

УДК 539.3:534.1.11

© 2003 г. П. М. Белоцерковский

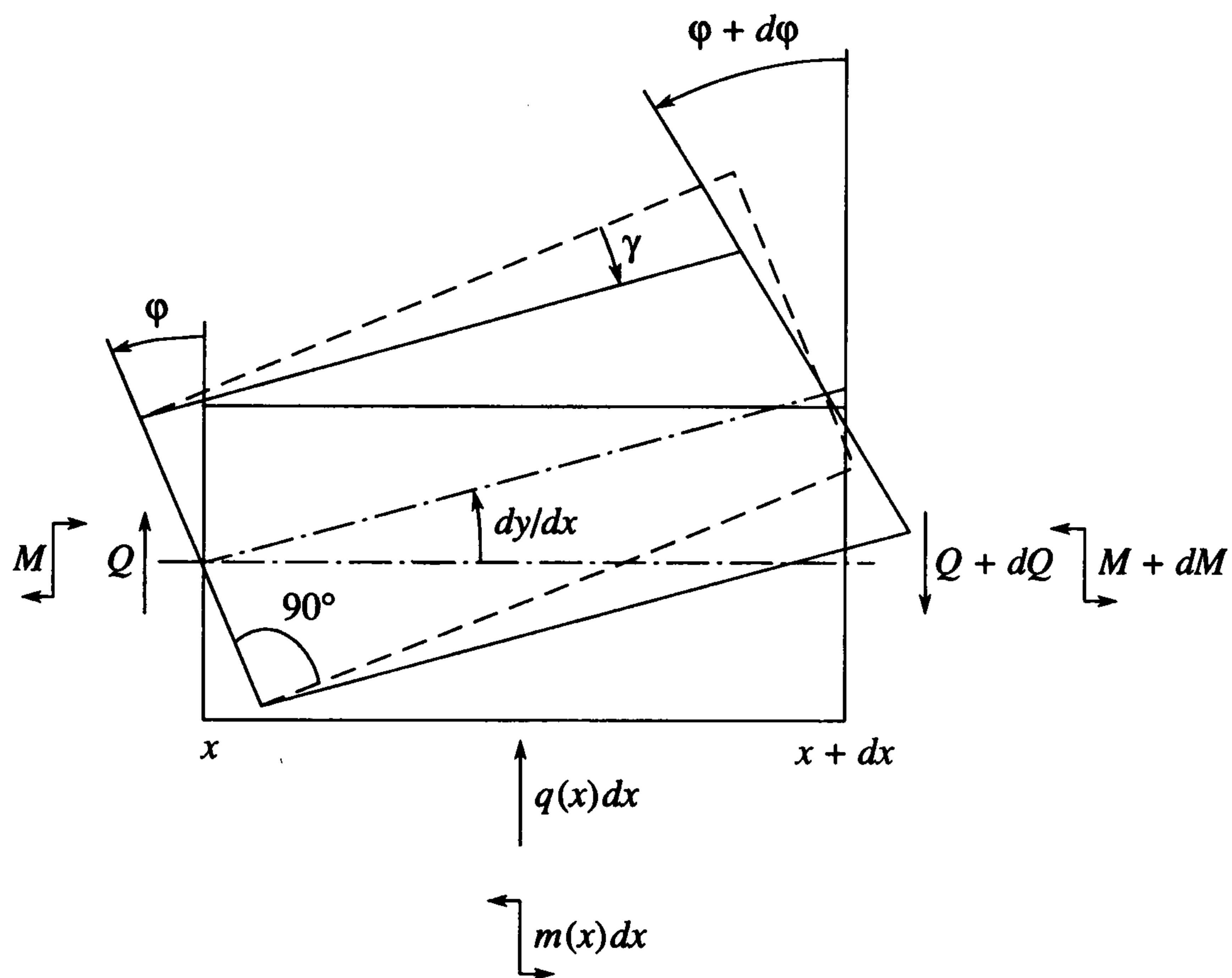
УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ И СОПРОТИВЛЕНИЕ РЕЛЬСОВОГО ПУТИ РАВНОМЕРНОМУ ДВИЖЕНИЮ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО КОЛЕСА

Рассматривается модель рельса в виде бесконечной балки Тимошенко, которая поддерживается с постоянным шагом массивными упруго-вязкими опорами. Исследуются установившиеся вертикальные колебания рельса, возбуждаемые гармонической силой, движущейся по рельсу с постоянной скоростью. В подвижной системе координат вертикальное отклонение рельса представляется в виде обобщенного ряда Фурье. Рассматриваются установившиеся вертикальные колебания массивного твердого колеса, катящегося по рельсу с постоянной скоростью и нагруженного вертикальной гармонической силой. Сила взаимодействия колеса и рельса представляется в виде обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого определяются при помощи равенства, связывающего вертикальные отклонения колеса и рельса. Рассматриваются колебания колеса, возникающие под действием центробежной силы и благодаря периодическому изменению параметров пути. Исследуются параметрические колебания колеса, движущегося с постоянной скоростью под статической нагрузкой, вызванные периодическим изменением жесткости рельсового пути. Вычислена сила сопротивления рельсового пути равномерному движению неуравновешенного колеса.

1. Балка Тимошенко. В теории Тимошенко [1, 2] принимается в расчет как деформация изгиба, так и деформация сдвига балки, упругая линия которой испытывает разрывы в первой и третьей производных в точках приложения сосредоточенных поперечных сил. Эта теория была приведена к системе двух уравнений с частными производными и приложена к задаче о свободных колебаниях однопролетной балки [1], сосредоточенные поперечные силы и разрывы в производных отсутствовали. Был вычислен [2] статический прогиб балки, нагруженной сосредоточенными поперечными силами; причем задача была приведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, что упростило учет разрывов.

Приведем это уравнение к более общему виду путем дополнения членами, позволяющими учитывать как поперечную нагрузку, так и момент, сосредоточенные или распределенные вдоль балки. Элемент балки, нагруженной распределенными моментом $m = m(x)$ и поперечной силой $q = q(x)$, ограничен поперечными сечениями x и $x + dx$ и показан на фиг. 1. Там же показаны положительные направления изгибающего момента M , перерезывающей силы Q в поперечном сечении балки, а также углов поворота φ и dy/dx поперечного сечения балки и ее упругой линии $y = y(x)$.

