ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 67. Вып. 5, 2003

УДК 532.522.2:538.4

© 2003 г. Ю. Г. Губарев, В. В. Никулин

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДЛИННОВОЛНОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУЙНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Изучается задача линейной устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных магнитогидродинамических течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной границей. Предполагается, что струя обладает неограниченной длиной, по ее поверхности течет продольный постоянный электрический ток, а размещается она вдоль оси цилиндрической оболочки с бесконечной проводимостью, так что между ее свободной границей и внутренней поверхностью оболочки находится вакуумная прослойка. Прямым методом Ляпунова получено необходимое и достаточное условие устойчивости данных течений относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений специального вида. В случае нарушения этого условия устойчивости построены двусторонние экспоненциальные оценки роста малых возмущений, причем показатели содержащихся в них экспонент вычисляются по параметрам исследуемых стационарных течений и начальным данным для возмущений. Приведен пример стационарного осесимметричного сдвигового струйного магнитогидродинамического течения и налагаемых на него начальных малых осесимметричных же длинноволновых возмущений, которые на линейном этапе будут эволюционировать во времени и пространстве согласно построенным оценкам.

Ниже результаты об устойчивости установлены для гораздо более широкого класса стационарных течений, чем рассматривавшийся ранее [1], и при наличии не азимутального, а полоидального магнитного поля, "вмороженного" в вещество струи.

1. Постановка точной задачи. Изучается осесимметричная жидкая идеально проводящая струя неограниченной длины в магнитном поле, по свободной границе которой течет продольный постоянный электрический ток J. Струя располагается вдоль оси бесконечной по проводимости цилиндрической оболочки радиуса r_*, нигде не соприкасаясь с ней за счет наличия между ними вакуумного зазора. Вводится цилиндрическая система координат (r^*, φ, z^*) таким образом, чтобы ее ось z^* совпадала с осью симметрии струи. Используются обозначения: ρ – плотность жидкости, (v_1, v_2, v_3) – компоненты поля скорости, (H_1, H_2, H_3) – составляющие магнитного поля внутри струи, P – поле давления, (H_1^*, H_2^*, H_3^*) – компоненты магнитного поля снаружи проводящей струи, t^* – время. Принимается, что при движениях жидкости в струе $v_2 \equiv 0$, $H_2 \equiv 0$, сами эти движения осесимметричны, а жидкость – идеальная, несжимаемая и однородная по плотности. Действие сил поверхностного натяжения на свободной границе струи не учитывается.

В силу сделанных допущений уравнения одножидкостной бездиссипативной магнитной гидродинамики [2, 3] предстанут в форме

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^*} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial P_*}{\partial r^*} + \frac{H_1}{4\pi}\frac{\partial H_1}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi}\frac{\partial H_1}{\partial z^*}\\
&\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial r^*} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial P_*}{\partial z^*} + \frac{H_1}{4\pi}\frac{\partial H_3}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi}\frac{\partial H_3}{\partial z^*}\\
&\frac{1}{r^*}\frac{\partial(v_1 r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v_3}{\partial z^*} = 0 \qquad (1.1)\\
&\frac{\partial(Ar^*)}{\partial t^*} + v_1\frac{\partial(Ar^*)}{\partial r^*} + v_3\frac{\partial(Ar^*)}{\partial z^*} = 0\\
&P_* \equiv P + \frac{H_1^2 + H_3^2}{8\pi}, \quad H_1 \equiv -\frac{\partial A}{\partial z^*}, \quad H_3 \equiv \frac{1}{r^*}\frac{\partial(Ar^*)}{\partial r^*}
\end{aligned}
$$

Здесь P_* – модифицированное поле давления, A – азимутальная составляющая векторного потенциала магнитного поля.

