УДК 532.5:534.1

© 2003 г. Ф. Н. Шклярчук

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННЫХ УПРУГИХ ПОЛОСТЯХ И КАНАЛАХ

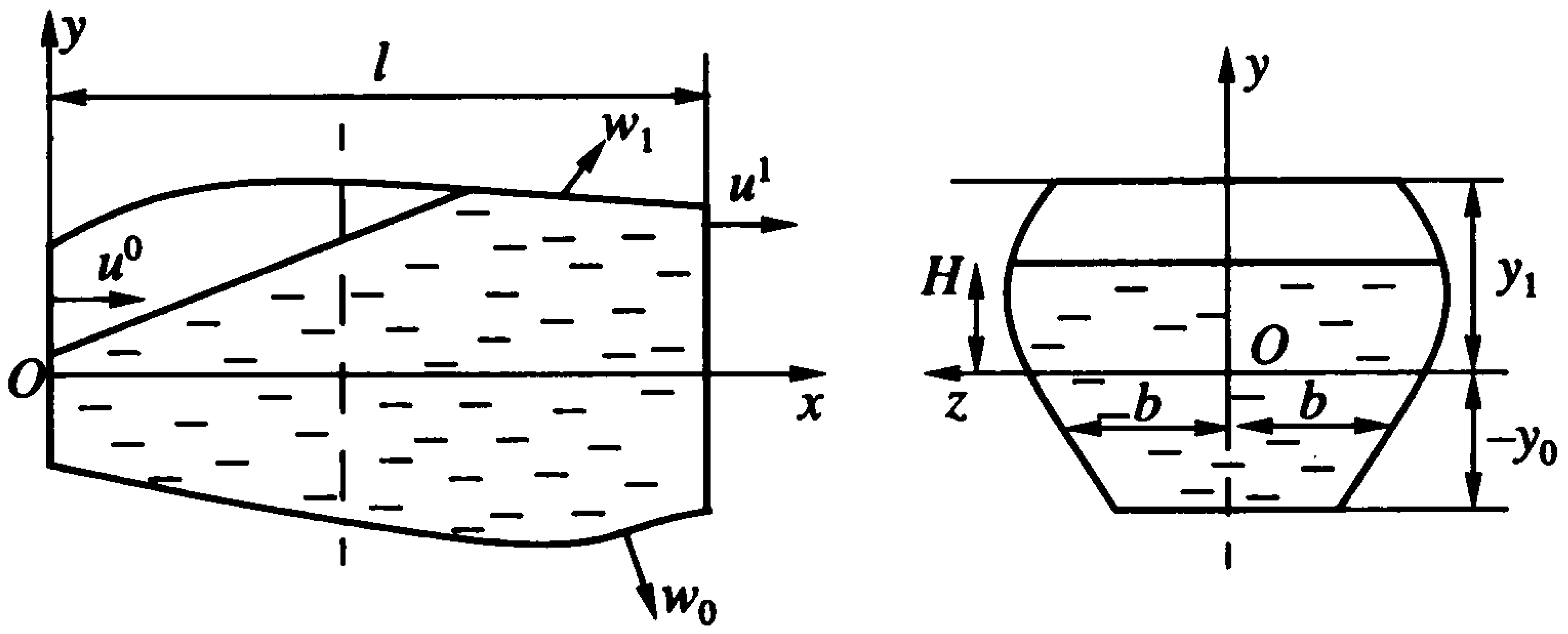
Рассматриваются малые колебания идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей наклонную упругую оболочку (подвижную полость, канал) произвольной формы и имеющей продольную плоскость симметрии. Получено интегральное условие неразрывности жидкости путем интегрирования дифференциального условия несжимаемости и точного удовлетворения кинематическим граничным условиям на смоченных боковых стенках. На основании этого уравнения строятся системы координатных функций, представляющих кинематически возможные перемещения жидкости, для расчета колебаний по методу Ритца и методу конечных элементов. При этом основные неизвестные функции, описывающие перемещения жидкости, в поперечных сечениях аппроксимируются степенными функциями и функциями Лежандра. В качестве конечных элементов рассматриваются поперечные слои жидкости, в пределах толщины которых для неизвестных функций используется линейная аппроксимация.

