

УДК 539.3

© 2003 г. И. А. Солдатенков

К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОЛСТОЙ ПОЛОСЫ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

Рассматривается контактное деформирование толстой упругой полосы при наличии касательных граничных напряжений. Известные асимптотические соотношения, описывающие подобное взаимодействие, представлены в виде системы двух сингулярных интегральных уравнений деформирования упругой полуплоскости с аддитивными поправками на конечность ширины полосы. Подобная форма записи уравнений в значительной мере формализует перенос постановок и методов решения задач для полуплоскости на аналогичные задачи для толстой полосы. В качестве примера рассматривается задача о вдавливании со сцеплением штампа в полосу.

Контактные задачи для толстой полосы характерны близостью соответствующих интегральных уравнений и решений к уравнениям и решениям задач о деформировании упругой полуплоскости [1–3], что позволяет в значительной мере формализовать перенос постановок и методов решения задач для полуплоскости на аналогичные задачи для толстой полосы. Ниже эта процедура проводится для уже решенной задачи о вдавливании со сцеплением штампа в полуплоскость [4].

1. Соотношения для толстой полосы. Пусть полоса шириной h занимает область $\{x, y : x \in (-\infty, \infty), y \in [0, h]\}$ и находится в условиях плоского деформированного состояния, вызванного приложением к ее верхней границе $y = h$ напряжений $q_1 = \tau_{xy}$, $q_2 = -\sigma_y$ по области контакта $x \in [-a, b]$. Нижняя граница $y = 0$ полосы считается жестко связанной с недеформируемым основанием.

С использованием преобразования Фурье можно установить следующую связь напряжений q_1, q_2 с перемещениями u и v верхней границы полосы вдоль осей x и y [2, 3, 5, 6]:

$$\begin{aligned} mu(x) &= \int_{-a}^b q_1(\xi) k_1\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi + \chi \int_{-a}^b q_2(\xi) k_{12}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi \\ mv(x) &= \chi \int_{-a}^b q_1(\xi) k_{12}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi - \int_{-a}^b q_2(\xi) k_2\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi \end{aligned} \quad (1.1)$$

где (E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона)

$$m = \pi E / [2(1 - \nu^2)], \quad \chi = (1 - 2\nu) / [2(1 - \nu)]$$

$$\begin{Bmatrix} k_j(z) \\ k_{12}(z) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} L_j(s) \cos zs \\ L_{12}(s) \sin zs \end{Bmatrix} \frac{ds}{s}, \quad j = 1, 2$$

$$L_j(s) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2s - (-1)^j 4s}{D(s)}, \quad L_{12}(s) = \frac{2\kappa (\operatorname{ch} 2s - 1) - 8(\kappa - 1)^{-1} s^2}{D(s)}$$

$$D(s) = 2\kappa ch 2s + 4s^2 + 1 + \kappa^2, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

причем для $|z| < 2$ имеют место асимптотические выражения

$$\begin{aligned} k_j(z) &= -\ln|z| + c_j + O(z^2), \quad j = 1, 2 \\ k_{12}(z) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} z + c_{12}z + O(z^3) \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которых коэффициенты c_j, c_{12} зависят только от κ [3].

Если ввести в рассмотрение размер $l = (a + b)/2$ области контакта и малый параметр η , то для толстой полосы [5]

$$l/h = \eta \ll 1 \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) означает, что аргумент z функций $k_j(z)$ и $k_{12}(z)$ имеет порядок малости η , что в свою очередь позволяет воспользоваться для их представления выражениями (1.2) с опущенными членами $O(z^2)$ и $O(z^3)$ [2]. Подстановка таких выражений в соотношения (1.1) с последующим дифференцированием по x полученных равенств приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} mu'(x) + \chi \frac{c_{12}}{h} P_2 &= -\pi\chi q_2(x) + \int_{-a}^b \frac{q_1(\xi)}{\xi - x} d\xi \\ mv'(x) + \chi \frac{c_{12}}{h} P_1 &= -\pi\chi q_1(x) - \int_{-a}^b \frac{q_2(\xi)}{\xi - x} d\xi \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$P_j = \int_{-a}^b q_j(x) dx, \quad j = 1, 2 \quad (1.5)$$

Отметим, что уравнения (1.4) отличаются от уравнений деформирования упругой полуплоскости [7] только наличием в правых частях аддитивных постоянных $\chi c_{12} h^{-1} P_j$, дающих поправку на конечность ширины полосы.