Если пренебречь током смещения, соотношения для компонентов магнитного поля в области между внутренней поверхностью цилиндрической оболочки и свободной границей струи [4] запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_2^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial H_1^*}{\partial z^*} - \frac{\partial H_3^*}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{1}{r^*}\frac{\partial(H_2^* r^*)}{\partial r^*} = 0\\
&\frac{1}{r^*}\frac{\partial(H_1^* r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial H_3^*}{\partial z^*} = 0
\end{aligned} \qquad (1.2)
$$

Ставятся следующие краевые условия:
на оси струи

$$r^* = 0:\ v_1 = 0, \quad H_1 = 0 \qquad (1.3)$$

на ее свободной поверхности

$$
\begin{aligned}
&r^* = r_1(t^*, z^*):\ P_* = \frac{H_1^{*2} + H_2^{*2} + H_3^{*2}}{8\pi}, \quad v_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t^*} + v_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*}\\
&H_1 - H_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*} = 0, \quad H_1^* - H_3^*\frac{\partial r_1}{\partial z^*} = 0
\end{aligned} \qquad (1.4)
$$

на внутренней границе цилиндрической оболочки

$$r^* = r_*:\ H_1^* = 0 \qquad (1.5)$$

Начальные условия для системы уравнений (1.1) и второго из соотношений (1.4) задаются в форме

$$
\begin{aligned}
&v_1(0, r^*, z^*) = v_{10}(r^*, z^*), \quad v_3(0, r^*, z^*) = v_{30}(r^*, z^*)\\
&A(0, r^*, z^*) = A_0(r^*, z^*), \quad r_1(0, z^*) = r_{10}(z^*)
\end{aligned} \qquad (1.6)
$$

причем от функций v_{10}, v_{30}, A_0 и r_{10} требуется, чтобы они не противоречили третьему уравнению системы (1.1), условиям (1.3), а также первой, третьей и четвертой связям из системы соотношений (1.4).

Далее в начально-краевой задаче (НКЗ) (1.1)–(1.6) выполняется переход к длинноволновому приближению, предваряемый переходом к безразмерному виду. При этом в качестве масштабов берутся: L – характерный масштаб изменения гидродинамических и магнитных полей вдоль координатной оси z^*, v_0 – характерная скорость жидкости, r_0 – характерный радиус струи и конструируются безразмерные величины $t, \eta, p_*, q, z, h, H, w, a, h^*, \kappa$ и H^*, так что имеют место выражения

$$\begin{aligned} &t^* = tL/v_0, \quad r^{*2} = \eta L^2\delta^2, \quad P_* = p_*\rho v_0^2, \quad 2v_1 r^* = q v_0 L\delta^2 \\ &z^* = zL, \quad H_1 r^* = h v_0\sqrt{\pi\rho}L\delta^2, \quad H_3 = 2Hv_0\sqrt{\pi\rho} \\ &v_3 = wv_0, \quad Ar^* = av_0\sqrt{\pi\rho}L^2\delta^2, \quad H_1^* r^* = h^* v_0\sqrt{\pi\rho}L\delta^2 \\ &H_2^* r^* = 2\kappa v_0\sqrt{\pi\rho}L\delta, \quad H_3^* = 2H^* v_0\sqrt{\pi\rho} \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\delta \equiv |r_0/L \ll 1$ – безразмерный характерный радиус струи.

В результате из системы (1.1) получается система уравнений

$$\begin{aligned} &\delta^2\left[q_t + qq_\eta - \frac{q^2}{2\eta} + wq_z\right] = -4\eta p_{*\eta} + \delta^2\left[hh_\eta - \frac{h^2}{2\eta} + Hh_z\right] \\ &w_t + qw_\eta + ww_z = -p_{*z} + hH_\eta + HH_z, \quad q_\eta + w_z = 0 \\ &a_t + qa_\eta + wa_z = 0; \quad h \equiv -a_z, \quad H \equiv a_\eta \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь и ниже индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные.

Система соотношений (1.2) преобразуется к виду

$$\delta^2 h_z^* - 4\eta H_\eta^* = 0, \quad H_z^* + h_\eta^* = 0, \quad \kappa \equiv \frac{J}{r_0 v_0\sqrt{\pi\rho}} = \mathrm{const} \tag{1.9}$$

Принимая во внимание последнее равенство (1.9), краевые условия (1.3)–(1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\eta = 0: q = 0, \quad h = 0 \\ &\eta = \eta_1(t,z): q = \eta_{1t} + w\eta_{1z}, \quad p_* = \frac{1}{2}\left[\frac{(h^*\delta)^2}{4\eta_1} + \frac{\kappa^2}{\eta_1} + H^{*2}\right] \\ &\eta = \eta_1(t,z): h - H\eta_{1z} = 0, \quad h^* - H^*\eta_{1z} = 0 \\ &\eta = \eta_*: h^* = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Функция $\eta_1(t, z)$ описывает изменение формы свободной поверхности струи с течением времени, а значение η_* отвечает радиусу окружающей ее цилиндрической оболочки.