Для решения задачи о малых колебаниях жидкости, частично заполняющей подвижные полости или упругие оболочки произвольной формы, обычно используются метод Ритца [1, 2] и метод конечных элементов (МКЭ) [3]. В случае несжимаемой жидкости при решении задачи в перемещениях необходимо точно удовлетворить условию несжимаемости и кинематическому условию безотрывного движения жидкости на поверхности стенки, что связано с определенными трудностями. Поэтому наиболее часто в качестве основной неизвестной рассматривается гидродинамическое давление (или представляющие его потенциалы перемещений, скоростей и ускорений жидкости) и используется соответствующий вариационный принцип, на основании которого условие несжимаемости и кинематическое условие на стенках полости при использовании метода Ритца и МКЭ удовлетворяются приближенно.

Был предложен [4, 5] вариационный метод решения в перемещениях задачи о колебаниях несжимаемой жидкости внутри произвольной оболочки вращения. Путем интегрирования условия несжимаемости и удовлетворения кинематическому условию на смоченной поверхности оболочки задача сводится к нахождению одной неизвестной функции – продольного перемещения жидкости в зависимости от осевой и радиальной координат. Затем по методу Власова – Канторовича получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, а по методу Ритца и МКЭ – система алгебраических уравнений.

Аналогичный подход использовался [6] для решения в перемещениях задачи о малых, преимущественно продольных симметричных колебаниях несжимаемой жидкости в наклонной упругой оболочке (полости, канале) произвольной формы, имеющей продольную плоскость симметрии, при этом для аппроксимации перемещений жидкости в поперечных сечениях полости использовались степенные функции. Ниже получено уточненное решение этой задачи в другом виде с использованием для аппроксимации перемещений жидкости в поперечных сечениях ортогональных функций Лежандра. По методу Ритца и МКЭ (в качестве конечных элементов рассматриваются поперечные слои жидкости) задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

1. Интегральное условие несжимаемости жидкости. Рассмотрим оболочку (полость, канал) с произвольным однозамкнутым контуром переменного поперечного



Фиг. 1

сечения, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью (фиг. 1). Будем считать, что оболочка симметрична относительно плоскости xy, а свободная поверхность жидкости $y = H(x)$ перпендикулярна этой плоскости. В общем случае оболочка имеет днище $y = y_0(x)$, упругие боковые стенки $z = \pm b(x, y)$ и крышку $y = y_1(x)$, нормальные перемещения которых обозначаются через $w_0(x, t)$, $w(x, y, t)$ и $w_1(x, t)$, а внешние единичные нормали к этим поверхностям – через $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ соответственно. Если оболочка замкнута при $y = y_0$ и $y = y_1$, т.е. не имеет днища и крышки, то их поперечные размеры $b_0(x) = b(x, y_0)$ и $b_1(x) = b(x, y_1)$ следует считать стремящимися к нулю. При колебаниях, симметричных относительно плоскости $z = 0$, будем рассматривать только половину полости при $z \geq 0$. Перемещения жидкости в направлении осей x, y, z обозначаются через υ_x, υ_y, υ_z.

Дифференциальное условие несжимаемости жидкости и кинематические условия ее безотрывного движения в плоскости симметрии, на боковой стенке и на дне записываются в виде

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

$$\upsilon_z = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.2}$$

$$\upsilon_z = \frac{w}{\nu_z} + \frac{\partial b}{\partial x}\upsilon_x + \frac{\partial b}{\partial y}\upsilon_y \text{ при } z = b(x,y) \tag{1.3}$$

$$\upsilon_y = \frac{w_0}{\nu_{0y}} + y_0'\upsilon_x \text{ при } y = y_0(x) \tag{1.4}$$

где

$$\frac{1}{\nu_z} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2}, \quad \frac{1}{\nu_{0y}} = -\sqrt{1 + y_0'^2}$$

ν_z, ν_{0y} – проекции нормалей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ на оси z и y соответственно.