2. Задача о вдавливании со сцеплением штампа в толстую полосу. Пусть жесткий выпуклый штамп вдавливается со сцеплением в толстую полосу под действием касательной P_1 и нормальной P_2 нагрузок (фигура), связанных между собой законом нагружения

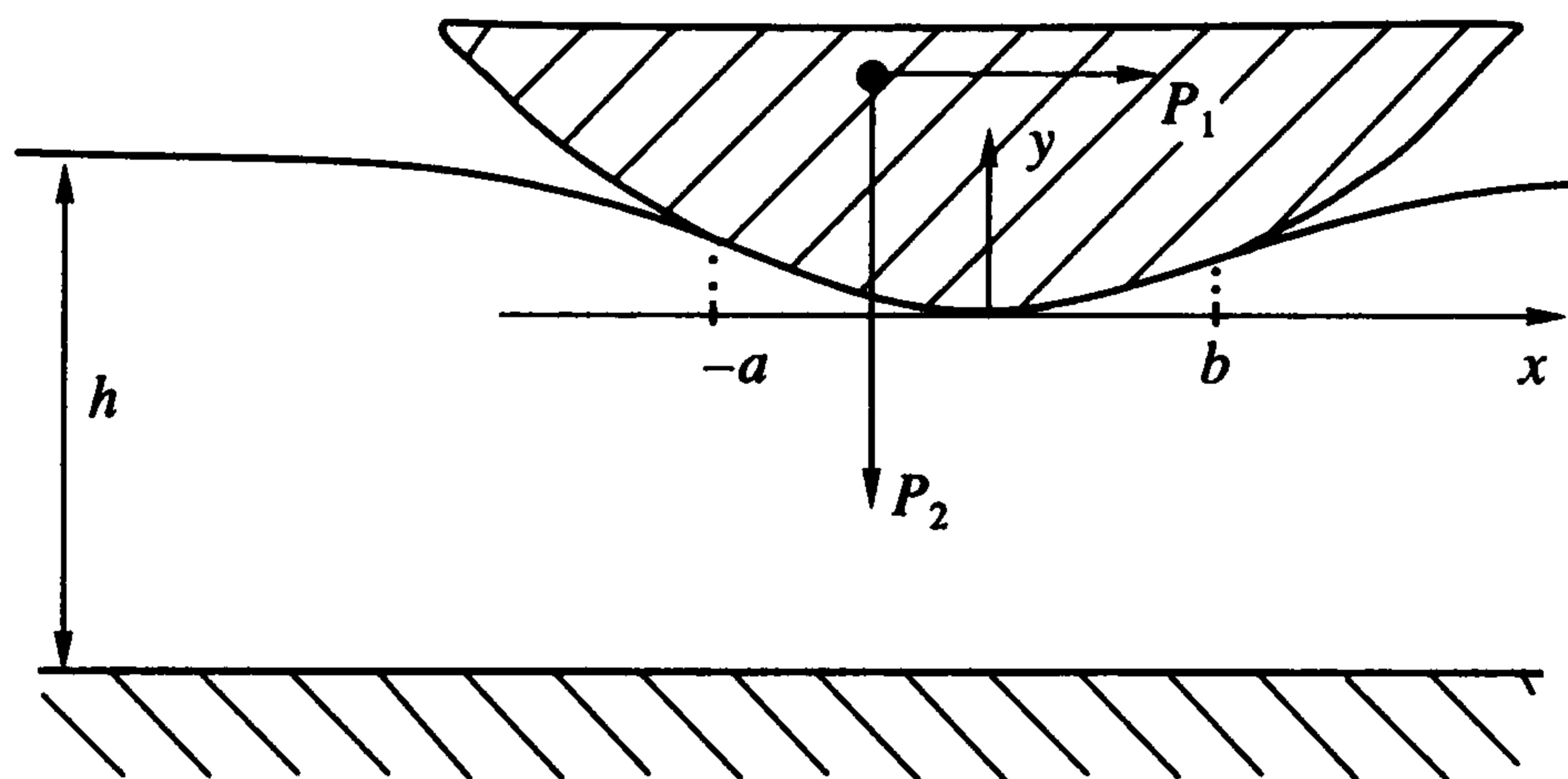
$$P_1 = N(P_2), \quad P_2 > 0 \quad (2.1)$$