Наконец, начальные условия (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} &q(0,\eta,z) = q_0(\eta,z), \quad w(0,\eta,z) = w_0(\eta,z) \\ &a(0,\eta,z) = a_0(\eta,z), \quad \eta_1(0,z) = \eta_{10}(z) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Отсюда вытекает, что если из соотношений НКЗ (1.8)–(1.11) исключить слагаемые, пропорциональные сомножителю δ^2, и убрать выражение для функции $q(0, \eta, z)$, то тем самым ей будет придана форма, которая как раз и соответствует длинноволновому приближению.

Примечательно, что тогда система уравнений (1.9) будет обладать решением, обращающим в тождества шестое и седьмое краевые условия системы (1.10), а именно:

$$h^*(t, \eta, z) = (\eta_* - \eta)H_z^*, \quad H^*(t, z) = \Phi/(\eta_* - \eta_1)$$

Здесь $\Phi = \Phi(t)$ – произвольная функция времени, являющаяся по своему физическому смыслу безразмерным осевым потоком магнитного поля через вакуумную прослойку между свободной границей струи и внутренней поверхностью цилиндрической оболочки.

Далее считается, что осевой поток магнитного поля через вакуумный зазор между струей и оболочкой фиксирован, т.е. $\Phi(t) \equiv \Phi_0 = \text{const}$. Это предположение подразумевает отсутствие каких-либо внешних по отношению к исследуемой механической системе источников, которые могли бы вызывать изменение величины данного потока во времени, и находится в полном согласии с соотношениями, получаемыми из смешанной задачи (1.8)–(1.11) путем перехода к длинноволновому приближению. В результате четвертое равенство системы краевых условий (1.10) превратится в связь

$$\eta = \eta_1(t, z) \colon p_* = \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa^2}{\eta_1} + \frac{\Phi_0^2}{(\eta_* - \eta_1)^2}\right] \qquad (1.12)$$

Последующее рассмотрение длинноволновой модификации НКЗ (1.8)–(1.11) может быть заметно упрощено, если осуществить в ней замену эйлеровых независимых переменных (t, η, z) на смешанные эйлерово-лагранжевы переменные (t', ν, z') [5]. Эта замена, по аналогии с предложенной ранее [1], определяется соотношениями

$$t = t', \quad \eta = R(t', \nu, z'), \quad z = z'; \quad \nu \in [0, 1]$$

причем полагается, что фигурирующая в них функция R удовлетворяет уравнению

$$q = R_{t'} + wR_{z'} \qquad (1.13)$$

и краевым условиям

$$R(t', 0, z') = 0, \quad R(t', 1, z') = \eta_1(t', z') \qquad (1.14)$$

Суть данной замены независимых переменных состоит в том, что траектории жидких частиц оказываются теперь пронумерованными при помощи новой переменной ν. Кроме того, из выражений (1.13) и (1.14), характеризующих свойства функции $R(t', \nu, z')$, вытекает, что первое и третье краевые условия системы (1.10) выполняются для функции $q(t, \eta, z)$ автоматически. Наконец (что очень важно), неизвестная свободная граница $\eta = \eta_1(t, z)$ струи отображается при такой замене независимых переменных в известную фиксированную поверхность $\nu = 1$.

Итак, в новых смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (с учетом пренебрежения слагаемыми, которые содержат множитель δ^2) система соотношений (1.8) перепишется в виде

$$\begin{gathered} R_\nu(w_t + ww_z) = -R_\nu p_{*z} + hH_\nu + R_\nu HH_z - HR_zH_\nu \\ p_{*\nu} = 0, \quad q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0, \quad a_t + wa_z = 0 \\ h \equiv -a_z + \frac{a_\nu R_z}{R_\nu}, \quad H \equiv \frac{a_\nu}{R_\nu} \end{gathered} \qquad (1.15)$$

где ради удобства представления следующих ниже выкладок штрихи с независимых переменных t' и z' сняты.