На плоских торцевых стенках $x = 0$ и $x = l$, нормальные перемещения которых считаются заданными, кинематические граничные условия имеют вид

$$\upsilon_x = u^0(y, z, t) \text{ при } x = 0, \quad \upsilon_x = u^1(y, z, t) \text{ при } x = l \tag{1.5}$$

При решении задачи в перемещениях по методу Ритца или методу конечных элементов (МКЭ) условие несжимаемости (1.1) и кинематические граничные условия (1.2)–(1.4) должны быть удовлетворены точно. Для этого их сведем к одному интегральному уравнению. Интегрируя уравнение (1.1) по z и удовлетворяя граничному условию (1.2), получим

$$v_z = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^z v_x dz - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^z v_y dz \tag{1.6}$$

Подставляя это выражение в условие (1.3) и затем интегрируя его по y и удовлетворяя условию (1.4), после преобразований получим интегральное условие несжимаемости жидкости с учетом кинематических граничных условий

$$\int_0^b v_y dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y}\left(\int_0^b v_x dz\right)dy + F(x, y, t) = 0 \tag{1.7}$$

где

$$F(x, y, t) = \int_{y_0}^{y}\frac{w}{\nu_z}dy - \frac{w_0}{\nu_{0y}}b_0 \tag{1.8}$$

Рассмотрим далее поперечное сечение $x = \text{const}$, в котором оболочка заполнена жидкостью полностью под крышку $y = y_1(x)$. На крышке необходимо удовлетворить кинематическому граничному условию

$$v_y = \frac{w_1}{\nu_{1y}} + y_1' v_x \quad \text{при} \quad y = y_1(x) \tag{1.9}$$

где

$$\frac{1}{\nu_{1y}} = \sqrt{1 + y_1'^2}$$

ν_{1y} – проекция нормали $\boldsymbol{\nu}_1$ на ось y.

Уравнение (1.7) при $y = y_1$ с учетом условия (1.9) приводим к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y_1}\left(\int_0^b v_x dz\right)dy + F(x, y_1, t) + \frac{w_1}{\nu_{1y}}b_1 = 0 \tag{1.10}$$

Если это уравнение проинтегрировать по x, то получим уравнение для расхода жидкости через поперечное сечение $x = \text{const}$

$$\int_{y_0}^{y_1}\left(\int_0^b v_x dz\right)dy = Q(x, t) \tag{1.11}$$

где $Q(x, t)$ – объем жидкости, вытесненной за счет нормальных перемещений стенок в отсеченной части полости.

2. Аппроксимация перемещений жидкости и составление уравнений колебаний. Компоненты перемещений жидкости v_x и v_y при симметричных колебаниях будем искать в виде (всюду далее суммирование ведется по $n = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(x, y, t) + \sum U_n(x, y, t)P_{2n}(\zeta) \\ v_y &= V_0(x, y, t) + \sum V_n^*(x, y, t)P_{2n}(\zeta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\zeta = z/b$; $P_{2n}(\zeta)$ – четные функции Лежандра.

Уравнение (1.7) при представлении перемещений υ_x, υ_y в виде (2.1) удовлетворяется при условиях

$$V_0 = -\frac{1}{b}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_0}^{y} U_0 b dy + F\right], \quad V_n^* = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_0}^{y} U_n b dy + V_n \tag{2.2}$$

Здесь U_0, U_1, V_1, U_2, V_2, … – подлежащие определению функции от x, y, t; при этом для выполнения условия (1.4) необходимо, чтобы

$$V_n = 0 \text{ при } y = y_0(x), \quad n = 1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Перемещение υ_z на основании выражения (1.6) при учете соотношений (2.1)–(2.3) определяется как

$$\upsilon_0 = \left(U_0\frac{\partial b}{\partial x} + V_0\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{w}{\nu_z}\right)\zeta + \sum\left(U_n\frac{\partial b}{\partial x} + V_n^*\frac{\partial b}{\partial y}\right)\zeta P_{2n}(\zeta) -$$

$$-\sum\left(\frac{\partial(V_n b)}{\partial y}\int\limits_0^{\zeta} P_{2n}(\zeta)d\zeta\right) \tag{2.4}$$