Связав систему координат со штампом (фигура), будем считать, что при его вдавливании размеры $a(t) > 0, b(t) > 0$ области контакта монотонно возрастают со временем t . Это позволяет использовать величину a в качестве временного параметра, полагая, в частности, $b = b(a), P_j = P_j(a)$.

Граничные условия для рассматриваемого взаимодействия штампа с полосой имеют вид

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad v(x, a) = g(x); \quad x \in [-a, b] \quad (2.2)$$

где $\varphi(x)$ – некоторое распределение по области контакта касательного перемещения границы полосы, $g(x)$ – функция, описывающая форму штампа. Ставится задача: най-



ти распределения напряжений $q_1(x, a)$, $q_2(x, a)$ по возрастающей области $x \in [-a, b]$ контакта, а также неизвестные функции $\varphi(x)$ и $b(a)$.

Заменим граничные перемещения u , v в уравнениях (1.4) правыми частями условий (2.2). Затем, следуя известной процедуре [2], умножим первое уравнение на мнимую единицу i и сложим результат со вторым уравнением. В результате придем к одному комплекснозначному уравнению

$$-\pi\chi q(x, a) + i \int_{-a}^b \frac{q(\xi, a)}{\xi - x} d\xi = \tilde{f}(x, a), \quad x \in [-a, b] \quad (2.3)$$

где

$$q(x, a) = q_1(x, a) + iq_2(x, a), \quad \tilde{f}(x, a) = m[\tilde{g}'(x, a) + i\tilde{\varphi}'(x, a)]$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}(x, a) \\ \tilde{g}(x, a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ g(x) \end{Bmatrix} + \frac{\mu}{m} \begin{Bmatrix} P_2(a) \\ P_1(a) \end{Bmatrix}_x, \quad \mu = \chi \frac{c_{12}}{h} \quad (2.4)$$

Из выражений (1.5) при учете первого соотношения (2.4) также следует условие равновесия

$$P(a) \equiv P_1(a) + iP_2(a) = \int_{-a}^b q(x, a) dx \quad (2.5)$$

Далее считается, что функции $\varphi'(x)$ и $q'(x)$ удовлетворяют условию Гельдера на любом отрезке действительной оси. Тогда в силу определений (2.4) таким же свойством по переменной x будет обладать функция $\tilde{f}(x, a)$, и ограниченное решение уравнения (2.3) из класса Гельдера $H[-a, b]$ будет иметь вид [8] (\mathcal{K} – оператор)

$$q(x, a) = A^* \tilde{f}(x, a) - \frac{B^*}{\pi i} Z(x, a) \int_{-a}^b \frac{\tilde{f}(\xi, a)}{Z(\xi, a)(\xi - x)} d\xi \equiv \mathcal{K}(x, a; \tilde{f}), \quad x \in [-a, b] \quad (2.6)$$

при условии

$$\int_{-a}^b \frac{\tilde{f}(x, a)}{Z(x, a)} dx = 0 \quad (2.7)$$

Здесь

$$A^* = \chi[\pi(1-\chi^2)]^{-1}, \quad B^* = [\pi(1-\chi^2)]^{-1}$$

$$Z(x, a) = D\sqrt{(a+x)(b-x)}e^{-i\alpha(x, a)}, \quad D = \text{const}$$

$$\alpha(x, a) = \frac{\tau}{2} \ln \frac{a+x}{b-x}, \quad \tau = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\chi}{1-\chi}$$

