УДК 539.375

© 2003 г. Д. В. Бабич

# УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МИКРОРАЗРУШЕНИЙ

Предлагается подход к изучению бифуркационной устойчивости выпуклых оболочек вращения двоякой кривизны с учетом микроповреждаемости изотропного материала в виде образования системы хаотически рассеянных по объему эллиптических микротрещин, концентрация которых увеличивается с ростом нагрузки. Неоднородный повреждающийся материал моделируется непрерывной средой, упругая симметрия и механизмы нелинейного деформирования которой связаны с характером распределения микропрочности и видом взаимодействия берегов микротрещин, зависящим от наводимого в теле напряженного состояния. Постановка задачи бифуркационной устойчивости для оболочек вращения осуществляется с использованием концепции продолжающегося нагружения в рамках гипотез Кирхгофа–Лява. В качестве примера решены задачи об устойчивости эллипсоидальных оболочек при внутреннем и внешнем давлении.

В силу неоднородности прочностных свойств структурных элементов во многих материалах с ростом уровня нагружения происходит накопление микродефектов типа плоских трещин [1–4]. Вследствие таких структурных изменений в материале диаграмма деформирования нелинейная. Возможны два механизма нелинейного деформирования. Один из них связан с ростом концентрации микротрещин, другой – с характером взаимодействия поверхностей микротрещин (раскрытые либо закрытые трещины), который определяется видом напряженного состояния тела.

Был предложен [5, 6] один из способов описания совместного деформирования и повреждаемости материала, причем разрушенные микрообъемы моделировались сфероидальными микропорами.

Ниже предлагается континуальная модель деформирования упруго-хрупких материалов, сопровождающегося накоплением повреждений в виде плоских микротрещин, случайным образом расположенных по объему тела. Считается, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой.

Предлагаемая модель используется для исследования местной потери устойчивости выпуклых оболочек вращения. С нелинейностью уравнений состояния повреждающегося материала, как и при исследовании устойчивости за пределом упругости [7, 8], связаны два варианта потери устойчивости, а именно: потеря устойчивости при продолжающемся нагружении (отсутствие областей разгрузки) и потеря устойчивости при постоянной нагрузке (наличие областей разгрузки и догрузки). На участках разгрузки концентрация трещин не меняется, поэтому деформирование происходит по линейному закону. При догрузке материал деформируется нелинейно, вследствие увеличения концентрации трещин, вызывающего снижение сопротивления деформированию. Следствием этого являются более низкие значения критической нагрузки по сравнению со случаем постоянного нагружения. Из соображений простоты постановки задач устойчивости ниже используется концепция продолжающегося нагружения.

**1. Связанное деформирование и трещинообразование при сложном напряженном состоянии.** С использованием энергетического метода [9] были получены [10, 11] уравнения состояния для поврежденного материала с постоянной концентрацией плоских микродефектов при всесторонних растяжении, сжатии и двухосном напряженном состоянии, сопровождающемся растяжением и сжатием.

Связь между макронапряжениями и макродеформациями для среды, моделирующей изотропный трещиноватый материал, в общем случае имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

где напряжения $\sigma_{kl}$ считаются заданными в лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом, а деформации $\varepsilon_{ij}$ подлежат осреднению. Эффективные податливости $a_{ijkl}$ поврежденной среды определяются энергетическим методом [9], основанным на принципе эквивалентности энергии поврежденной среды и сплошной среды, моделирующей первую [12]. Плотность энергии деформирования модельной среды записывается в виде

$$W = {}^1\!/\!_2\, a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = W^\circ + W', \quad W^\circ = {}^1\!/\!_2\, a^\circ_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.2}$$

где $W^\circ$ – плотность энергии сплошной среды, $W'$ – приращение плотности энергии деформирования поврежденной среды, связанное с освобождением внутренней энергии вследствие нарушения связей при нормальном отрыве и сдвиге поверхностей трещин.