В полностью заполненной жидкостью части оболочки граничное условие (1.9) на поверхности крышки будет удовлетворяться точно, если согласно уравнению (1.10) функции U_0, U_1, V_1, U_2, V_2, … подчинить к условиям

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_0}^{y} U_0 b dy + F(x, y_1, t) + \frac{w_1}{\nu_{1y}}b_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_0}^{y_1} U_n b dy = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$V_n = 0 \text{ при } y = y_0(x); \; V_n = 0 \text{ при } y = y_1(x); \; n = 1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Таким образом, в частично и в полностью заполненных частях оболочки основными неизвестными являются функции U_0, U_1, V_1, U_2, V_2, …. Их можно искать в виде полиномов по степеням y

$$\begin{aligned} U_n(x, y, t) &= U_{n0}(x, t) + U_{n1}(x, t)y + U_{n2}(x, t)y^2 + \ldots \\ V_n(x, y, t) &= V_{n0}(x, t) + V_{n1}(x, t)y + V_{n2}(x, t)y^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $U_{ni}(x, t)$, $V_{ni}(x, t)$ – неизвестные функции (n, $i = 0, 1, 2, \ldots$); при этом наибольшая степень y должна быть не ниже наибольшей степени z удерживаемых членов в рядах (2.1).

При использовании разложения υ_x в ряды (2.1), (2.6) по степеням z и y граничные условия (1.5) на торцах $x = 0$, $x = l$ могут быть удовлетворены точно, если эти торцы недеформируемые (т.е. если они могут только перемещаться и поворачиваться в плоскости xy). Если на этих торцах имеются упругие пластины, то граничные условия (1.5) могут быть удовлетворены приближенно по методу наименьших квадратов путем минимизации функционалов

$$I^0 = \left[\int\limits_{y_0}^{H}\int\limits_{0}^{b}(\upsilon_x - u^0)^2 dz dy\right]_{x=0}, \quad I^1 = \left[\int\limits_{y_0}^{H}\int\limits_{0}^{b}(\upsilon_x - u^1)^2 dz dy\right]_{x=l} \quad (H \le y_1)$$

Таким образом, функции $U_{ni}(x, t)$ в разложениях (2.6) должны определяться с учетом кинематических граничных условий на торцах, а в случае полного заполнения части полости – также условий (2.5).

Для решения гидродинамической задачи (при заданных перемещениях стенок полости) или связанной задачи гидроупругости (когда упругие перемещения оболочки, днища, крышки и торцов неизвестны) может быть использован метод Ритца или МКЭ. Для общего случая последний более удобен для расчета. При этом в качестве конечных элементов рассматриваются слои жидкости между поперечными сечениями $x = x_k$ ($k = 0, 1, \dots N$), ограниченные дном, оболочкой и свободной поверхностью жидкости (или крышкой).

Для слоя жидкости со свободной поверхностью, ограниченного поперечными сечениями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$, в квадратичном приближении ($n = 1$) неизвестные функции $U_0(x, y, t)$, $U_1(x, y, t)$ и $V_1(x, y, t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned}
(U_0, U_1, V_1) &= (R_0^{(k-1)}, R_1^{(k-1)}, R_2^{(k-1)})\alpha_{k-1} + (R_0^{(k)}, R_1^{(k)}, R_2^{(k)})\beta_k \\
R_m^{(k)}(y) &= r_{m0}^{(k)} + r_{m1}^{(k)}y + r_{m2}^{(k)}y^2, \quad m = 0, 1, 2 \\
\alpha_{k-1}(x) &= 1 - \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad \beta_k(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, при удержании в разложениях (2.1) только двух членов с U_0, U_1 и V_0, V_1^* конечный элемент в виде слоя жидкости со свободной поверхностью при учете условий (2.3), т.е. при

$$\begin{aligned}
&V_1(x_{k-1}, y_0(x_{k-1}), t) = 0, \quad V_1(x_k, y_0(x_k), t) = 0 \\
&y_0(x) = y_0(x_{k-1})\alpha_{k-1}(x) + y_0(x_k)\beta_k(x), \quad x_{k-1} \le x \le x_k
\end{aligned}$$

будет иметь 16 степеней свободы – по 8 на каждом торце, которые представляются шестнадцатью линейно-независимыми обобщенными координатами $r_{mi}^{(k-1)}(t)$ и $r_{mi}^{k}(t)$.