Краевыми условиями для уравнений (1.15) будут соотношение (1.12) и связь

$$a_z = 0 \quad (\nu = 0, 1) \tag{1.16}$$

вытекающая из второго и пятого равенств (1.10), а также двух последних выражений системы уравнений (1.15).

Соотношения (1.12)–(1.16) дополняются начальными условиями в форме

$$w(0, \nu, z) = w_0(\nu, z), \quad R(0, \nu, z) = R_0(\nu, z), \quad a(0, \nu, z) = a_0(\nu, z) \tag{1.17}$$

Функция $R_0(\nu, z)$ считается в силу требования взаимной однозначности произведенной замены переменных монотонно возрастающей по аргументу ν.

Смешанная задача (1.12)–(1.17) далее изучается в предположении, что величина a – заданная функция независимой переменной ν, а именно: $a = a_*(\nu)$. Это означает, что приведенное к безразмерному виду произведение азимутальной составляющей векторного потенциала магнитного поля на радиальную координату остается в процессе движений жидкости постоянным на каждой линии $\nu = \text{const}$. Существенно, что данное ограничение не вступает в противоречие с четвертым из уравнений (1.15), так как если при $t = 0$ принять $a_0 = a_*(\nu)$, то согласно этому уравнению такая форма зависимости величины a от переменной ν не претерпит никаких изменений и во все последующие моменты времени $t > 0$. Более того, для функции a вида $a_*(\nu)$ краевое условие (1.16) удовлетворяется тождественно.

С целью придания НКЗ (1.12)–(1.17) максимально наглядной формы посредством соотношения (1.12) и второго уравнения системы (1.15) находится связь

$$p_{*z} = \left[-\frac{\kappa^2}{2\eta_1^2} + \frac{\Phi_0^2}{(\eta_* - \eta_1)^3}\right]\eta_{1z} \tag{1.18}$$

Заменяя теперь в системе соотношений (1.15) частную производную p_{*z} ее выражением (1.18), функцию q – ее представлением (1.13) и учитывая сделанное выше предположение о виде функциональной зависимости величины a от переменной ν, смешанную задачу (1.12)–(1.17) можно окончательно записать в форме

$$\begin{gathered}
w_t + ww_z = \left[\frac{\kappa^2}{2R_1^2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - R_1)^3}\right]R_{1z} - \frac{R_{\nu z}}{R_\nu^3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 \\
R_{\nu t} + (wR_\nu)_z = 0 \\
h \equiv \frac{R_z}{R_\nu}\frac{da_*}{d\nu}, \quad H \equiv R_\nu^{-1}\frac{da_*}{d\nu} \\
w(0, \nu, z) = w_0(\nu, z), \quad R(0, \nu, z) = R_0(\nu, z)
\end{gathered} \tag{1.19}$$

где R_1 – значение функции R на свободной границе струи $\nu = 1$, для которого в силу второго из равенств (1.14) имеет место связь $R_1 \equiv \eta_1(t, z)$, а R_* – радиус цилиндрической оболочки, окружающей струю (данное обозначение введено вместо η_* ради единообразия дальнейшего изложения).

Необходимо отметить, что если в качестве R выбрать монотонно убывающую по независимой переменной ν функцию, то и в этом случае получатся уравнения, подобные первым двум соотношениям системы (1.19). Отличие будет заключаться лишь в том, что тогда свободной поверхностью струи будет не ось $\nu = 1$, а прямая $\nu = 0$, в то время как ее осью симметрии – прямая $\nu = 1$, а не ось $\nu = 0$.

Для НКЗ (1.19) существует интеграл энергии вида

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1\left[w^2R_\nu + R_\nu^{-1}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2\right]d\nu + \kappa^2\ln R_1 + \frac{\Phi_0^2}{R_* - R_1}\right)dz = \text{const} \tag{1.20}$$

при условии, что решения данной задачи или периодичны вдоль координатной оси z, или локализованы на ней (в последнем случае течение жидкости на бесконечности должно быть однородным по координате z). Кроме того, несложно показать, что функционал

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1[w_\nu F(a_*)]d\nu dz \tag{1.21}$$

где F – произвольная функция, служит еще одним интегралом движения для смешанной задачи (1.19) [1, 6].