Плотность освобожденной энергии поврежденного материала можно определить в виде работы взаимного смещения поверхностей трещин, вызванного напряжениями, которые имели бы место при заданном нагружении в сплошной среде в местах, занимаемых трещинами [9],

$$W' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_0}\int_{s_k} U_i^k\sigma_{i3}^k ds_k, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

где $N_0$ – количество трещин в единице объема, $U_i^k$ $(i = 1, 2, 3)$ – перемещения в точках поверхности $k$-й трещины, $s_k$ – полная поверхность $k$-й трещины, $\sigma_{i3}^k$ $(i = 1, 2, 3)$ – компоненты тензора напряжений в собственной системе координат $k$-й трещины $O^kx_1^kx_2^kx_3^k$. В случае эллиптических трещин оси $O^kx_i^k$ $(i = 1, 2)$ направлены соответственно по большей $(a)$ и меньшей $(b)$ полуосям трещин, а ось $O^kx_3^k$ – по нормали к их поверхностям. Локальные напряжения $\sigma_{i3}^k$, вызывающие смещения берегов трещины, и средние напряжения $\sigma_{ij}$ в представительном объеме связаны преобразованием

$$\sigma_{i3}^k = \sigma_{mn}\alpha_{im}^k\alpha_{3n}^k \tag{1.4}$$

где $\alpha_{im}^k$, $\alpha_{3n}^k$ – определяемые углами Эйлера $(\theta^k, \varphi^k, \psi^k)$ направляющие косинусы собственной системы координат $k$-й трещины по отношению к лабораторной системе координат.

При широком распределении трещин по ориентациям $(\theta, \varphi, \psi)$ и размерам $(a, b)$ податливости поврежденного материала определяются через характеристики трещин и постоянные упругости сплошного материала

$$a_{ijkl} = a^\circ_{ijkl} + a'_{ijkl} \tag{1.5}$$

Здесь $a'_{ijkl}$ – результат осреднения $W'$, зависящий от закона распределения трещин по ориентациям и размерам, задаваемого плотностью распределения $F(\varphi, \psi, \theta, a, b)$,

$$\langle W'\rangle = \frac{1}{8\pi^2}\int_\varphi\int_\psi\int_\theta\int_a\int_b F(\varphi, \psi, \theta, a, b)W'\sin\theta d\varphi d\psi d\theta da db$$

а также от характера взаимодействия поверхностей микротрещин, который определяется видом наводимого в теле напряженного состояния. В частности, для изотропного материала с дефектами в виде плоских трещин, статистически однородно изотропно распределенными по объему, при всестороннем сжатии вторые слагаемые правой части равенств (1.5) будут определяться соотношениями [10, 11]

$$a'_{iiii} = \frac{2}{15}(1-3f^2)A\varepsilon, \quad a'_{iijj} = -\frac{1}{15}(1+2f^2)A\varepsilon$$
$$a'_{ijij} = \frac{2}{15}(3-4f^2)A\varepsilon, \quad (i,j) = 1,2,3; \quad A = A_1 + A_2 \tag{1.6}$$

где $A_1, A_2$ – величины, определяющие вклад трещины в приращение плотности энергии освобождения при продольном и поперечном сдвиге, $\varepsilon$ – концентрация трещин, $f$ – коэффициент трения скольжения на поверхностях трещин. Формулы для трех первых величин приводятся ниже.

При сложном напряженном состоянии, в котором сочетается растяжение со сжатием, изотропный поврежденный материал ведет себя как анизотропная физически нелинейная среда в связи с зависимостью количеств закрывающихся и раскрывающихся при деформировании трещин от значений и знаков компонент тензора средних по объему напряжений. Применительно к задачам устойчивости оболочек рассмотрено напряженное состояние типа

$$\sigma_{11} < 0, \quad \sigma_{22} > 0, \quad \sigma_{12} \geq 0$$

В этом случае раскрываются только трещины, ориентированные под углами $\varphi^k$ к направлению растягивающего напряжения. Значения этих углов удовлетворяют неравенствам

$$(i-1)\pi - \operatorname{arctg}\lambda_1 < \varphi_k < (i-1)\pi + \operatorname{arctg}\lambda_2$$
$$\lambda_i = \sigma_{12}/|\sigma_{11}| + (-1)^i\sqrt{\sigma_{12}^2/\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}/|\sigma_{11}|}, \quad i = 1,2$$

В соответствии с общей процедурой применяемого метода в зависимости от характера взаимодействия поверхностей трещин получаются три варианта выражений для вторых слагаемых податливостей в соотношениях (1.5) (всюду далее, если не оговорено иное, $i, j = 1, 2$):

1) идеальное проскальзывание на поверхностях трещин ($\sigma_{33}^k < 0, f = 0$)

$$a'_{iiii} = \left(\frac{2}{15}A + k_{iiii}^{(3)}A_3\right)\varepsilon, \quad a'_{iijj} = \left(-\frac{1}{15}A + k_{iijj}^{(3)}A_3\right)\varepsilon$$
$$a'_{ijij} = \left(\frac{2}{5}A + k_{ijij}^{(3)}A_3\right)\varepsilon \tag{1.7}$$