Равенства (2.1), (2.5), (2.6), (2.7) составляют систему уравнений, позволяющих найти неизвестные функции $q_1(x, a)$, $q_2(x, a)$, $\varphi'(x)$ и $b(a)$ [4]. При формальной замене $\tilde{f}(x, a) \rightarrow f(x)$ эта система принимает вид, соответствующий взаимодействию штампа с полуплоскостью, что позволяет воспользоваться для ее упрощения предложенной ранее процедурой [4]. Для этого следует выразить $\tilde{f}(x, a)$ в условии (2.7) через $\varphi'(x)$ и $g'(x)$ с помощью соотношений (2.4), а выражение (2.6) для $q(x, a)$ подставить в правую часть условия равновесия (2.5), поменять порядок интегрирования [4] и, как прежде, выразить $\tilde{f}(x, a)$ через $\varphi'(x)$ и $g'(x)$. В результате получим уравнения:

$$\mathcal{K}_1(a; \varphi') = -\omega(a) - i\mu \frac{2}{m} \delta_0 \overline{P(a)} \quad (2.8)$$

$$P(a) = P_0(a) - \frac{2}{\pi} \delta_0 B^* m l (1+i\tau) \overline{\omega(a)} - \frac{2}{\pi} \delta_0 B^* m \mathcal{K}_2(a; \varphi') + i\mu \frac{4}{\pi} \delta_0^2 B^* l (1+i\tau) P(a) \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{K}_1(a; \varphi') = \int_{-a}^b \frac{e^{-i\alpha(x, a)}}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} \varphi'(x) dx, \quad \mathcal{K}_2(a; \varphi') = \int_{-a}^b \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} e^{i\alpha(x, a)} \varphi'(x) dx$$

$$P_0(a) = \int_{-a}^b \mathcal{K}(x, a; mg') dx, \quad \omega(a) = i\mathcal{K}_1(a; g') \quad (2.10)$$

$$\delta_0 = (\pi/2)/\text{ch}(\pi\tau/2), \quad l = l(a) = (a+b(a))/2$$

Отметим, что уравнения (2.8), (2.9) переходят в соответствующие уравнения для полуплоскости [4] при $h \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow 0$). Кроме того, им можно придать более удобный для дальнейшего исследования вид, если исключить неизвестную функцию $P(a)$ из их правых частей. Для этого вначале следует исключить $P(a)$ из правой части уравнения (2.9) с помощью уравнения (2.8), после чего с помощью полученного таким образом уравнения можно исключить $P(a)$ и из правой части уравнения (2.8). В результате, при учете равенства $B^* = \pi/(4\delta_0^2)$, получаются уравнения

$$\overline{\mathcal{K}_1(a; \varphi')} - i\mu \mathcal{K}_3(a; \varphi') = -\overline{\omega(a)} + i\mu \frac{2}{m} \delta_0 P_0(a), \quad P(a) = P_0(a) + \frac{m}{2\delta_0} \mathcal{K}_3(a; \varphi') \quad (2.11)$$

где

$$\mathcal{K}_3(a; \varphi') = \int_{-a}^b \frac{[l(1+i\tau) - (a+x)] e^{i\alpha(x, a)}}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} \varphi'(x) dx$$

Их следует дополнить законом нагружения (2.1), связывающим действительную $P_1(a)$ и минимум $P_2(a)$ части функции $P(a)$. В результате будет получена система уравнений относительно функций $\varphi'(x)$ и $b(a)$, которые определяют контактные на-

пряжения $q_1(x, a)$, $q_2(x, a)$ посредством равенства (2.6) при использовании соотношений (2.4).