Для слоя жидкости в полностью заполненной части полости необходимо удовлетворить условиям (2.5). Эти дополнительные условия для функции $U_0(x, y, t)$, $U_1(x, y, t)$ и $V_1(x, y, t)$ на левом ($x = x_{k-1}$) и правом ($x = x_k$) торцах слоя записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{y_0}^{y_1} U_0 b dy\right]_{x = x_k} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[F(x, y_1, t) + \frac{w_1}{\mathrm{v}_{1y}} b_1\right] dx = \left[\int_{y_0}^{y_1} U_0 b dy\right]_{x = x_{k-1}} \\
&\left[\int_{y_0}^{y_1} U_1 b dy\right]_{x = x_k} = \left[\int_{y_0}^{y_1} U_1 b dy\right]_{x = x_{k-1}} \\
&V_1(x_{k-1}, y_0(x_{k-1}), t) = 0, \quad V_1(x_k, y_0(x_k), t) = 0 \\
&V_1(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), t) = 0, \quad V_1(x_k, y_1(x_k), t) = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

С помощью этих шести условий связи можно исключить шесть обобщенных координат, например, $r_{00}^{(k)}$, $r_{10}^{(k)}$, $r_{20}^{(k-1)}$, $r_{21}^{(k-1)}$, $r_{20}^{(k)}$, $r_{21}^{(k)}$. В результате при квадратичной аппроксимации v_x, v_y, по координатам z и y слой жидкости в полностью заполненной части оболочки будет иметь 12 степеней свободы – 7 на левом торце и 5 на правом.

Если в рассматриваемом варианте МКЭ для v_x, v_y, использовать трехчленные аппроксимации (2.1), где U_0, U_1, V_1, U_2, V_2 – полные полиномы по y до четвертой степени включительно и линейную аппроксимацию по x в пределах толщины слоя, то слой жидкости со свободной поверхностью будет иметь 46 степеней свободы – по 23 на каждом торце, а слой жидкости в полностью заполненной части оболочки будет иметь 39 степеней свободы – 21 на левом торце и 18 на правом торце.

Если геометрические параметры удлиненной оболочки (канала) и ее нормальные перемещения достаточно медленно изменяются вдоль контура и по длине, то для расчета вместо соотношений (2.1), (2.2) можно использовать одночленное приближение с линейной аппроксимацией v_x по y

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(x,y,t) = U_{00}(x,t) + U_{01}(x,y)y \\ v_y &= V_0(x,y,t), \quad v_z = \left(U_0\frac{\partial b}{\partial x} + V_0\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{w}{\nu_z}\right)\zeta \end{aligned} \tag{2.9}$$