2) коэффициент трения достаточно большой, так что скольжение поверхностей в закрытых трещинах отсутствует ($\sigma_{33}^k < 0$, $|\sigma_{i3}^k| < f|\sigma_{33}^k|$)

$$a'_{iiii} = (k_{iiii}^{(1)}A + k_{iiii}^{(3)}A_3)\varepsilon, \quad a'_{iijj} = (k_{iijj}^{(1)}A + k_{iijj}^{(3)}A_3)\varepsilon$$
$$a'_{ijij} = (k_{ijij}^{(1)}A + k_{ijij}^{(3)}A_3)\varepsilon \tag{1.8}$$

3) силы трения на поверхностях трещин меньше локальных сдвигающих напряжений ($\sigma_{33}^k < 0$, $|\sigma_{i3}^k| > f|\sigma_{33}^k|$)

$$a'_{iiii} = \left\{\frac{2}{15}\left[1 - f^2\left(3 - \frac{15}{2}k_{iiii}^{(3)}\right)\right]A + k_{iiii}^{(3)}A_3\right\}\varepsilon$$

$$a'_{iijj} = \left\{-\frac{1}{15}[1 + f^2(2 - 15k_{iijj}^{(3)})]A + k_{iijj}^{(3)}A_3\right\}\varepsilon \tag{1.9}$$

$$a'_{ijij} = \left\{\frac{2}{15}\left[3 - f^2\left(4 - \frac{15}{2}k_{ijij}^{(3)}\right)\right]A + k_{ijij}^{(3)}A_3\right\}\varepsilon$$

Здесь

$$k_{iiii}^{(m)} = \frac{2m}{15\pi}\alpha + (-1)^i\frac{7m-5}{60\pi}S_2 + \frac{3m-5}{120\pi}S_4$$

$$k_{1122}^{(m)} = \frac{3m-5}{30\pi}\left(\alpha - \frac{1}{4}S_4\right), \quad k_{1212}^{(m)} = \frac{m+5}{15\pi}\alpha - \frac{3m-5}{30\pi}S_4; \quad m = 1, 3$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_i = \operatorname{arctg}\lambda_i, \quad S_n = \sin n\alpha_1 + \sin n\alpha_2; \quad n = 2, 4$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_i = \frac{1-\nu}{E_0}R_i(k, \nu_0), \quad A_3 = \frac{1-\nu_0^2}{E_0\mathbf{E}(k)}$$

$$R_i(k, \nu_0) = k^2[(k^2 - \nu_0(1 - (i-1)(1-k_1^2)))\mathbf{E}(k) + (-1)^{i+1}\nu_0k_1^2\mathbf{K}(k)]^{-1}$$

$$k^2 = 1 - b^2/a^2, \quad k_1^2 = 1 - k^2$$

$\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\varepsilon = {}^4/_3\pi N_0\langle ab^2\rangle$ – малый параметр, определяющий концентрацию трещин [9].

В случае круговых трещин радиуса $a$ имеют место соотношения

$$A_1 = A_2 = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}, \quad A_3 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}, \quad \varepsilon = \frac{4\pi}{3}N_0\langle a^3\rangle$$

Технические постоянные поврежденного материала через податливости в общем случае определяются соотношениями

$$\frac{1}{E_{ii}} = \frac{1}{E_0} + a'_{iiii}, \quad \frac{1}{G_{ij}} = \frac{1}{G_0} + a'_{ijij}, \quad \frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_0}{E_0} - a'_{jjii} \tag{1.10}$$

Здесь $E_{ii}$, $G_{ij}$, $\nu_{ij}$ – нормальные модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона.

При использовании приведенных выше соотношений для описания процесса совместного деформирования упруго-хрупких материалов и образования в них трещин необходимо найти зависимость объемной концентрации микротрещин $\varepsilon$ от параметров нагружения. Подходящей для этой цели является структурная модель накопления повреждений Даниэлса [13]. Изменение объемной концентрации микротрещин $\varepsilon$ зависит от механизма микроразрушений в материале, распределения прочностных свойств по объему, а также от истории нагружения.