Напомним, что проведенные выше выкладки для задачи о вдавлении со сцеплением штампа в толстую полосу основываясь на уравнениях (1.4) деформирования такой полосы, справедливость которых, в свою очередь, обеспечивается условием (1.3). В случае увеличивающейся области контакта, что имеет место при рассматриваемом взаимодействии, для выполнения этого условия следует ограничить размер l области контакта некоторой величиной l_* и считать

$$l_*/h = \eta \ll 1 \quad (2.12)$$

Условие (2.12) позволяет ввести в рассмотрение дополнительный малый параметр $\varepsilon = \chi c_{12} \eta$ и получить, с учетом определения (2.4) для μ , соотношение

$$\mu = \varepsilon/l_*, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (2.13)$$

свидетельствующее о том, что $\mu \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Далее в качестве примера, рассматривается симметричная постановка задачи о вдавлении со сцеплением штампа в толстую полосу

$$N(z) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty); \quad g'(x) = R^{-1}x, \quad R = \text{const} \quad (2.14)$$

Условия (2.14) означают, что касательная нагрузка P_1 , в силу закона нагружения (2.1), отсутствует, а штамп имеет параболическую форму. Относительно решения такой задачи сделаем следующие допущения:

$$b(a) = a, \quad \varphi'(x) \equiv \psi(x) - \text{четная функция} \quad (2.15)$$

Постановка выражения (2.14) для $g'(x)$ в уравнения (2.11) и учет допущений (2.15) приводят к уравнениям

$$\mathcal{L}(a; \psi) \equiv \mathcal{L}_1(a; \psi) + \mu[\tau a \mathcal{L}_1(a; \psi) - \mathcal{L}_2(a; \psi)] = -R^{-1} \tau \delta_0 a - \frac{1}{2} \mu R^{-1} (1 + \tau^2) \delta_0 a^2 \quad (2.16)$$

$$P(a) \equiv P_1(a) + iP_2(a) = i \frac{m}{2R} (1 + \tau^2) a^2 + i \frac{m}{\delta_0} [\tau a \mathcal{L}_1(a; \psi) - \mathcal{L}_2(a; \psi)] \quad (2.17)$$

где

$$\mathcal{L}_1(a; \psi) = \int_0^a \frac{\cos \alpha(x, a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \psi(x) dx, \quad \mathcal{L}_2(a; \psi) = \int_0^a \frac{x \sin \alpha(x, a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \psi(x) dx$$

Определяемые равенством (2.17) функции $P_1(a)$, $P_2(a)$ тождественно удовлетворяют закону нагружения (2.1) при $N(z) \equiv 0$, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только уравнение (2.16), представляющее собой интегральное уравнение типа Вольтерры относительно неизвестной функции $\psi(x)$.

Уравнение (2.16) содержит параметр μ , который в силу соотношения (2.13) можно считать малым (с точностью до размерного множителя l_*^{-1}). Укажем некоторые свойства этого уравнения, записав его в общем виде

$$\mathcal{E}(a; \psi(x)) + \mu \mathcal{F}(a; \psi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n f_n(a) \quad (2.18)$$

где введены произвольные линейные по $\psi(x)$ операторы.

Представим решение $\psi(x)$ уравнения (2.18) в виде ряда по степеням μ

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \psi_n(x) \quad (2.19)$$

в котором функции $\psi_n(x)$ определяются рекуррентными формулами

$$\mathcal{E}(a; \psi_0(x)) = f_0(a); \quad \mathcal{E}(a; \psi_n(x)) + \mathcal{F}(a; \psi_{n-1}(x)) = f_n(a), \quad n \geq 1 \quad (2.20)$$

получающимися, если подставить ряд (2.19) в левую часть уравнения (2.18) и приравнять в полученных суммах слагаемые со степенями μ^n слагаемому $\mu^n f_n(a)$ из правой части (2.18).