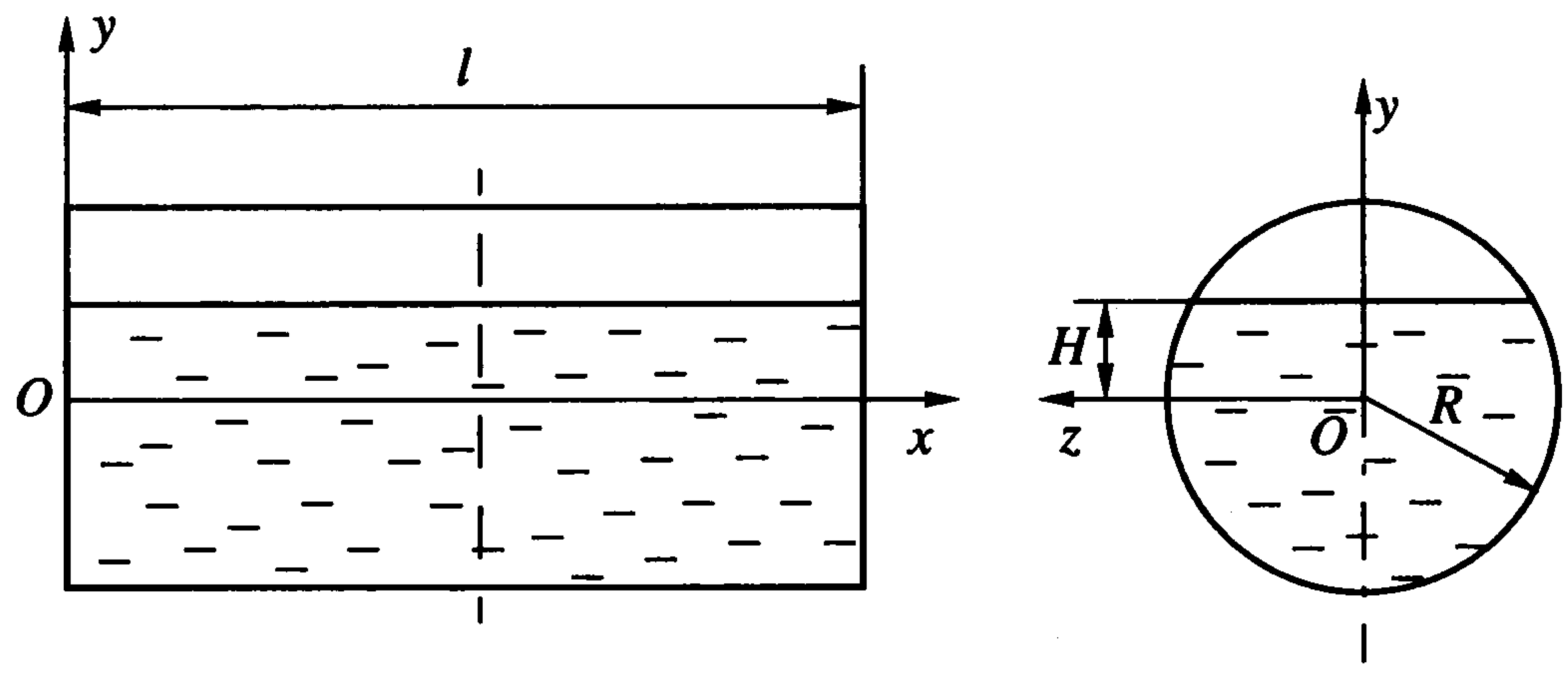
Это приближение соответствует гипотезе плоских поперечных сечений жидкости: при преимущественно продольных колебаниях жидкости в симметричной полости ее поперечные сечения $x = \text{const}$ перемещаются в продольном направлении и поворачиваются, оставаясь плоскими. При этом они деформируются в своей плоскости в соответствии с перемещениями v_y и v_z, которые определяются по формулам (2.9) при учете первого условия (2.2), так что условие несжимаемости жидкости и кинематические граничные условия на смоченной поверхности оболочки выполняются точно.

При использовании аппроксимации (2.9) слой жидкости со свободной поверхностью имеет 4 степени свободы, характеризуемых обобщенными координатами $r_{00}^{(k-1)}$, $r_{01}^{(k-1)}$, $r_{00}^{(k)}$, $r_{01}^{(k)}$ (см. (2.7)). Слой жидкости в полностью заполненной части оболочки в этом случае при учете первой формулы (2.8) имеет только 3 степени свободы, характеризуемых обобщенными координатами $r_{00}^{(k-1)}$, $r_{01}^{(k-1)}$, $r_{01}^{(k)}$.

При составлении уравнений колебаний жидкости в неподвижной или подвижной полости или в упругой оболочке в обобщенных координатах по методу Ритца или МКЭ используются выражения для кинетической и потенциальной энергии жидкости, которые в данном случае записываются в виде

$$\begin{aligned} T_* &= 2\frac{\rho}{2}\int_0^l\int_{y_0}^H\int_0^b(\dot v_x^2 + \dot v_y^2 + \dot v_z^2)\,dz\,dy\,dx, \quad H(x) \le y_1(x) \\ \Pi_* &= 2\frac{\rho g}{2}\int_0^l\int_0^{b_H}[v_y - H'v_x]_{y=H}^2\frac{dz\,dx}{\sqrt{1+H'^2}}, \quad b_H(x) = b(x,H) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, вектор которого перпендикулярен свободной поверхности жидкости. Если часть оболочки заполнена полностью ($H = y_1$), то потенциальная энергия гравитационных волн жидкости в этой части равна нулю.