Под действием перерезывающей силы Q прямоугольный элемент балки переходит в параллелограмм, а смежные стороны поворачиваются относительно друг друга (фиг. 1) на угол $\gamma = Q/R$. Величина $R = k'GA$ называется жесткостью сдвига, G – модуль сдвига, A – площадь поперечного сечения балки, коэффициент k' учитывает не-



Фиг. 1

равномерность распределения перерезывающей силы по поперечному сечению. Величины φ , γ и dy/dx связаны равенством

$$dy/dx = \varphi - \gamma = \varphi - Q/R \quad (1.1)$$

В точке приложения к балке сосредоточенной поперечной силы производная dy/dx не определена, а перерезывающая сила Q испытывает скачок. Согласно последнему равенству, угол поворота dy/dx упругой линии балки также испытывает скачок в этой точке. Эти скачки связаны равенством

$$[Q] = -R[dy/dx] \quad (1.2)$$

(квадратными скобками обозначен скачок величины, заключенной в скобки, т.е. разность между ее правым и левым пределами). Из условий равновесия $qdx - dQ = 0$ и $m dx + dM - Q dx = 0$ элемента балки следует, что

$$q = dQ/dx, \quad Q = dM/dx + m, \quad d^2M/dx^2 = dQ/dx - dm/dx = q(x) - dm/dx$$

Изгиб балки определяется равенством

$$M = EJd\varphi/dx \quad (1.3)$$

EJ – изгибная жесткость балки, E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения балки. Дважды дифференцируя равенство (1.1) с учетом условий равновесия элемента балки и равенства (1.3), получим

$$d^3y/dx^3 = (EJ)^{-1}dM/dx - R^{-1}dq/dx = (EJ)^{-1}(Q - m) - R^{-1}dq/dx$$

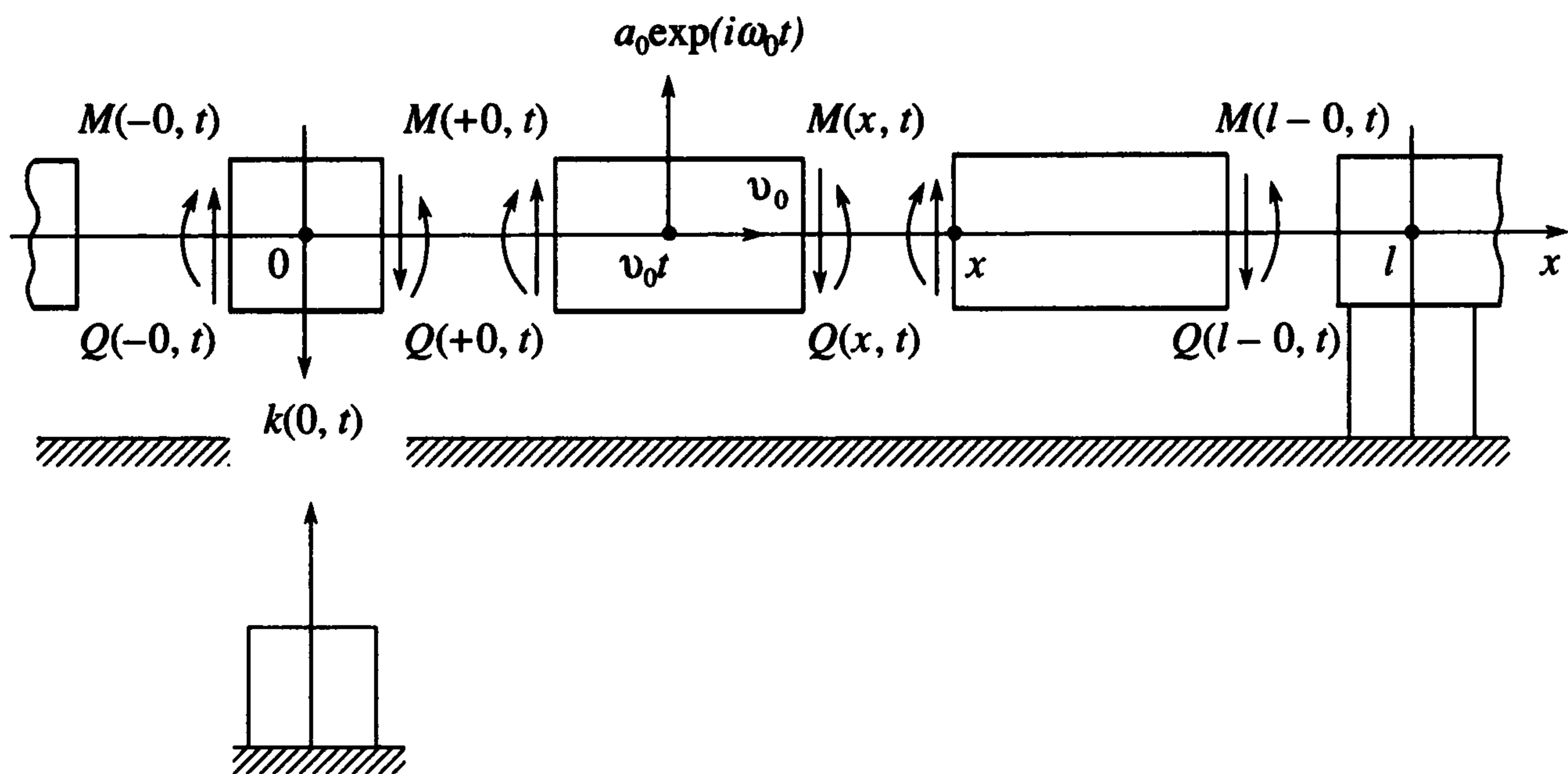
откуда следует, что в точке приложения к балке сосредоточенной поперечной силы

$$[Q] = EJ[d^3y/dx^3] \quad (1.4)$$

После третьего дифференцирования получим уравнение

$$d^4y/dx^4 - (EJ)^{-1}(q - dm/dx) + R^{-1}d^2q/dx^2 = 0 \quad (1.5)$$

определяющее поперечное отклонение балки.



Фиг. 2

2. Установившиеся колебания рельсового пути. Представим рельс в виде балки Тимошенко, имеющей линейную плотность ρ_0 . Обозначим t и $y(x, t)$ время и поперечное отклонение балки. Заменяем величину $q = q(x)$ в уравнении (1.5) выражением $q(x, t) - \rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$, в котором первое слагаемое представляет собой внешнюю поперечную нагрузку, а второе – силу инерции поперечного движения балки. Пусть $m = m(x)$ представляет момент $-(\rho_0 J/A) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ сил инерции поворота поперечного сечения балки. В итоге получим уравнение вертикальных колебаний рельса

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \rho_0 \left(\frac{J}{A} + \frac{EJ}{R} \right) \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_0^2 J \partial^4 y(x, t)}{RA \partial t^4} = \\
 = q(x, t) + \frac{\rho_0 J \partial^2 q(x, t)}{RA \partial t^2} - \frac{EJ \partial^2 q(x, t)}{R \partial x^2}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим, что уравнение (2.1) было получено ранее [3] путем введения двух неизвестных величин y , φ и последующего исключения φ . Применение уравнения (1.5), а также равенств (1.2) и (1.4) приводит к уравнению (2.1) непосредственно и дает возможность поставить краевую задачу для этого уравнения.

