\right)^{2k} K_0(\gamma_j r_*) =$$

$$= 2\left(\frac{|\beta_*|\gamma_j}{2}\right)^{2k} \sum_{m=0}^{k} \delta_m C_{2k}^{k-m} \cos[2m(\alpha_* - \delta)] K_{2m}(\gamma_j r_*)$$

$$\left(\beta_*\frac{\partial}{\partial z_*} + \bar{\beta}_*\frac{\partial}{\partial \bar{z}_*}\right)^{2k+1} K_0(\gamma_j r_*) =$$

$$= -2\left(\frac{|\beta_*|\gamma_j}{2}\right)^{2k+1} \sum_{m=0}^{k} C_{2k+1}^{k-m} \cos[(2m+1)(\alpha_* - \delta)] K_{2m+1}(\gamma_j r_*) \tag{1.19}$$

$k = 0, 1, \ldots$

$$\delta_m = \begin{cases} 1/2, & m = 0 \\ 1, & m = 1, 2, \ldots \end{cases}, \quad C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Подстановка выражений (1.19) в соотношение (1.18) дает

$$e^{A(h-x_3)} K_0(\gamma_j r_*) = X_1 - X_2$$

$$X_1 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \cos[2m(\alpha_* - \delta)] I_{2m}[\gamma_j |\beta_*|(h - x_3)] K_{2m}(\gamma_j r_*)$$

$$X_2 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \cos[(2m+1)(\alpha_* - \delta)] I_{2m+1}[\gamma_j |\beta_*|(h - x_3)] K_{2m+1}(\gamma_j r_*)$$

где $K_n(z)$, $I_n(z)$ – соответственно функция Макдональда и модифицированная функция Бесселя порядков n.

Наконец, привлекая теорему сложения Графа [5], приходим к равенству (1.17) при выборе знака плюс. Путем замены в нем h на $-h$ получаем равенство (1.17) при выборе знака минус. Отметим, что соотношения (1.17) представляют самостоятельный интерес в теории цилиндрических функций.

Таким образом, с учетом формул (1.17) получаем координатную реализацию операторных равенств (1.15) в виде

$$u_1 = u_+, \quad u_2 = u_-$$

$$u_\pm = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} K_0(\gamma_j R_\pm) \sin[(h \pm x_3)\mu_j] \tag{1.20}$$

Функции $u_n = u_n(x_1, x_2, x_3)$ (1.20) имеют разрывы второго рода на линиях $W_\pm = 0$. Учитывая выражения (1.17) для комплексной переменной $W_\pm$, получаем пару прямых

$$x_1 = \frac{a_{13}}{a_{33}}(x_3 \pm h), \quad x_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}(x_3 \pm h)$$

где верхний знак соответствует функции u_2, нижний – функции u_1. Как и следовало ожидать, в случае $a_{13} = a_{23} = 0$ функции (1.20) терпят разрывы на интервале $-h < x_3 < h$ оси x_3.

2. Общий вид однородных решений граничной задачи (1.1), (1.2). Из построения однородных решений (1.20) видно, что функция $K_0(\gamma_j R_+)$ является решением уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} - \gamma_j^2 \right) \Phi(\gamma_j |W_+|) = 0 \tag{2.1}$$

где

$$x_* = \operatorname{Re} W_+, \quad y_* = \operatorname{Im} W_+, \quad |W_+| = R_+ \tag{2.2}$$

Аналогично функция $K_0(\gamma_j R_-)$ – решение этого уравнения при замене в выражениях (2.2) индекса плюс на минус.

Покажем, что выражения (1.20) дадут решения граничной задачи (1.1), (1.2), если заменить в них функцию Макдональда K_0 произвольным достаточно гладким решением уравнения (2.1). Для этого запишем функцию u_1 в виде

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \Phi_j^+ \sin[(h+x_3)\mu_j] \tag{2.3}$$

Величины μ_j определены выше, а функции $\Phi_j^+ = \Phi_j^+(x_*, y_*)$ – решения уравнения (2.1) в случае (2.2).

Подстановка выражения (2.3) в дифференциальное уравнение (1.1) приводит к системе

$$\tilde{A}\Phi_j^+ = 0, \quad \tilde{B}\Phi_j^+ + 2\tilde{A}\partial_3\Phi_j^+ = 0 \tag{2.4}$$
$$\tilde{A} = a_{13}\partial_1 + a_{23}\partial_2 + a_{33}\partial_3$$
$$\tilde{B} = a_{11}\partial_1^2 + 2a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{22}\partial_2^2 - a_{33}\partial_3^2 - a_{33}\mu_j^2$$

Первое уравнение этой системы выполняется на любой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x_*, y_*)$. В самом деле, в переменных W_+, $\overline{W}_+$, заданных последними равенствами (1.17), оно приобретает вид

$$\mathrm{Re}\left\{(a_{13} + a_{23}\nu_* - a_{33}\beta_*)\frac{\partial\Phi_j^+}{\partial W_+}\right\} = 0 \tag{2.5}$$

и в силу соотношений (1.16) обращается в тождество.