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение

$$\chi_{mn} = \chi_{mn}(\nu) \equiv \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-m}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^n$$

НКЗ (1.19) имеет точные стационарные решения, которые могут быть выписаны в форме

$$w = w^0(\nu),\quad R = R^0(\nu),\quad R_1 = R_1^0 \equiv 1,\quad h = h^0 \equiv 0,\quad H = H^0(\nu) \equiv \chi_{11} \tag{1.22}$$

где w^0 – произвольная, а R^0 – монотонно возрастающая функции переменной ν; радиус невозмущенной струи берется равным r_0 (1.7).

Последующее исследование нацелено на выявление достаточных условий линейной устойчивости стационарных решений (1.22) к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (МОДВВ) $w'(t, \nu, z)$ и $R'(t, \nu, z)$.

2. Постановка линеаризованной задачи. Указанную выше цель можно попытаться достичь путем линеаризации смешанной задачи (1.19) около точных стационарных решений (1.22). В итоге возникает НКЗ

$$\begin{gathered} w'_t + w^0w'_z = -\Psi R'_{1z} - \chi_{32}R'_{\nu z},\quad R'_{\nu t} + w^0R'_{\nu z} + \frac{dR^0}{d\nu}w'_z = 0 \\ R'_1(t, z) \equiv R'(t, 1, z),\quad h' \equiv \chi_{11}R'_z,\quad H' \equiv -\chi_{21}R'_\nu \\ w'(0, \nu, z) = w'_0(\nu, z),\quad R'(0, \nu, z) = R'_0(\nu, z) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\Psi \equiv \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}$$

На решениях данной задачи с течением времени сохраняется функционал

$$E \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1\left[\frac{dR^0}{d\nu}w'^2 + 2w^0R'_\nu w' + \chi_{32}R'^2_\nu\right]d\nu + \Psi R'^2_1\right)dz \tag{2.2}$$

Нетрудно проверить, что первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 \equiv E_1 + I$ (1.20), (1.21) обращается в нуль на стационарных решениях (1.22), если функции w^0, R^0, a_* и F обращают в тождества уравнения

$$w^0\frac{dR^0}{d\nu} = \frac{dF}{da_*}\frac{da_*}{d\nu},\quad \chi_{11}\frac{d\chi_{11}}{d\nu} = w^0\frac{dw^0}{d\nu} \tag{2.3}$$

При этом вторая вариация $\delta^2 J_1$ функционала J_1, переписанная в подходящих обозначениях, совпадет по форме с интегралом E (2.2).

Точные стационарные решения (1.22) смешанной задачи (1.19) будут устойчивы относительно МОДВВ (2.1) тогда и только тогда, когда функционал E знакоопределен.

Для того чтобы установить, обладает ли интеграл E (2.2) свойством знакоопределенности, его удобно представить в виде

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 (B\mathbf{u}, \mathbf{u})d\nu dz; \quad \mathbf{u} \equiv \mathrm{col}(w', R'_\nu, R'_1) \tag{2.4}$$

Здесь $B = \|b_{ik}\|$ – (3×3)-матрица с ненулевыми элементами

$$b_{11} = \frac{dR^0}{d\nu}, \quad b_{12} = b_{21} = w^0, \quad b_{22} = \chi_{32}, \quad b_{23} = b_{32} = \frac{\Psi}{2}$$

Согласно критерию Сильвестра [7] подынтегральное выражение функционала E (2.4) является положительно (отрицательно) определенным в том и только в том случае, когда главные миноры матрицы B положительны (имеют знак $(-1)^n$, где n – порядок соответствующего главного минора). Непосредственное вычисление главных миноров Δ_n матрицы B приводит к соотношениям

$$\Delta_1 = \frac{dR^0}{d\nu} > 0, \quad \Delta_2 = \chi_{22} - w^{02}, \quad \Delta_3 = -\frac{\Psi^2}{4}\frac{dR^0}{d\nu} < 0$$

и позволяет заключить, что в силу критерия Сильвестра интеграл E (2.4) свойством знакоопределенности не обладает.

Таким образом, не удается получить достаточные условия линейной устойчивости точных стационарных решений (1.22) НКЗ (1.19) по отношению к МОДВВ $w'(t, \nu, z)$ и $R'(t, \nu, z)$ (2.1), если понимать их как условия знакоопределенности энергетического по своей природе функционала E (2.2), (2.4).