Ниже в качестве примера рассматривается микроразрушение типа отрыва. По аналогии может быть рассмотрено и разрушение, связанное со сдвигом. За критерий разрушения структурных элементов материала принимаются соотношения первой теории прочности [1–4]

$$\sigma_n \geq \sigma \tag{1.11}$$

где $\sigma$ – случайная величина, которая может обозначать предельные значения растягивающего либо сжимающего напряжений, вызывающих разрушение структурных элементов материала. Предполагается, что при достижении растягивающим напряжением $\sigma_n$ значения $\sigma$ на соответствующей площадке образуется микротрещина, плоскость которой нормальна к направлению действия напряжения $\sigma_n$. В случае сжимающего напряжения $\sigma_n$ микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению $\sigma_n$ [2, 3].

Если в качестве представительного объема выбрать шар некоторого радиуса, в котором заданы средние напряжения $\sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, то нормальное напряжение $\sigma_n$ на площадке, ориентация нормали к которой задана сферическими координатами $\theta$ (широта) и $\varphi$ (долгота), будет определяться выражением

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{11}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{33}\cos^2\theta + \\ &+ 2\sigma_{12}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta + 2\sigma_{13}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\sigma_{23}\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{1.12}$$

Истинное растягивающее напряжение $\sigma'_n$ на этой площадке вследствие уменьшения несущей площади сечения представляется соотношением

$$\sigma'_n = \sigma_n/[1 - P_n(\sigma'_n)]$$

где $P_n(\sigma'_n)$ – относительная часть площади пересечения разрушенных структурных элементов. Концентрация плоских микродефектов в случайном сечении представительного объема, таким образом, определяется вероятностью $P_n(\sigma'_n \geq \sigma)$ того, что значения нормального напряжения $\sigma'_n$ будут не меньше предела прочности частиц микроструктуры $\sigma$, являющегося случайной величиной. При сжатии $(\sigma_n < 0)$ несущая площадь не меняется $(\sigma'_n = \sigma_n)$. Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации по аналогии с известным подходом [13] используется степенной закон

$$P(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_0 \\ (\sigma - \sigma_0)^\eta/(\sigma_c - \sigma_0)^\eta, & \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c \\ 1, & \sigma > \sigma_c \end{cases} \tag{1.13}$$

Параметры распределения $\eta$, $\sigma_0$, $\sigma_c$ находятся по выборочным значениям, например, методом моментов [14]. Основные моменты – средняя микропрочность $\langle\sigma\rangle$ и дисперсия $D^2$ для распределения (1.13) имеют вид

$$\langle\sigma\rangle = \frac{\eta}{\eta + 1}(\sigma_c - \sigma_0) + \sigma_0, \quad D^2 = \frac{\eta}{\eta + 2}\sigma_c^2 - \frac{2\eta}{\eta + 1}\langle\sigma\rangle\sigma_c + \langle\sigma\rangle^2 \tag{1.14}$$

При учете закона (1.13) средняя вероятность разрушения элементов структуры, пересекающих единицу поверхности представительного объема, будет определяться соотношением

$$p = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n \sin\theta d\theta d\varphi, \quad P_n = P(\sigma'_n) \tag{1.15}$$

Физический смысл величины $p$ заключается в том, что она представляет относительную долю единицы площади поверхности шара, на которой нормальные напряжения $\sigma_n$ превышают предел прочности $\sigma$ пересекаемых поверхностью шара микрочастиц. При этом в случае растяжения частицы растрескиваются по поверхностям, нормальным к $\sigma_n$, а при сжатии – в направлении действия $\sigma_n$. Объемная концентрация плоских микродефектов $\varepsilon$, фигурирующая в соотношениях (1.6)–(1.9), будет определяться отношением количества разрушенных микрочастиц $N_p$ к их общему количеству $N$ в представительном объеме. Воспользовавшись приемом, применяемым в петрографии для анализа тонких срезов осадков [15], можно показать, что $\varepsilon = p$.

Таким образом, связанный процесс деформирования и дисперсного разрушения в виде образования системы стохастически ориентированных плоских микротрещин моделируется замкнутой системой нелинейных уравнений (1.1), (1.6)–(1.9), (1.11)–(1.13), (1.15).

Применительно к постановке и решению задач устойчивости оболочек с учетом микроповреждаемости материала в дальнейшем понадобятся приведенные выше определяющие уравнения в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_{11}+\nu_{21}\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_{22}+\nu_{12}\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = G_{12}\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_{11}}(\sigma_{11}-\nu_{12}\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_{22}}(\sigma_{22}-\nu_{21}\sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}\end{gathered} \tag{1.16}$$

Здесь $E_{ii}$, $G_{12}$, $\nu_{ij}$ – характеристики упругости, определяемые формулами (1.10) в зависимости от наводимого в теле напряженного состояния.