Пусть рельс поддерживается шпалами с шагом l и возбуждается вертикальной сосредоточенной гармонической силой $a_0 \exp(i\omega_0 t)$, движущейся по рельсу без отрыва с постоянной скоростью v_0 . Если $x = 0$ соответствует одной из шпал, а $t = 0$ соответствует времени прохода силы над этой шпалой (фиг. 2), то поперечная нагрузка на рельс представляется в виде

$$q(x, t) = a_0 \exp(i\omega_0 t) \delta(x - v_0 t)$$

Функция Дирака $\delta(x - v_0 t)$ задает сосредоточенную возмущающую силу в точке $x_0 = v_0 t$. Величина $\Phi_0 = \omega_0 l / v_0$ равна приращению фазы гармонической силы за время l/v_0 перемещения силы на расстояние l . За это время гармоническая сила приобретает множитель $\exp(i\Phi_0)$. Установившееся вертикальное отклонение рельса $y(x, t)$ приобретает такой же множитель [4, 5]. Поэтому

$$y(x + l, t + l/v_0) = \exp(i\Phi_0) y(x, t) \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) определяет ограниченное при $t \rightarrow \pm\infty$ решение уравнения вертикальных колебаний рельса (2.1). Если $\omega_0 = 2\pi p_1 v_0 / l$, где p_1 – целое число, то частота

возмущающей силы кратна частоте прохождения шпал v_0/l . В этом случае $\exp(i\Phi_0) = 1$, а условие (2.2) переходит в условие периодических колебаний [6]

$$y(x + l, t + l/v_0) = y(x, t)$$

К этому же условию приводятся установившиеся колебания рельса, вызванные равномерным движением постоянной поперечной силы [7].

Пусть частоты возмущающей силы и прохождения шпал соизмеримы, а их отношение равно рациональному числу p_1/p_2 , где p_1 и p_2 – взаимно простые целые числа. Повторно используя равенство (2.2), получим условие

$$y(x + p_2l, t + p_2l/v_0) = y(x, t) \quad (2.3)$$

которое обобщает условие периодических колебаний и показывает, что величина $y(x, t)$ переходит в себя при одновременном сдвиге на p_2l по x и на p_2l/v_0 по t . Если частоты возмущающей силы и прохождения шпал несоизмеримы, то отклонение рельса не является периодическим ни в неподвижной системе координат, ни в системе координат, связанной с движущейся гармонической силой.

Будем полагать, что реакция опоры в точке $x = 0$ приводится к вертикальной силе $k(0, t)$, положительное направление которой показано на фиг. 2. При высокой частоте возмущающей силы и высокой скорости движения следует учитывать изгиб шпал, а также распространение волн в балласте и грунте [5, 8]. С этой же целью применяется двухмассовая модель опоры рельса [9]. При умеренных значениях этих величин шпала может быть представлена одной массой, поддерживаемой параллельными пружиной и демпфером. Тогда

$$k(0, t) = \rho_1 l \partial^2 y(0, t) / \partial t^2 + r l \partial y(0, t) / \partial t + u l y(0, t) \quad (2.4)$$

Величина $\rho_1 l$, $r l$ и $u l$ представляют собой массу опоры, вязкость демпфера и жесткость пружины, они выражены через параметры соответствующего однородного упруго-вязкого основания.

Перерезывающая сила испытывает в точке $x = 0$ скачок, равный $-k(0, t)$. Согласно равенствам (1.2) и (1.4), функции $EJ \partial^3 y(x, t) / \partial x^3$ и $-R \partial y(x, t) / \partial x$ испытывают в точке $x = 0$ такой же скачок. Значения этих функций слева от опор в точках $x = 0$ и $x = l$ удовлетворяют условию (2.2). Переходя в точке $x = 0$ к значениям этих же функций справа от опоры, получим четыре граничных условия

$$\partial^n y(l, t + l/v_0) / \partial x^n = \exp(i\Phi_0) (\partial^n y(0, t) / \partial x^n + \kappa_n k(0, t))$$

$$n = 0, 1, 2, 3; \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_1 = -R^{-1}, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = (EJ)^{-1}$$

Будем полагать, что каждая точка балки находилась в покое задолго до приближения к ней возмущающей силы и под действием вязкого сопротивления в опорах возвращается в это же состояние после удаления силы. Таким образом, $y(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ вместе со своими производными и допускает преобразование Фурье по t .

Подставим $q(x, t)$ в уравнение (2.1) и перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$X = x/l, \quad T = v_0 t/l, \quad Y(X, T) = y(x, t)/l, \quad K(0, T) = k(0, t)l^2/(EJ)$$

Отметим, что безразмерная координата $X_0 = x_0/l = v_0 t/l$ точки приложения возмущающей силы совпадает с безразмерным временем T . Введем безразмерную амплитуду возмущающей силы $A_0 = a_0 l^2/(EJ)$ и учтем, что

$$\delta(l(X - T)) = \delta(X - T)/l, \quad \delta(T - X) = \delta(X - T)$$

Введем прямое и обратное интегральные преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(X, T) \exp(-i\Phi T) dT = Y^*(X), \quad Y(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(X) \exp(i\Phi T) d\Phi \quad (2.5)$$

где Φ – безразмерный параметр. Далее обозначим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(0, T) \exp(-i\Phi T) dT = K(\Phi) Y^*(0), \quad K(\Phi) = K_0 + iK_1\Phi - K_2\Phi^2$$

$$K_0 = ul^4/(EJ), \quad K_1 = rv_0l^3/(EJ), \quad K_2 = \rho_1 v_0^2 l^2/(EJ)$$

Вид правой части первого равенства следует из линейности рассматриваемой задачи. Выполняя преобразование Фурье в уравнении вертикальных колебаний рельса и четырех граничных условиях, получим

$$d^4 Y^*(X)/dX^4 + (B + \Gamma) d^2 Y^*(X)/dX^2 + (B\Gamma - A) Y^*(X) =$$

$$= A_0 (1 + \psi((\Phi_0 - \Phi)^2 - B)) \exp(i(\Phi_0 - \Phi)X) \quad (2.6)$$

$$A = \rho_0 v_0^2 l^2 \Phi^2/(EJ), \quad B = \rho_0 v_0^2 \Phi^2/(EA), \quad \Gamma = \rho_0 v_0^2 \Phi^2/R$$

$$d^n Y^*(1)/dX^n = \exp((i(\Phi_0 - \Phi)) d^n Y^*(0)/dX^n + K_n K(\Phi) Y^*(0)) \quad (2.7)$$

$$n = 0, 1, 2, 3; \quad K_0 = 0, \quad K_1 = -\psi, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 1, \quad \psi = \Gamma/A$$