3. Постановка специальной точной задачи. Ниже рассмотрение линейной устойчивости стационарных решений (1.22) смешанной задачи (1.19) производится в классе таких движений жидкости, что

$$R(t, \nu, z) \equiv R_1(t, z)R^0(\nu) \tag{3.1}$$

Эта связь дает возможность преобразовать второе из уравнений НКЗ (1.19) к форме

$$R_{1t} + (wR_1)_z = 0 \tag{3.2}$$

Если продифференцировать соотношение (3.2) по независимой переменной ν, то получится уравнение

$$u_{z\nu} = 0; \quad u \equiv wR_1 \tag{3.3}$$

представляющее собой условие совместности для движений жидкости вида (3.1).

Подстановка функций R (3.1) и u (3.3) в первое, третье и четвертое соотношения смешанной задачи (1.19), а также в уравнение (3.2) позволяет записать их в форме

$$\begin{gathered} u_t + \left(\frac{u^2}{R_1}\right)_z = \left[\frac{\kappa^2}{2R_1} - \frac{\Phi_0^2 R_1}{(R_* - R_1)^3} - \frac{\chi_{22}}{R_1^2}\right]R_{1z}, \quad R_{1t} + u_z = 0 \\ h = \frac{R^0}{R_1}\chi_{11}R_{1z}, \quad H = \frac{\chi_{11}}{R_1} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Дифференцируя, в свою очередь, первое из соотношений (3.4) сначала по переменной ν, затем по независимой переменной z и, наконец, вновь по переменной ν, выводим второе условие совместности для класса (3.1) движений жидкости

$$\left[\left(\frac{da_*}{d\nu}\frac{d\chi_{11}}{d\nu}\right)^{-1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(\frac{u^2}{R_1}\right)_{zz\nu}\right]_\nu = 0 \tag{3.5}$$

К уравнениям (3.3)–(3.5) добавляются начальные условия

$$u(0,\nu,z) = u_0(\nu,z), \quad R_1(0,z) = R_{10}(z) \tag{3.6}$$

В итоге сформулирована НКЗ (3.3)–(3.6), которая описывает в длинноволновом приближении специальный класс (3.1), (3.3), (3.5) нестационарных осесимметричных сдвиговых струйных магнитогидродинамических течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной границей.

Интегралы E_1 (1.20) и I (1.21) будут сохраняться во времени также и на решениях смешанной задачи (3.3)–(3.6), однако их вид, в силу введенных выше определений функций R (3.1) и u (3.3), станет несколько иным:

$$E_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^1\left[R_1^{-1}\frac{dR^0}{d\nu}(u^2+\chi_{22})\right]d\nu + \kappa^2\ln R_1 + \frac{\Phi_0^2}{R_*-R_1}\right)dz \tag{3.7}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\left[\frac{u_\nu}{R_1}F(a_*)\right]d\nu dz$$

Точными стационарными решениями НКЗ (3.3)–(3.6) служат функции

$$u = w^0(\nu), \quad R_1 = R_1^0 \equiv 1, \quad h = h^0 \equiv 0, \quad H = H^0(\nu) \equiv \chi_{11} \tag{3.8}$$

Цель последующего изучения – обнаружить достаточные условия линейной устойчивости стационарных решений (3.8) к МОДВВ $u'(t,\nu,z)$ и $R_1'(t,z)$. Ясно, что эти условия устойчивости будут одновременно и достаточными условиями линейной устойчивости точных стационарных решений (1.22) смешанной задачи (1.19) относительно тех же МОДВВ.