Второе уравнение системы (2.4) с учетом равенства (2.5) записывается так:

$$2\mathrm{Re}\left(a\frac{\partial^2\Phi_j^+}{\partial W_+^2}\right) + 2b\frac{\partial^2\Phi_j^+}{\partial W_+\partial\overline{W}_+} - a_{33}\mu_j^2\Phi_j^+ = 0 \tag{2.6}$$
$$a = a_{11} + 2a_{12}\nu_* + a_{22}\nu_*^2 - 2\beta_*(a_{13} + a_{23}\nu_*) + a_{33}\beta_*^2$$
$$b = a_{11} + a_{12}|\nu_*|^2 + a_{33}|\beta_*|^2 + 2\mathrm{Re}(a_{12}\nu_* - a_{13}\beta_* - a_{23}\nu_*\bar{\beta}_*)$$

Привлекая далее формулы для β_* и ν_* из соотношений (1.16), находим

$$a = 0, \quad b = 2a_{33}\Delta^*\Delta_{22}$$

Следовательно, уравнение (2.6) совпадает с (2.1), что и требовалось.

Аналогично решению (2.3) строится второе решение, u_2, которое отличается от (2.3) заменой x_3 на $-x_3$ и Φ_j^+ на $\Phi_j^- = \Phi_j^-(x_*, y_*)$– решение уравнения (2.1) в случае, когда в выражениях (2.2) индекс плюс заменен на минус.

Принципиальное отличие полученных однородных решений от известных аналогичных, соответствующих изотропным или трансверсально изотропным средам, заключается в том, что их нельзя построить методом разделения переменных в декартовых координатах $x_k (k = 1, 2, 3)$. Это следует из того, что функции $\Phi_j^{\pm}$ зависят от всех трех переменных x_1, x_2, x_3.

3. Обсуждение результатов. В случаях, когда $|a_{13}|/a_{33} \ll 1$, $|a_{23}|/a_{33} \ll 1$, можно указать некоторую приближенную процедуру построения однородных решений. Так, оставляя в первом соотношении (1.12) только нулевую и первую степени оператора A, запишем

$$e^{A(h-x_3)}\varphi_j = \varphi_j + \frac{h-x_3}{a_{33}}(a_{13}\partial_1 + a_{23}\partial_2)\varphi_j = f_j$$

Отсюда и из первого соотношения (1.15) находим

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \sin[(h+x_3)\mu_j] f_j \tag{3.1}$$

Аналогично получаем второе решение, u_2, отличающееся от (3.1) заменой x_3 на $-x_3$ и a_{33} на $-a_{33}$.

В общем случае из функций u_1, u_2 можно скомбинировать решения, симметричные и кососимметричные относительно начала координат. Из равенств (1.17) видно, что

$$W_+(-x_1, -x_2, -x_3) = -W_-(x_1, x_2, x_3)$$

Полагая в формуле (2.3) и аналогичной ей формуле для u_2

$$\Phi_j^-(x_1, x_2, x_3) = -\Phi_j^+(-x_1, -x_2, -x_3)$$

получаем соответствующие решения

$$u^+ = u_1 + u_2, \quad u^- = u_1 - u_2$$

Выражение (3.1) для u_1, и аналогичное ему для u_2 можно использовать при решении граничных задач для кусочно-однородного слоя, например слоя со сквозными туннельными полостями либо разрезами. При этом соответствующие задачи сводятся к системам одномерных сингулярных интегральных уравнений. Однако на этом пути просматриваются проблемы, связанные с наличием малых параметров при сингулярных операторах. С этой точки зрения, целесообразнее исходить из точных выражений (1.20), вводя свертки функций Макдональда с двойным слоем на поверхности неоднородности. Полученные таким образом интегральные представления решений граничных задач служат исходным пунктом для сведения последних к двумерным интегральным уравнениям. Эффективность аналитических и численных процедур здесь еще предстоит оценить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 151–168.
2. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика 1972. Т. 8. Вып. 6. С. 3–17.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. *Фильштинский Л.А.* Взаимодействие волн напряжений с криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига в полупространстве // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 482–487.
5. *Luke Y.L.* Mathematical Functions and their Approximations. N.Y., etc.: Acad. Press, 1975 = *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

Сумы (Украина)
e-mail: leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Поступила в редакцию
18.IX.2002