Пусть при некотором $k \geq 1$

$$f_n(a) = 0, \quad n > k; \quad \mathcal{F}(a; \psi_{k-1}(x)) = f_k(a) \quad (2.21)$$

Тогда из соотношений (2.20) следует, что $\psi_n(x) = 0$ для $n \geq k$. Другими словами, условия (2.21) приводят к обрыву ряда (2.19), делая возможным представление решения $\psi(x)$ в виде конечной суммы

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \mu^n \psi_n(x) \quad (2.22)$$

Функции $\psi_n(x)$ по-прежнему определяются формулами (2.20).

Воспользуемся указанными свойствами уравнения (2.18) для построения решения уравнения (2.16). Сопоставляя уравнения (2.16) и (2.18), выпишем операторы $\mathcal{E}(a; \psi(x))$, $\mathcal{F}(a; \psi(x))$ для уравнения (2.16) и с помощью формул (2.20) получим выражения

$$\psi_n(x) = \frac{1}{R} A_{n+1}^0 x^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \geq 0 \quad (2.23)$$

в которых коэффициенты A_n^0 определяются по рекуррентным формулам

$$A_n^0 = -\frac{1}{\delta_n} (\tau \delta_{n-1} - \gamma_n) A_{n-1}^0, \quad n \geq 3 \quad (2.24)$$

$$A_1^0 = -\tau \frac{\delta_0}{\delta_1}, \quad A_2^0 = -\frac{\delta_0}{2\delta_1 \delta_2} [(1 - \tau^2) \delta_1 + 2\tau \gamma_2]$$

причем

$$\begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \int_0^{\infty} \frac{\text{th}^n s}{\text{ch} s} \begin{Bmatrix} \sin \tau s \\ \cos \tau s \end{Bmatrix} ds \quad (2.25)$$

Замечание 1. Решение уравнения (2.16) может быть получено представлением его в виде степенного ряда по аналогии с развитым ранее подходом [9, 10]

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad x \geq 0 \quad (2.26)$$

Подстановка такого ряда в уравнение (2.16) позволяет получить рекуррентные формулы для A_n и установить эквивалентность выражений (2.19) и (2.26) как решений уравнения (2.16).

Замечание 2. Определяемые интегралами (2.25) величины удовлетворяют разностным уравнениям Пуанкаре – Перрона

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{n+2} \\ \delta_{n+2} \end{Bmatrix} = \frac{(n+1)^2 + n^2 - \tau^2}{(n+1)(n+2)} \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{Bmatrix} - \frac{(n-1)n}{(n+1)(n+2)} \begin{Bmatrix} \gamma_{n-2} \\ \delta_{n-2} \end{Bmatrix}$$

и являются коэффициентами разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения Гойна [11, 12]. Ранее величины γ_n и δ_n получались при решении задачи о вдавливании со сцеплением в упругую полуплоскость штампа полиномиальной формы [9, 10].

Корректное использование представления (2.19) для функции $\psi(x)$ требует исследования сходимости соответствующего ряда, что встречает трудности, обусловленные сложным характером определения (2.24) коэффициентов A_n^0 . Полученные выше условия (2.21) обрыва ряда (2.19) позволяют избежать подобных трудностей, но при этом требуется незначительное изменение формы штампа. А именно, положим вместо соотношения (2.14)

$$g'(x) = R^{-1}x + \mu^{k-1}R^{-1}r_kx^k, \quad 3 \leq k - \text{нечетное число} \quad (2.27)$$

где r_k – произвольный коэффициент, выбор которого связан с выполнением условий (2.21).

Форма штампа (2.27) с нечетным показателем k симметрична, что позволяет, воспользовавшись допущениями (2.15), как и прежде, прийти к уравнению для $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a; \psi) = & -R^{-1}\tau\delta_0a - \frac{1}{2}\mu R^{-1}(1 + \tau^2)\delta_0a^2 - \\ & - \mu^{k-1}R^{-1}r_k\gamma_k a^k - \mu^k R^{-1}r_k(\delta_{k+1} + \tau\gamma_k)a^{k+1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

которое отличается от уравнения (2.16) двумя дополнительными слагаемыми в правой части. Однако уравнение (2.28), так же как и (2.16), имеет вид (2.18), и поэтому для него справедливы результаты (2.19) – (2.22).