Фиг. 2

3. Примеры расчета собственных колебаний жидкости. *Полость в виде прямоугольного горизонтального канала.* В данном случае задача о продольных колебаниях жидкости является плоской. Продольное перемещение для низшей формы колебаний согласно выражениям (2.6) при учете граничных условий $v_x = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ представим в виде

$$v_x = U_0 = (r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \ldots)\sin(\pi x/l)\sin\omega t$$

где $r_0, r_1, r_2, \ldots$ – неизвестные коэффициенты.

Значения квадрата безразмерной низшей частоты $\Omega_1^2 = \omega_1^2 H/g$, полученной по методу Ритца в одночленном, двучленном и трехчленном приближениях при глубине $H = 2l/\pi$, соответственно равны 1.7143, 1.9091, 1.92776; точное решение для потенциального движения жидкости дает значение 1.92805. Заметим, что одночленное приближение здесь соответствует теории длинных волн [7], а двучленное – гипотезе плоских сечений жидкости.

Полость в виде горизонтально расположенного кругового цилиндра (фиг. 2). Решение по методу Ритца, соответствующее гипотезе плоских сечений жидкости (2.9), для низшей формы колебаний ищется в виде

$$v_x = U_0 = (r_0(t) + r_1(t)y)\sin(\pi x/l)$$

Это решение для данной расчетной модели является точным. Наряду с ним строится численное решение этой задачи в такой же постановке по МКЭ (слоев). Полость разбивается на N одинаковых слоев, перпендикулярных оси x. В пределах каждого слоя решение получается в виде (2.9) с использованием линейных аппроксимаций по x для функций $U_{00}(x, t)$ и $U_{01}(x, t)$. В этом случае в качестве обобщенных координат рассматриваются продольные перемещения и углы поворота плоских сечений жидкости, разделяющих слои.

В табл. 1 приведены результаты вычислений квадрата безразмерной низшей частоты $\omega_1^2 R/g$ при $l = 2R$ и разных глубинах заполнения при помощи 1, 2, 3 МКЭ на основе гипотезы плоских сечений жидкости при $N = 4, 8, 16$; представлены также точное решение в перемещениях при использовании гипотезы плоских сечений жидкости и решение по методу Ритца для потенциального движения жидкости [2].

Круговая цилиндрическая полость с наклонной свободной поверхностью жидкости. Этот случай соответствует наклонной цилиндрической полости с горизонталь-

Таблица 1

Метод		$H/R = -0.5$	0	0.5
	$N = 4$	0.808	1.335	1.658
МКЭ	$N = 8$	0.781	1.300	1.625
	$N = 16$	0.774	1.291	1.617
Точное решение		0.762	1.287	1.604
Метод Ритца		0.763	1.288	1.635