Решая на отрезке $0 \leq X \leq 1$ обыкновенное дифференциальное уравнение (2.6) с граничными условиями (2.7), получим

$$Y^*(X) = A_0 (\exp(i(\Phi_0 - \Phi)X) - J(\Phi) N(X, \Phi)) P_0(\Phi)$$

$$N(X, \Phi) = (1 - \psi \sigma_2^2) \frac{\text{sh}(\sigma_1(1 - X)) + \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \text{sh}(\sigma_1 X)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1(\cos(\Phi_0 - \Phi) - \text{ch} \sigma_1)) -}$$

$$- (1 + \psi \sigma_1^2) \frac{\sin(\sigma_2(1 - X)) + \exp(i(\Phi_0 - \Phi)) \sin(\sigma_2 X)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_2(\cos(\Phi_0 - \Phi) - \cos \sigma_2))} \quad (2.8)$$

$$2\sigma_{2,1}^2 = ((B - \Gamma)^2 + 4A)^{1/2} \pm (B + \Gamma)$$

$$J(\Phi) = K(\Phi) D(\Phi) / (K(\Phi) + D(\Phi)), \quad D(\Phi) = 1/N(0, \Phi)$$

$$P_n(\Phi) = \frac{1 + \psi((\Phi - \Phi_n)^2 - B)}{(\Phi - \Phi_n)^4 - (B + \Gamma)(\Phi - \Phi_n)^2 + B\Gamma - A}, \quad \Phi_n = \Phi_0 + 2\pi n$$

Используя разложение в ряд Фурье

$$\exp(i(\Phi - \Phi_0)X) N(X, \Phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\Phi) \exp(i2\pi mX) \quad (2.9)$$

$$Q_m(\Phi) = \frac{1 + \psi((\Phi - \Phi_m)^2 - B - \Gamma)}{(\Phi - \Phi_m)^4 - (B + \Gamma)(\Phi - \Phi_m)^2 + B\Gamma - A}$$

и выполняя обратное преобразование, получим безразмерную величину

$$Y(X, T) = \frac{A_0}{2\pi} \exp(i\Phi_0 X) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - J(\Phi) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(\Phi) \exp(i2\pi n X) \right) \times \\ \times P_0(\Phi) \exp(i\Phi(T - X)) d\Phi \quad (2.10)$$

Исследование полюсов подынтегральной функции (2.10) выполняется так же, как в работах [4, 6]. Это исследование показывает, что подынтегральная функция не имеет действительных полюсов. Интеграл (2.10) существует и не изменяется, если величины T и X одновременно возрастают на единицу. При этом функция $\exp(i\Phi_0 X)$ и вместе с ней $Y(X, T)$ приобретают множитель $\exp(i\Phi_0)$. Таким образом, величина $Y(X, T)$ удовлетворяет условию (2.2) и, следовательно, при любых T и X является решением поставленной задачи. В точке приложения гармонической силы величина $T - X$ равна нулю. В подвижной системе координат эта величина постоянна, а формула (2.10) представляет вертикальное отклонение рельса в виде обобщенного ряда Фурье.

3. Установившиеся колебания колеса и рельса. Пусть колесо, имеющее массу m_0 , движется по рельсу без отрыва с постоянной скоростью v_0 . Будем исследовать установившиеся вертикальные колебания колеса и рельса под действием вертикальной гармонической силы $a_0 \exp(i\omega_0 t)$. Вертикальное отклонение рельса удовлетворяет условию (2.2). Вертикальное отклонение колеса $y_0(t)$ и сила взаимодействия колеса и рельса $f(t)$ удовлетворяют условиям

$$y_0(t + l/v_0) = \exp(i\Phi_0) y_0(t), \quad f(t + l/v_0) = \exp(i\Phi_0) f(t)$$

согласно которым каждая из этих величин получается умножением $\exp(i\omega_0 t)$ на периодическую функцию с частотой, равной частоте прохождения шпал v_0/l . Таким образом, сила $f(t)$ взаимодействия колеса и рельса может быть представлена в виде обобщенного ряда Фурье

$$f(t) = a_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \exp\left(i\left(\frac{2\pi m v_0}{l} + \omega_0\right)t\right)$$

Здесь и далее m обозначает целочисленное переменное. Безразмерные коэффициенты ряда F_m подлежат определению. Направления сил, приложенных к колесу и рельсу, показаны на фиг. 3. Вертикальное отклонение колеса ограничено и определяется уравнением