Правая часть уравнения (2.28) не содержит слагаемых со степенями параметра μ выше μ^k , так что первое условие (2.21) для него выполняется. Выполнения же второго условия (2.21) можно добиться соответствующим подбором коэффициента r_k . Для этого следует, пользуясь формулами (2.20), найти выражение для функции $\psi_{k-1}(x)$, содержащее r_k в качестве параметра, и подставить это выражение во второе равенство (2.21), тем самым получив линейное уравнение относительно r_k с решением

$$r_k = (k+1)\frac{\delta_k}{\delta_0}(\gamma_{k+1} - \tau\delta_k)A_k^0 \quad (2.29)$$

Выбор коэффициента r_k согласно формуле (2.29) обеспечивает справедливость представления в виде конечной суммы (2.22) решения $\psi(x)$ уравнения (2.28). Соответствующие этому представлению функции $\psi_n(x)$ определяются по формулам (2.20) и имеют вид

$$\psi_n(x) = \frac{1}{R} \begin{cases} A_{n+1}^0 x^{n+1}, & n = 0, 1, 2, \dots, k-2 \\ A_k^+ x^k, & n = k-1 \end{cases}, \quad x \geq 0 \quad (2.30)$$

$$A_k^+ = A_k^0 - \frac{\gamma_k}{\delta_k}r_k \equiv (k+1)\frac{\delta_k}{\delta_0}(\delta_{k+1} + \tau\gamma_k)A_0^k$$

Пользуясь соотношением (2.13), выражение (2.27) можно записать в виде

$$g'(x) = R^{-1}x[1 + \varepsilon^{k-1}r_k(x/l_*)^{k-1}] = R^{-1}x[1 + O(\varepsilon^{k-1})], \quad |\varepsilon| \ll 1$$

показывающим, что второе слагаемое в правой части равенства (2.27) можно сделать сколь угодно малым, выбирая число k достаточно большим. Таким образом

оказывается, что изменение исходной формы $g'(x) = R^{-1}x$ штампа на сколь угодно малое аддитивное слагаемое позволяет получить решение задачи о вдавливании со сцеплением штампа в толстую полосу в замкнутом виде (2.22), если только коэффициент r_k в равенстве (2.27) определять согласно выражению (2.29).

Замечание 3. Определяемые равенствами (2.23) или (2.30) функции $\psi_n(x)$ в представлениях (2.19) или (2.22) для $\psi(x)$ не зависят от параметра μ , поэтому при $\mu \rightarrow 0$ имеем

$$\psi(x) \rightarrow \psi_0(x) = R^{-1}A_1^0x \equiv -R^{-1}\tau\delta_0\delta_1^{-1}x, \quad x \geq 0$$

т.е. решение для полуплоскости [9, 10].

Замечание 4. Несмотря на то, что постановка и основные уравнения рассмотренной контактной задачи для толстой полосы не содержат принципиальных отличий от аналогичной задачи для полуплоскости, фактор конечности ширины полосы ($\mu \neq 0$) приводит к необходимости поиска решения в виде ряда, тогда как в случае полуплоскости удается ограничиться конечными суммами [9, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00034) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 99-0671).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 934–943.
2. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Солдатенков И.А. Постановка и решение задачи о вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН, МГТ, 2000. № 4. С. 39–52.
5. Развитие теории контактных задач в СССР // Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
7. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
8. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
9. Моссаковский В.И., Фотиева Н.Н. Вдавливание симметричного штампа в упругую полуплоскость при наличии сцепления на линии контакта // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 6. С. 67–70.
10. Солдатенков И.А. О вдавливании со сцеплением симметричного штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 267–273.
11. Лай В. Двухточечная задача связи для дифференциальных уравнений класса Гойна // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 101. № 3. С. 360–368.
12. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 303 с.