**2. Постановка задачи устойчивости оболочек вращения из повреждающегося материала.** Местная потеря устойчивости тонких оболочек вращения в упругой области деформирования рассматривалась ранее [16]. Была решена [8] аналогичная задача за пределом упругости. Ниже предлагается способ решения задач о местной потере устойчивости замкнутых оболочек двоякой кривизны, сопровождающейся образованием плоских микродефектов в материале. Оболочка толщиной $h$ относится к системе координат $O_m x_1 x_2 x_3$, связанной со срединной поверхностью. Координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ отсчитываются соответственно в меридиональном, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях. Перемещения точек срединной поверхности в указанных направлениях обозначаются буквами $u$, $v$, $w$. Для рассматриваемого типа оболочек при решении задач устойчивости можно воспользоваться аппаратом теории пологих оболочек [7, 8, 16]. Тогда в рамках гипотез Кирхгофа–Лява в произвольной точке оболочки деформации будут определяться соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + x_3\chi_{ij} \tag{2.1}$$

где деформации, кривизны и кручение срединной поверхности имеют вид

$$\begin{gathered} e_{11} = u_{,1} - k_1 w, \quad e_{22} = v_{,2} - k_2 w, \quad e_{12} = u_{,2} + v_{,1} \\ \chi_{11} = -w_{,11}, \quad \chi_{22} = -w_{,22}, \quad \chi_{12} = -2w_{,12} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Вид уравнений местной потери устойчивости оболочек в смешанной форме от свойств материала не зависит [7, 8, 16]:

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + h(k_1\Phi_{,22} + k_2\Phi_{,11}) + h(\sigma_{11}^\circ w_{,11} + 2\sigma_{12}^\circ w_{,12} + \sigma_{22}^\circ w_{,22}) = 0$$
$$\bar{e}_{11,22} + \bar{e}_{22,11} - \bar{e}_{12,12} = -k_1 w_{,22} - k_2 w_{,11} \qquad (2.3)$$

Здесь

$$M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} x_3\bar{\sigma}_{ij}dx_3$$

$\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{e}_{ij}$, $\chi_{ij}$, $w$ – приращения моментов и напряжений в оболочке вследствие изгиба, а также деформаций, кривизн и прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии, $\sigma_{ij}^\circ$ – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии, $k_1$, $k_2$ – главные кривизны оболочки в меридиональном и окружном направлениях.

К этим уравнениям необходимо присоединить выражения для возмущений цепных напряжений через функцию напряжений $\Phi$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{11} = \Phi_{,22}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{22} = \Phi_{,11}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{12} = -\Phi_{,12} \qquad (2.4)$$

Приращения напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\circ$ и деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^\circ$ определяются путем варьирования в окрестности основного напряженного состояния уравнений (1.16), связывающих конечные значения напряжений и деформаций для повреждающейся среды, с учетом зависимости модулей упругости от концентрации микротрещин $\varepsilon$. В результате варьирования в окрестности основного напряженно-деформированного состояния возмущения напряжений и деформаций представляются в виде

$$\bar{\sigma}_{ii} = a_{i1}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{i2}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{i3}\bar{\varepsilon}_{12}, \quad \bar{\sigma}_{12} = a_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{33}\bar{\varepsilon}_{12} \qquad (2.5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ii} = A_{i1}\bar{\sigma}_{11} + A_{i2}\bar{\sigma}_{22} + A_{i3}\bar{\sigma}_{12}, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = A_{31}\bar{\sigma}_{11} + aA_{32}\bar{\sigma}_{22} + A_{33}\bar{\sigma}_{12} \qquad (2.6)$$

Коэффициенты $a_{ij}$, $A_{ij}$, определяемые соотношениями

$$a_{11} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}, a_{12} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}, \ldots, A_{11} = \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{11}}, A_{12} = \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{22}}, \ldots$$