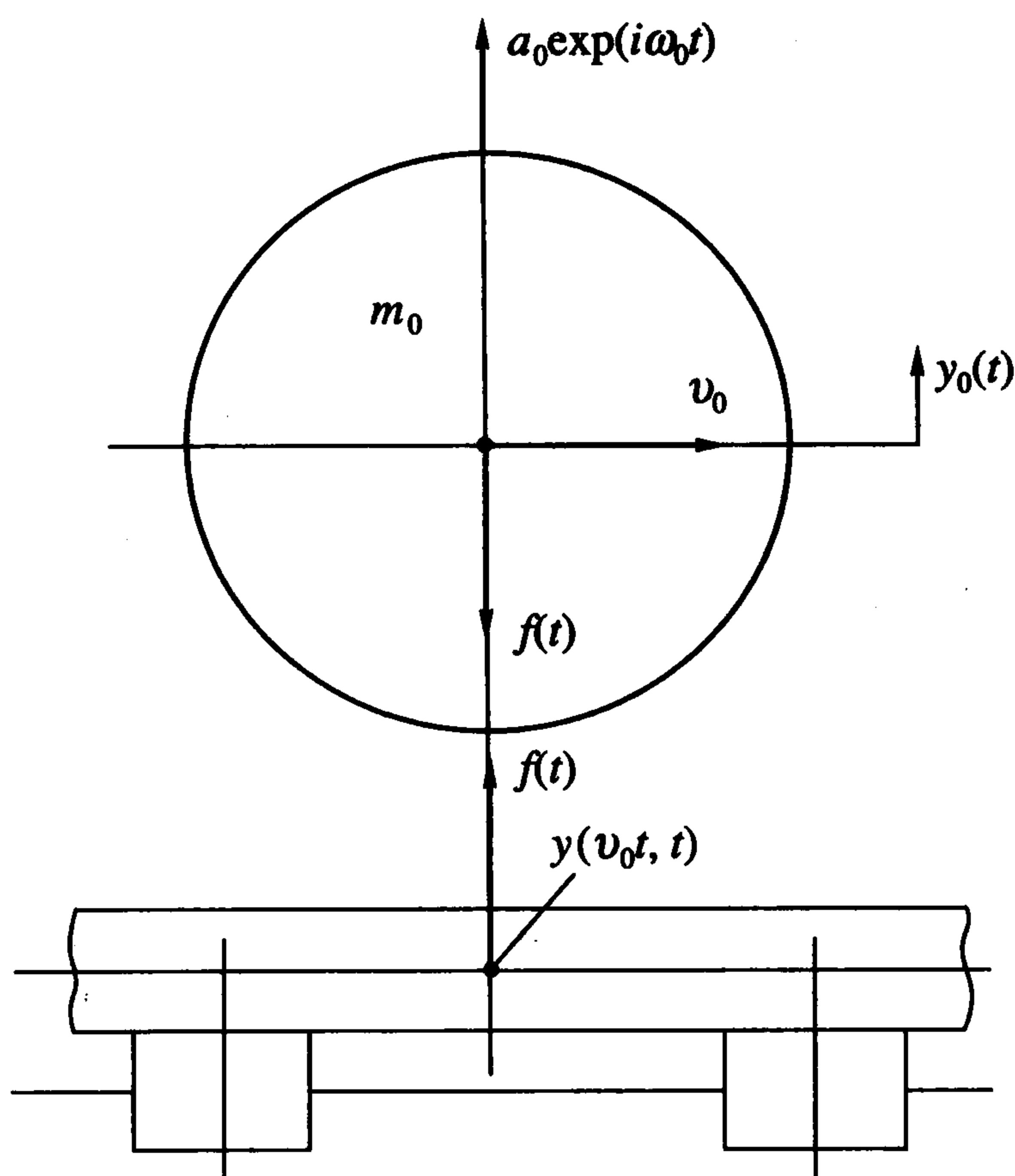
$$m_0 \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = a_0(1 - F_0) \exp(i\omega_0 t) - a_0 \sum_{m \neq 0} F_m \exp\left(i\left(\frac{2\pi m v_0}{l} + \omega_0\right)t\right)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение и переходя к безразмерным вертикальному отклонению колеса $Y_0(T) = y_0(t)/l$, массе $M_0 = m_0 v_0^2 l/(EJ)$ и силе $F(T) = f(t)l^2/(EJ)$, получим

$$F(T) = A_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \exp(i\Phi_m T) \quad (3.1)$$

$$Y_0(T) = \frac{A_0}{M_0} \left(\frac{F_0 - 1}{\Phi_0^2} + \sum_{m \neq 0} \frac{F_m \exp(i\Phi_m T)}{\Phi_m^2} \right) \quad (3.2)$$

Установившиеся вертикальные колебания колеса (3.2) ограничены.



Фиг. 3

Обозначим $Y_n(X, T)$ безразмерное отклонение рельса под действием безразмерной движущейся силы $\exp(i\Phi_n T)$. Заменяем Φ_0 на Φ_n , $P_0(\Phi)$ на $P_n(\Phi)$ и $Y(X, T)$ на $Y_n(X, T)$ в равенствах (2.8) и (2.10). Далее, подставляя $X = 0$ в равенство (2.8) и выполняя обратное преобразование, получим безразмерное вертикальное отклонение шпалы

$$Y_n(0, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J^+(\Phi) P_n(\Phi) \exp(i\Phi T) d\Phi \quad (3.3)$$

$$J^+(\Phi) = D(\Phi) / (K(\Phi) + D(\Phi))$$

Используя разложение (2.10), получим

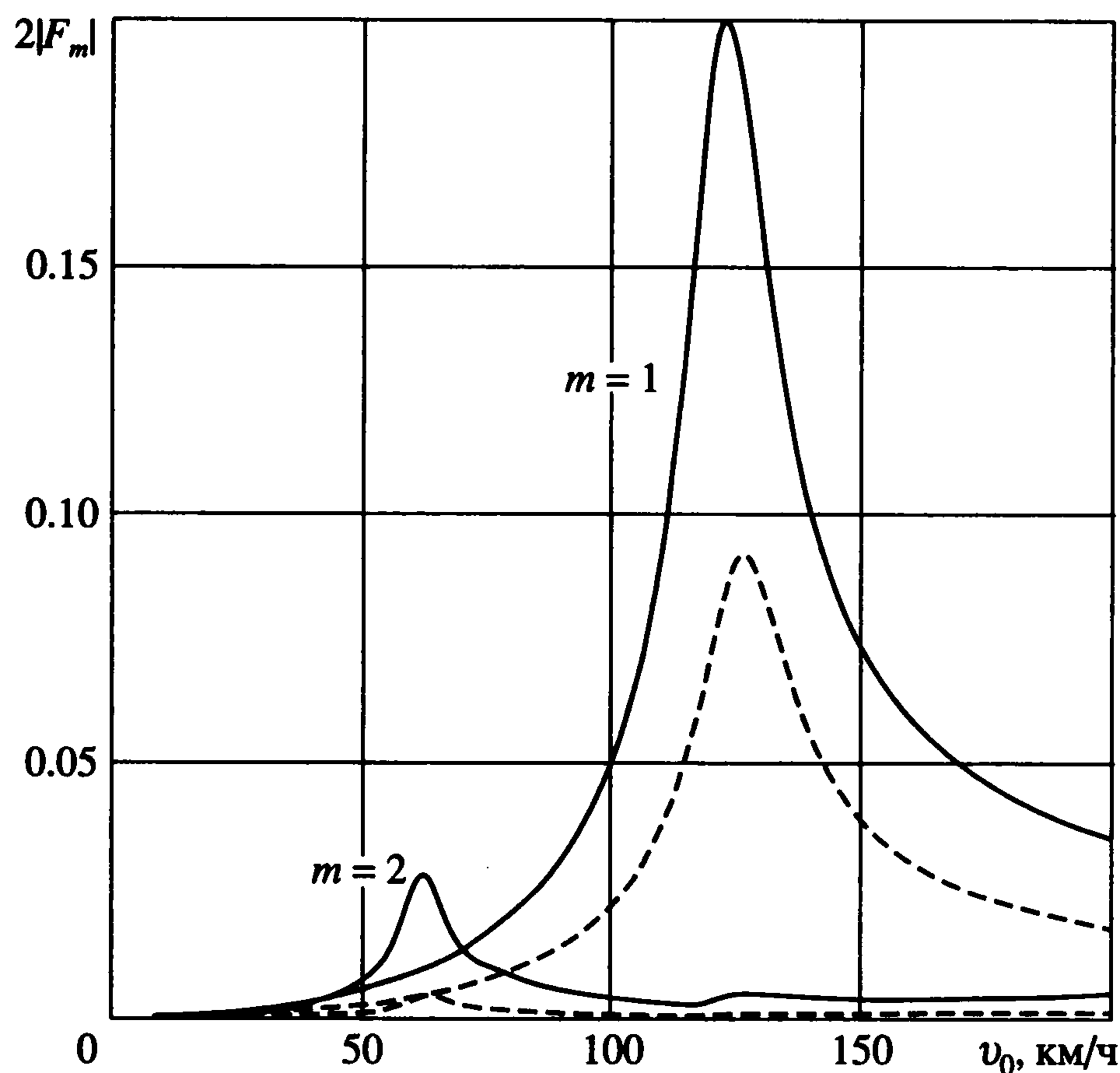
$$Y_n(X, T) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W(m, n, T-X) \exp(i\Phi_m X)$$