Таблица 2

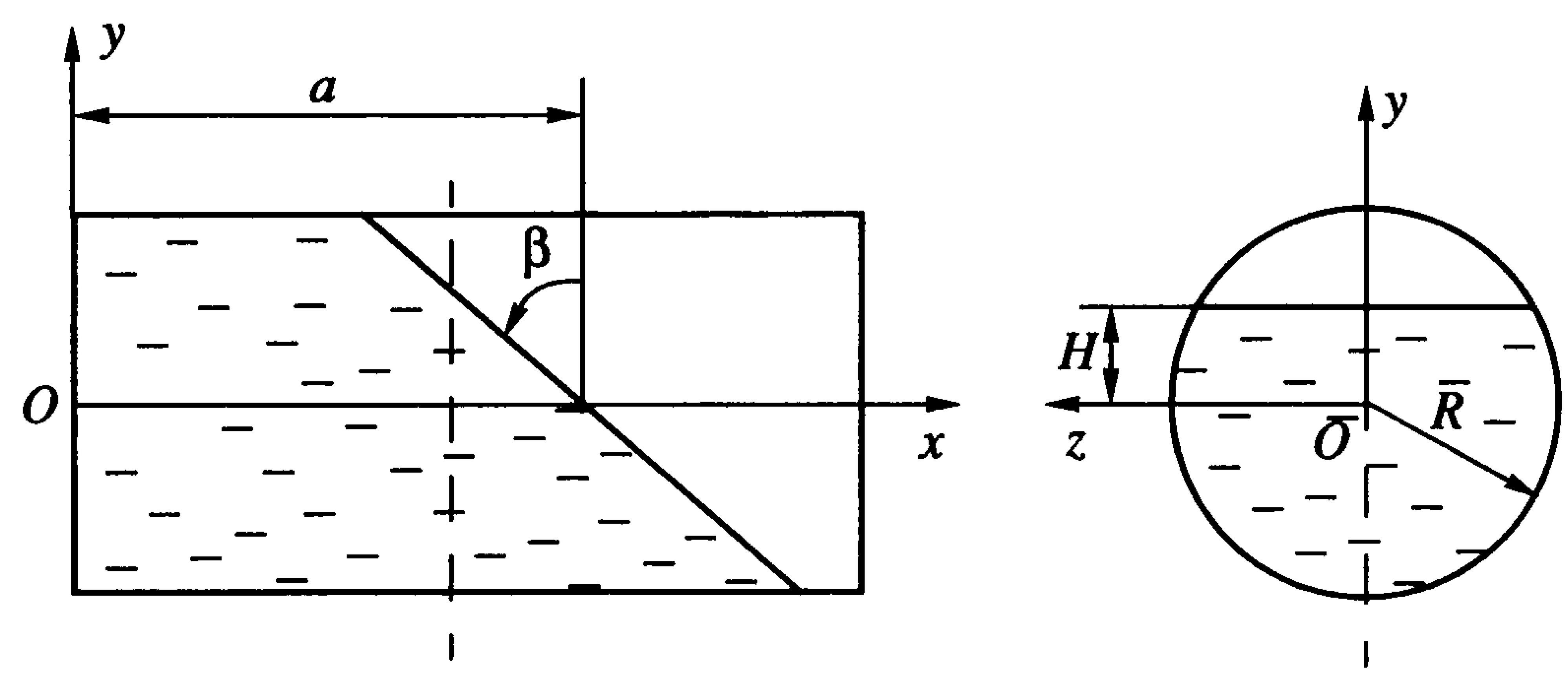
Метод		$\beta = 30°$	40°	50°	60°
МКЭ	$N = 6$	1.233	1.092	0.780	0.472
	$N = 12$	1.384	1.102	0.793	0.486
Метод Ритца		1.408	1.118	0.800	0.492

ной поверхностью жидкости. Левая часть полости заполнена полностью, а правая – частично (фиг. 3). Глубина заполнения в случае, когда свободная поверхность перпендикулярна оси полости, равна $a = 2R$.

В табл. 2 приведены значения квадрата безразмерной низшей частоты колебаний жидкости в полости $\omega_1^2 R/g$ для разных углов наклона свободной поверхности β, полученные по МКЭ (слоев) на основе гипотезы плоских сечений жидкости при $N = 6$ и $N = 12$; представлены также результаты расчета по методу Ритца для потенциального движения жидкости [2].

Полученные результаты расчета собственных колебаний жидкости в симметричных полостях показывают, что простейшая аппроксимация продольных перемещений жидкости, соответствующая гипотезе плоских сечений, дает вполне приемлемую точность вычисления низшей частоты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00475).



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н.* Вариационные задачи теории колебаний жидкости и тела с жидкостью // Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. М.: ВЦ АН СССР, 1962. С. 7–118.
2. *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.М.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
3. *Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. Л.: Судостроение, 1984. 237 с.
4. *Шклярчук Ф.Н.* О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С. 835–840.
5. *Григолюк Э.И., Горшков А.Г., Шклярчук Ф.Н.* Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 74–80.
6. *Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.* Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Москва
e-mail: mamai@ imec.msu.ru

Поступила в редакцию
20.IV.2003