имеют вид

$$a_{ii} = \frac{E_{ii}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \alpha_{ii}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ii}}, \quad a_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \alpha_{11}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{22}}$$

$$a_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \alpha_{22}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{11}}, \quad \alpha_{3i} = -\alpha_{12}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ii}}, \quad a_{33} = G_{12} - \alpha_{12}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{12}}$$

$$a_{i3} = -\alpha_{ii}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{12}}, \quad \alpha_{ii} = \sigma_{ii}^\circ E_{ii}\frac{\alpha'_{iiii}}{\varepsilon}, \quad \alpha_{12} = \sigma_{12}^\circ G_{12}\frac{\alpha'_{1212}}{\varepsilon}$$

$$A_{ii} = \frac{1}{E_{ii}} + \beta_{ii}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{ii}}, \quad A_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} + \beta_{11}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{22}}, \quad A_{i3} = \beta_{ii}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{12}} \qquad (2.7)$$

$$A_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} + \beta_{22}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{11}}, \quad A_{3i} = \beta_{12}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{ii}}, \quad A_{33} = \frac{1}{G_{12}} + \beta_{12}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{12}}$$

$$\beta_{11} = (\sigma_{11}^\circ - \nu_{12}\sigma_{22}^\circ)\frac{a'_{1111}}{\varepsilon}, \quad \beta_{22} = (\sigma_{22}^\circ - \nu_{21}\sigma_{11}^\circ)\frac{a'_{2222}}{\varepsilon}$$

$$\beta_{12} = \sigma_{12}^\circ\frac{a'_{1212}}{\varepsilon}$$

Представленные выше соотношения справедливы для общего случая основного напряженного состояния оболочек различной геометрии. Далее рассматривается задача о местной потере устойчивости выпуклых оболочек вращения при однородном напряженном состоянии. В этом случае уравнения (2.3) при учете соотношений (2.4)–(2.7), справедливых для цепных и изгибных напряжений и деформаций, принимают вид

$$
\begin{gathered}
D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\
- T_{11}^{\circ} w_{,11} - T_{22}^{\circ} w_{,22} - 2T_{12}^{\circ} w_{,12} - h(k_1 \Phi_{,22} + k_2 \Phi_{,11}) = 0 \\
\bar{A}_1 \Phi_{,1111} + \bar{A}_2 \Phi_{,1122} + \bar{A}_3 \Phi_{,2222} - \bar{A}_4 \Phi_{,1112} - \bar{A}_5 \Phi_{,1222} = E_0 h(k_1 w_{,22} + k_2 w_{,11})
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

где

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}/E_0, \quad \bar{A}_{ij} = E_0 A_{ij}$$

$$a_1 = \bar{a}_{11}, \quad a_2 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 4\bar{a}_{33}, \quad a_3 = \bar{a}_{22}$$

$$a_4 = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}, \quad a_5 = \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32}$$

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_{22}, \quad \bar{A}_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + \bar{A}_{33}, \quad \bar{A}_3 = \bar{A}_{11}$$

$$\bar{A}_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23}, \quad \bar{A}_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31}$$

$$D = E_0 h^3/12, \quad T_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}^{\circ} h$$

($T_{ij}^{\circ}$ – погонные тангенциальные усилия докритического напряженного состояния).

**3. Осесимметричное нагружение оболочки.** В качестве иллюстративного примера рассматривается местная потеря устойчивости замкнутой оболочки вращения при действии внутреннего либо внешнего равномерного давления интенсивностью $q$. В этом случае усилия в основном напряженном состоянии определяются соотношениями

$$T_{11}^{\circ} = h\sigma_{11}^{\circ} = \pm\frac{qR_2}{2}, \quad T_{22}^{\circ} = h\sigma_{22}^{\circ} = \pm\frac{qR_2}{2}(2-\chi), \quad \chi = \frac{k_1}{k_2} \tag{3.1}$$

Верхний знак относится к случаю внутреннего давления.

Решение системы уравнений (2.8) представляется в виде [8, 16]

$$w = A\sin(k_2\lambda x_1)\sin(k_2 n x_2), \quad \lambda = \chi m \tag{3.2}$$

$m$, $n$ – волновые числа в меридиональном и окружном направлениях.

Критическое давление $q_*$ определяется формулой

$$q_* = \frac{2k_2}{1 \mp (2-\chi)\gamma}\left[Dk_2^2\lambda^2(a_1 + a_2\gamma + a_3\gamma^2)^2 + \frac{E_0 h(1+\gamma\chi)^2}{\lambda^2(\bar{A}_1 + \bar{A}_2\gamma + \bar{A}_3\gamma^2)}\right] \tag{3.3}$$

Верхний и нижний знаки относятся к случаю внутреннего и внешнего давлений соответственно. При $\gamma = n^2/\lambda^2 \gg 1$ минимальное значение критического давления определяется формулой

$$q_* = \frac{2E_0 h^2 k_1 k_2^2}{\mp\sqrt{3}(2k_2 - k_1)}\sqrt{\frac{a_3}{\bar{A}_3}} \tag{3.4}$$

Для сплошного упругого материала ($\varepsilon = 0$) выражение (3.4) переходит в известную формулу [16]

$$q_* = \frac{2E_0}{\sqrt{3(1-\nu_0^2)}} \frac{h^2 k_1 k_2^2}{2k_2 - k_1} \tag{3.5}$$

В формулах (3.4), (3.5) $k_1$, $k_2$ – некоторые средние значения главных кривизн участков оболочки, ограниченных узловыми линиями локальных форм потери устойчивости.