$$W(m, n, T-X) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\Phi) Q_m(\Phi) P_n(\Phi) \exp(i\Phi(T-X)) d\Phi, \quad m \neq n$$

$$W(n, n, T-X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - J(\Phi) Q_n(\Phi)) P_n(\Phi) \exp(i\Phi(T-X)) d\Phi$$

Обозначим $Y(X, T)$ безразмерное вертикальное отклонение рельса под действием безразмерной движущейся силы $F(T)$. Тогда

$$Y(X, T) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n Y_n(X, T) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W(m, n, T-X) \exp(i\Phi_m X) \quad (3.4)$$



Фиг. 4

При $X = T$ последняя величина определяет безразмерное вертикальное отклонение рельса в точке контакта с колесом и равна $Y_0(T)$. Приравнивая друг к другу коэффициенты при $\exp(i\Phi_m X)$ в разложениях величин $Y_0(T)$ и $Y(T, T)$, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$M_0 \Phi_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n W(0, n, 0) - F_0 = 1, \quad M_0 \Phi_m^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n W(m, n, 0) - F_m = 0, \quad m \neq 0. \quad (3.5)$$

для определения бесконечного числа неизвестных F_m .

Поддрессоренная часть экипажа отделена от колеса упругой рессорой. Поэтому ее воздействие на колесо в первом приближении представляется статической нагрузкой. Рассмотрим колебания колеса под действием статической нагрузки. В этом случае, $\omega_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$, $\Phi_m = 2\pi m$, а вертикальные отклонения колеса и рельса – действительные величины. Согласно первому уравнению (3.5), коэффициент $F_0 = 1$. Коэффициент F_m и F_{-m} – комплексно-сопряженные величины. Действительная величина $F_m \exp(i2\pi m T) + F_{-m} \exp(-i2\pi m T)$ определяет гармоническую составляющую силы взаимодействия колеса и рельса с номером m .

Результаты вычислений безразмерной амплитуды этой гармоники, равной $2|F_m|$, в зависимости от скорости движения v_0 для массы колеса $m_0 = 700$ кг, $m = 1, 2$ и параметров пути

$$EJ = 3.57 \times 10^6 \text{ Нм}^2, \quad A = 0.006 \text{ м}^2, \quad k' = 0,34, \quad \rho_0 = 48 \text{ кг/м}, \quad l = 0,8 \text{ м}$$

$$u = 40 \times 10^6 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 43.6 \text{ кг/м}, \quad r = 26 \times 10^3 \text{ Нс/м}^2$$

изображены на фиг. 4 сплошными линиями. Амплитуда первой гармоники достигает наибольшего значения, составляющего 20% от статической нагрузки, при критической скорости движения 123,8 км/ч. При этой скорости частота параметрического возмущения колеса, вызванного периодическим изменением жесткости рельсового пути [6], равна частоте прохождения шпал 43 Гц и совпадает с частотой свободных колебаний

колеса, установленного на рельс. Таким образом, имеет место параметрический резонанс. Наибольшее значение амплитуды второй гармоники соответствует скорости 61,9 км/ч (половине упомянутой выше критической скорости) и той же частоте 43 Гц.

Эти же амплитуды, вычисленные без учета деформации сдвига в рельсе, показаны на фиг. 4 штриховыми линиями. Отсутствие деформации сдвига приводит к увеличению жесткости пути на 5% и к соответствующему увеличению частоты свободных колебаний колеса. Поэтому вершины штриховых линий смещены в сторону большей скорости. Значительное уменьшение амплитуд свидетельствует о том, что параметрическое возмущение колеса связано с этой деформацией. Следует отметить, что в ранних исследованиях [10–13] параметрических колебаний рельса и колес рельсовых экипажей деформация сдвига в рельсе не принималась в расчет. Поэтому колебания оказывались незначительными.

4. Сопротивление рельсового пути равномерному движению колеса. Сопротивление однородного рельсового пути равномерному движению колеса при постоянной нагрузке исследовалось ранее [14, 15] без учета деформации сдвига в рельсе. Движение колеса вызывает прогиб рельса, стационарный в подвижной системе координат. Сопротивление подрельсового основания приводит к запаздыванию деформации рельса. Поэтому низшая точка упругой линии рельса располагается позади движущегося колеса, которое удерживается на подъеме продольной силой, преодолевающей сопротивление пути и обеспечивающей равномерное движение колеса. Таким образом, сопротивление пути подобно волновому сопротивлению воды движению корабля.

Деформация сдвига в рельсе приводит к излому упругой линии рельса в точке контакта с колесом, что делает невозможным описанный выше подход. Далее развивается другой подход к вычислению силы сопротивления рельсового пути равномерному движению колеса, нагруженного вертикальной периодической силой. Колебания опор сопровождаются поглощением энергии, которая определяется в виде квадратичного функционала и вычисляется при помощи равенства Парсевала. Энергия восполняется продольной силой, поддерживающей равномерное движение колеса и равной силе сопротивления рельсового пути этому движению.

Вначале будем предполагать, что вертикальное отклонение рельса имеет период p_2l , определяемый равенством (2.3). Средняя мощность, развиваемая вертикальной силой на этом периоде, равна нулю. Движение нагруженного колеса сопровождается поглощением энергии подрельсовым основанием и истиранием балласта. Продольная сила, поддерживающая равномерное движение колеса, является единственным источником энергии. Приравняв мощность, развиваемую продольной силой, к мощности, поглощаемой подрельсовым основанием, определим продольную силу и, следовательно, сопротивление пути движению колеса. Согласно равенству (2.3) давление рельса на шпалу в точке $x_j = jl$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) равно $k(j, t) = k(0, t - jl/v_0)$, а $y(x_j, t) = y(0, t - jl/v_0)$.