Из бесчисленного множества значений $q_*$, определяемых формулами (3.4), (3.5), искомым является минимальное. В случае замкнутых выпуклых оболочек наиболее слабыми в смысле локальной устойчивости участками будут области поверхности оболочки, содержащие касательные к образующей, параллельные либо перпендикулярные к оси вращения. В частности, в эллипсоидальных оболочках такие области расположены на экваторе и в полюсах. Кривизны в полюсах (индекс $p$) и экваториальных точках (индекс $e$) в оболочке с полуосями $\bar{a}$ (радиус экватора) и $\bar{b}$ определяются выражениями

$$k_{1_p} = \bar{b}/\bar{a}^2, \quad k_{2_p} = \bar{b}/\bar{a}^2; \quad k_{1_e} = \bar{a}/\bar{b}^2, \quad k_{2_e} = 1/\bar{a} \tag{3.6}$$

Из формулы (3.4) с учетом выражений (3.6) следует, что критические значения давления для эллипсоидальных оболочек при внешнем воздействии в зависимости от соотношения полуосей будут определяться формулами

$$q_* = q_*^\circ \times \begin{cases} (2\bar{b}^2/\bar{a}^2 - 1)^{-1}, & \bar{a} < \bar{b} \\ \bar{b}^2/\bar{a}^2, & \bar{a} > \bar{b} \end{cases}, \quad q_*^\circ = \frac{2h^2 E_0}{\sqrt{3}\bar{a}^2}\sqrt{\frac{a_3}{\bar{A}_3}} \tag{3.7}$$

При внутреннем давлении возможна местная потеря устойчивости вблизи экватора:

$$q_* = q_*^\circ (1 - 2\bar{b}^2/\bar{a}^2)^{-1}, \quad \bar{a} > \bar{b} \tag{3.8}$$

Многообразие возможных вариантов образования трещин в оболочках ограничивается рассмотрением микродефектов в виде круговых трещин и выбором материала со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} &E = 4.2 \times 10^{11}\ \text{Па}, \quad \upsilon_0 = 0.2, \quad \langle\sigma\rangle = 1.9 \times 10^9\ \text{Па} \\ &D = 0.672 \times 10^9\ \text{Па}, \quad f = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

При двухпараметрическом распределении микропрочности (формула (1.13) при $\sigma_0 = 0$) из выражений (1.14) для материала с параметрами (3.9) следует

$$\eta = 2, \quad \sigma_c = 2.8 \times 10^9\ \text{Па} \tag{3.10}$$

Концентрация трещин при учете соотношений (1.12), (1.13), (1.15), (3.10) будет определяться формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{15\sigma_c^2}[(3\sigma_{11}^{\circ 2} + 2\sigma_{11}^\circ\sigma_{22}^\circ + 2\sigma_{22}^{\circ 2})] \tag{3.11}$$

Выражения для напряжений в докритическом состоянии при внешнем (а) и внутреннем (б) давлениях имеют вид

$$\text{а)}\ \sigma_{11}^\circ = \sigma_{22}^\circ = -\frac{q_*\bar{a}^2}{2h\bar{b}}, \quad \text{б)}\ \sigma_{11}^\circ = \frac{q_*\bar{a}}{2h}, \quad \sigma_{22}^\circ = \frac{q_*\bar{a}}{2h}\left(2 - \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}^2}\right) \tag{3.12}$$

Из последней формулы (3.12) видно, что потеря устойчивости при внутреннем давлении возможна при $\bar{a}^2/\bar{b}^2 > 2$. Коэффициенты $a_3$, $\bar{A}_3$ в соответствии с выражениями (2.7) можно представить в виде

$$a_3 = \frac{E_{22}}{E_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left[1+\left(\alpha_{11}-\nu_{12}\alpha_{22}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{11}^\circ}\right)\right]\left(1+\alpha_{11}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{11}^\circ}+\alpha_{22}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{22}^\circ}\right)^{-1}$$

$$\bar{A}_3 = \frac{E_0}{E_{11}}+\frac{8E_0\sigma_{11}^\circ(\sigma_{11}^\circ-\nu_{12}\sigma_{22}^\circ)}{15\sigma_c^2}\frac{a'_{1111}}{\varepsilon} \qquad (3.13)$$