Мгновенная мощность, развиваемая силой $k(j, t)$, вычисляется путем умножения этой силы на вертикальную скорость рельса $\partial y(x_j, t)/\partial t$. Суммируя мощность по всем шпалам, определим мгновенную мощность

$$N(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} k(j, t) \frac{\partial y(x_j, t)}{\partial t} dt$$

затрачиваемую равномерно движущимся колесом на деформацию пути. Усредняя мгновенную мощность $N(t)$ на отрезке времени $0 \leq t \leq p_2l/v_0$, соответствующем прохождению колесом расстояния p_2l , получим

$$\langle N \rangle = \frac{v_0}{p_2l} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^{p_2l/v_0} k(j, t) \frac{\partial y(x_j, t)}{\partial t} dt$$

Заменяя в каждом слагаемом этой суммы величину $t - jp_2/v_0$ на t и изменяя пределы интегрирования, получим

$$\langle N \rangle = \frac{v_0}{p_2 l} \left(\dots + \int_{-l/v_0}^{(p_2-1)l/v_0} + \int_0^{p_2 l/v_0} + \int_{l/v_0}^{(p_2+1)l/v_0} + \dots \right) k(0, t) \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} dt$$

Правая часть полученного выражения является бесконечной в положительном и в отрицательном направлениях суммой интегралов, имеющих отрезки интегрирования одинаковой длины $p_2 l$. Пределы интегрирования каждого следующего слагаемого получаются увеличением на l/v_0 пределов интегрирования исходного слагаемого. Таким образом, результат интегрирования равен произведению величины p_2 и интеграла с двумя бесконечными пределами. После сокращения на p_2 получим равенство

$$\langle N \rangle = \frac{v_0}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} k(0, t) \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} dt \quad (4.1)$$

которое показывает, что средняя мощность, поглощаемая всеми шпалами за время l/v_0 прохождения колесом расстояния между шпалами, равна мощности, поглощаемой одной шпалой при изменении времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Если вертикальное отклонение рельса не является периодическим, то при достаточно большом p_2 равенство (2.3) выполняется приближенно с заданной точностью. Равенство (4.1) не зависит от p_2 и, следовательно, является точным для непериодического отклонения рельса.

Подставляя выражение (2.4) в интеграл (4.1) и учитывая, что в любой точке x вертикальное отклонение рельса $y(x, t)$ и его производные стремятся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, получим

$$\langle N \rangle = \frac{v_0 \rho_1}{2} \left(\frac{\partial y(0, t)}{\partial t} \right)^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + v_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial y(0, t)}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{v_0 u y^2(0, t)}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = v_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial y(0, t)}{\partial t} \right)^2 dt \quad (4.2)$$

В рассматриваемой линейной постановке задачи продольная сила, поддерживающая равномерное движение колеса, отсутствует, вертикальное отклонение рельса $y(x, t)$ – малая величина первого порядка, а малые величины более высокого порядка не учитываются. Средняя мощность $\langle N \rangle$, определяемая квадратичным функционалом (4.2), является малой величиной второго порядка.

Постоянная сила f_* , удовлетворяющая равенству $\langle N \rangle = f_* v_0$, совпадает со средней силой сопротивления рельсового пути равномерному движению колеса. Переходя в интеграле (4.2) к безразмерным переменным и деля обе части равенства на v_0 , получим

$$f_* = v_0 r l \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial Y(0, T)}{\partial T} \right)^2 dT \quad (4.3)$$

5. Вычисление силы сопротивления рельсового пути. Нелинейность формул (4.2) и (4.3) затрудняет вычисление силы сопротивления пути движению колеса, нагруженного вертикальными гармоническими силами разной частоты. Это вычисление упрощается применением равенства Парсеваля [16], которое для преобразования Фурье (2.5) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(X, T)|^2 dT = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y^*(X)|^2 d\Phi$$

Дифференцируя второе равенство (2.5) по T и подставляя $X = 0$, получим

$$\frac{\partial Y(0, T)}{\partial T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\Phi Y^*(0) \exp(i\Phi T) d\Phi$$

Если величины $Y(0, T)$ и $Y^*(0)$ связаны равенствами (2.5), то величина $i\Phi Y^*(0)$ является интегральным преобразованием Фурье производной $\partial Y(0, T)/\partial T$. Применяя равенство Парсеваля к этой производной и подставляя результат в равенство (4.3), получим

$$f_* = \frac{v_0 r l}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 |Y^*(0)|^2 d\Phi = \frac{v_0 r l}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 Y^*(0) \bar{Y}^*(0) d\Phi \quad (5.1)$$

Черта над символом обозначает комплексно-сопряженную величину.

Вычислим среднюю силу сопротивления рельсового пути равномерному движению колеса, нагруженного вертикальной силой

$$a_0 \cos(\omega_0 t) = a_0 (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2 \quad (5.2)$$

Слагаемые в правой части равенства (5.2) – комплексно-сопряженные величины.

Введем обозначение

$$J^-(\Phi) = D(\Phi)/(K(-\Phi) + D(\Phi))$$

Согласно равенствам (3.3) и (3.4) безразмерное отклонение шпалы, соответствующее первой экспоненте в правой части равенства (5.2), можно записать в виде

$$Y(0, T) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n Y_n(0, T) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J^+(\Phi) P_n(\Phi) \exp(i\Phi T) d\Phi$$

Перейдем в последнем равенстве к комплексно-сопряженной величине и заменим Φ на $-\Phi$. Последовательность этих действий не изменяет величину $K(\Phi)$. Запишем безразмерное отклонение шпалы, соответствующее второму слагаемому, в виде

$$\bar{Y}(0, T) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{F}_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J^+(-\Phi) P_n(-\Phi) \exp(i\Phi T) d\Phi$$

Безразмерное отклонение шпалы, соответствующее силе (5.2), имеет преобразование Фурье