В случае внешнего давления в силу моделирования повреждающегося материала изотропной средой постоянные упругости имеют вид

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E_0}{1+E_0a'_{1111}}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = E_{11}\left(\frac{\nu_0}{E_0}-a'_{1122}\right)$$

где $a'_{1111}$, $a'_{1122}$ определяются выражениями (1.6). При внутреннем давлении в соотношениях (3.13) параметрам $E_{11}$, $E_{22}$, $\nu_{12}$, $\nu_{21}$, $a'_{1111}$, $a'_{2222}$ соответствуют величины $E_{22}$, $E_{11}$, $\nu_{21}$, $\nu_{12}$, $a'_{2222}$, $a'_{1111}$, определяемые формулами (1.7), (1.10) при $\lambda_1 = \lambda_2 = (\bar{a}^2/\bar{b}^2-2)^{-1/2}$.

Выражения (3.7), (3.8) представляют собой сложные зависимости относительно $q_*$, поскольку коэффициенты $a_3$, $\bar{A}_3$ связаны с нагрузкой. Поэтому прямое определение $q_*$ затруднительно. Однако при оценке влияния повреждаемости оболочек на их устойчивость в этом нет необходимости. Можно задаться последовательностью значений $q_*$ и по формулам (3.7), (3.8) найти соответствующие значения относительных толщин оболочек $h/\bar{a}$. Результаты таких вычислений для сплюснутых ($\bar{a} = 2\bar{b}$) эллипсоидальных оболочек при внутреннем давлении, полученные при учете (индекс + ) и без учета (индекс –) повреждаемости, представлены ниже

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_*\times10^{-2}$ | 792 | 3175 | 7163 | 12782 | 20068 | 29066 | 52415 | 83342 |
| $\varepsilon\times10^5$ | 183 | 733 | 1650 | 2933 | 4583 | 6600 | 11733 | 18333 |
| $(h/\bar{a})_+\times10^6$ | 283 | 567 | 853 | 1141 | 1434 | 1730 | 2340 | 2976 |
| $(h/\bar{a})_-\times10^6$ | 282 | 565 | 848 | 1131 | 1414 | 1607 | 2262 | 2826 |

Как и следовало ожидать, степень влияния повреждаемости материала на устойчивость повышается с увеличением относительной толщины оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков С.Д.* Статистическая теория прочности. Москва; Свердловск: Машгиз, 1960. 176 с.
2. *Германович Л.Н., Дыскин А.В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С.118–131.
3. *Dragon A., Mróz Z.* A continuum model for plastic-brittle behaviour of rocks and concrete // Int. J. Engng Sci. 1979. V. 17. P. 221–137 = *Драгон А., Мруз З.* Континуальная модель пластическихрупкого поведения скальных пород и бетона // Механика деформируемых твердых тел. Направление развития. М.: Мир, 1983. С. 163–188.

4. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
5. *Хорошун Л.П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. 1998. Т.34. № 10. С. 120–127.
6. *Хорошун Л.П., Шикула Е.Н.* Микромеханика кратковременной повреждаемости слоисто-волокнистых композитов // Прикл. механика. 2001. Т.37. № 5. С. 84–92.
7. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
8. *Григолюк Э.И.* Пластическое выпучивание оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 2. С. 130–132.
9. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
10. *Бабич Д.В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Проблемы прочности. 1996. № 3. С. 20–30.
11. *Бабич Д.В.* Исследование устойчивости композитных оболочек с учетом трещиноватости компонентов материала // Прикл. механика. 1999. Т.35. № 11. С. 46–54.
12. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N. Y., etc.: Wiley, 1979 = *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1983. 334 с.
13. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
14. *Cramer H.* Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Univ. Press, 1957 = *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир,1975. 648 с.
15. *Kendall M.G., Moran P.A.* Geometrical Probability. L.: Griffin, 1963 = *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192с.
16. *Работнов Ю.Н.* Локальная устойчивость оболочек // Доклады АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 111–112.

Киев
e-mail: ang@imech.freent.kiev.ua

Поступила в редакцию
23.VII.2002