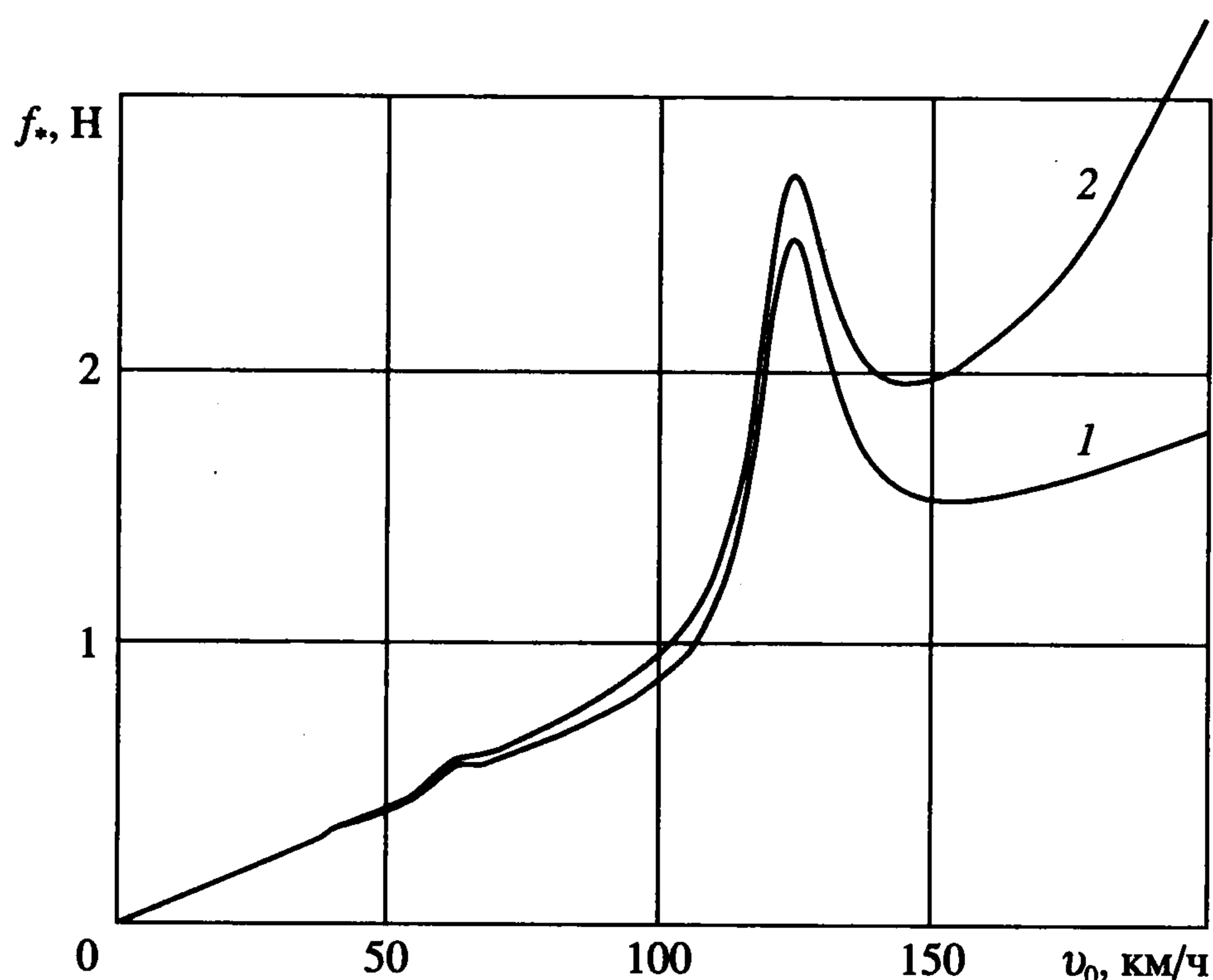
$$\frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n J^+(\Phi) P_n(\Phi) + \bar{F}_n J^-(-\Phi) P_n(-\Phi)) d\Phi$$

Перейдем к комплексно-сопряженной величине

$$\frac{A_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\bar{F}_m J^-(\Phi) P_m(\Phi) + F_m J^+(-\Phi) P_m(-\Phi))$$

и подставим произведение двух последних выражений в формулу (5.1). Меняя порядок суммирования и интегрирования, вычислим сопротивление рельсового пути движению колеса, нагруженного вертикальной силой (5.2), в виде квадратичной формы

$$f_* = \frac{v_0 r l A_0^2}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (S_1(m, n) F_m F_n + S_2(m, n) \bar{F}_m \bar{F}_n + S_3(m, n) F_m \bar{F}_n + S_4(m, n) \bar{F}_m F_n)$$



Фиг. 5

Коэффициенты квадратичной формы $S_j(m, n)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) представляют собой интегралы, которые вычисляются одновременно с коэффициентами $W(m, n, 0)$ системы (3.5).

Результаты вычислений величины f_* в зависимости от скорости движения колеса v_0 показаны на фиг. 5. Кривая 1 представляет сопротивление пути движению уравновешенного колеса под статической нагрузкой 5.78×10^4 Н, кривая 2 – сопротивление пути движению неуравновешенного колеса с дисбалансом 0.5 кгм при той же статической нагрузке. Отношение длины окружности колеса к шагу шпал принято равным $73/24$. Период вертикальных колебаний колеса соответствует 24 оборотам колеса и длине пути, равной 73 шагам шпал. В обоих случаях сопротивление пути исчезает при $v_0 \rightarrow 0$ и резко возрастает при скорости движения 123.8 км/ч. Первое объясняется волновой природой этого сопротивления. Второе связано с параметрическим резонансом колеса.

Центробежная сила существенно увеличивает сопротивление пути движению неуравновешенного колеса при скорости движения более 150 км/ч. Критическая скорость колеса, соответствующая центробежной силе, значительно больше последней величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. N. Y. etc.: Wiley, 1974 = Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1965. 480 с.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
4. Белоцерковский П.М. Установившиеся поперечные колебания периодически сочлененной балки на однородном вязкоупругом основании под действием подвижной гармонической силы // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 167–173.
5. Belotserkovskiy P.M. Forced oscillations of infinite periodic structures. Applications to railway track dynamics // Vehicle System Dynamics Suppl. 1998. V. 29. P. 85–103.

6. Белоцерковский П.М. Высокочастотные вертикальные колебания рельса под действием подвижной гармонической силы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 197–206.
7. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Переходное излучение в периодически неоднородной упругой направляющей // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 164–168.
8. Metrikine A.V., Popp K. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // Eur. J. Mech. A. Solids. 1999. V. 18. № 4. P. 679–701.
9. Zobory I., Zoller V. Dynamic response of a periodically supported railway track in case of a moving complex phasor excitation // Progr. in Industr. Mathematics at ECMI 96. Stuttgart: B.G. Teubner, 1997. P. 85–92.
10. Петров Н.П. Давление колес на рельсы железных дорог, прочность рельс и устойчивость пути. Пг.: Тип. т-ва “Электро-тип. Н.Я. Самойловой”, 1915. 321 с.
11. Inglis Ch.E. The vertical path of a wheel moving along a railway track // J. Instn Civil Engng. 1939. V. 11. № 5. P. 262–277.
12. Korb J. Parametererregung beim Rad–Schiene System // VDI-Ber. 1980. № 381. S. 99–104.
13. Jezequel L. Response of periodic systems to a moving load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. 1981. V. 48. № 3. P. 613–618.
14. Крысов С.В., Холуев В.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих // Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1985. С. 142–149.
15. Вильке В.Г. Качение деформируемого колеса по деформируемому рельсу // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 25–35.
16. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1967. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.2002