4. Постановка специальной линеаризованной задачи. Для достижения указанной цели проводится линеаризация НКЗ (3.3)–(3.6) около стационарных решений (3.8), что приводит к смешанной задаче

$$\begin{gathered} u_t' + 2w^0u_z' = (w^{02}-\chi)R_{1z}', \quad R_{1t}' + u_z' = 0, \quad u_{z\nu}' = 0 \\ \frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \chi_{11}\frac{d\chi_{11}}{d\nu}\left(\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\right] = 0, \quad h' = R^0R_{1z}'\chi_{11} \\ H' = -R_1'\chi_{11}; \quad u'(0,\nu,z) = u_0'(\nu,z), \quad R_1'(0,z) = R_{10}'(z) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь

$$\chi \equiv \Psi + \chi_{22}$$

Для этой задачи имеется сохраняющийся с течением времени функционал в форме

$$E_2 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{dR^0}{d\nu}[u'^2 + (\chi - w^{02})R_1'^2]\right)d\nu dz \tag{4.2}$$

Первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 = E_1 + I$ (3.7) равна нулю на точных стационарных решениях (3.8), а его вторая вариация $\delta^2 J_1$ идентична, в соответствующих обозначениях, функционалу E_2, если справедливы соотношения

$$w^0\frac{dR^0}{d\nu} = \frac{dF}{da_*}\frac{da_*}{d\nu}, \quad w^0(1)F(a_*(1)) = w^0(0)F(a_*(0)) \tag{4.3}$$

(ср. с уравнениями (2.3)).

Стационарные решения (3.8) НКЗ (3.3)–(3.6) (а значит, и точные стационарные решения (1.22) смешанной задачи (1.19)) будут устойчивы по отношению к МОДВВ (4.1) тогда и только тогда, когда всюду внутри струи

$$\chi - w^{02} \geq 0 \tag{4.4}$$

поскольку данное соотношение, как это вытекает из выражения (4.2), обеспечивает, по крайней мере, неотрицательность интеграла E_2.

Следует подчеркнуть, что неравенство (4.4) и есть достаточное условие линейной устойчивости стационарных решений (3.8) (либо (1.22)), которое требовалось найти.

5. Функционал Ляпунова. Далее полагается, что истинность соотношения (4.4) нарушается хотя бы где-нибудь в пределах струи. В таком случае можно надеяться продемонстрировать линейную неустойчивость точных стационарных решений (3.8) НКЗ (3.3)–(3.6) (а вместе с ними, естественно, и стационарных решений (1.22) смешанной задачи (1.19)) к МОДВВ $u'(t, \nu, z)$, $R_1'(t, z)$ (4.1). Если данной цели удастся достичь, то тогда будет доказано, что условие (4.4) линейной устойчивости точных стационарных решений (3.8) (или (1.22)) является не только достаточным, но и необходимым.

Для осуществления задуманного нужно суметь выделить среди МОДВВ (4.1) всего лишь одно, но экспоненциально быстро нарастающее во времени. Наиболее эффективно это может быть реализовано в случае, когда исследование сосредоточено на МОДВВ, представляющих собой простые отклонения траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока стационарных течений (3.8). Нагляднее всего данные возмущения можно описать с помощью поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t, \nu, z)$ [8], которое удовлетворяет уравнению

$$\xi_t = u' \tag{5.1}$$

Отсюда вытекает, что тогда НКЗ (4.1) принимает вид

$$\begin{gathered}
\xi_{tt} + 2w^0\xi_{tz} = (\chi - w^{02})\xi_{zz}, \quad R_1' = -\xi_z, \quad \xi_{z\nu} = 0, \quad H' = \chi_{11}\xi_z \\
\frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \chi_{11}\frac{d\chi_{11}}{d\nu}\left(\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\right] = 0, \quad h' = -R^0\chi_{11}\xi_{zz} \\
\xi(0, \nu, z) = \xi_0(\nu, z), \quad \xi_t(0, \nu, z) = u'(0, \nu, z) = u_0'(\nu, z)
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Из-за наличия третьего соотношения в системе (5.2) смешанная задача (5.1), (5.2) является переопределенной. Кроме того, это соотношение говорит о том, что функция $\xi(t, \nu, z)$, будучи решением НКЗ (5.1), (5.2), должна обладать формой

$$\xi(t, \nu, z) = f(t, z) + f_1(t, \nu) \tag{5.3}$$

($f(t, z)$ и $f_1(t, \nu)$ – некоторые функции своих аргументов) и никакой другой.

Следовательно, начальные данные $\xi_0(\nu, z)$ и $u'_0(\nu, z)$ для смешанной задачи (5.1), (5.2) необходимо задавать в виде

$$\xi_0(\nu, z) = f_2(\nu) + f_3(z), \quad u'_0(\nu, z) = f_4(\nu) + f_5(z) \tag{5.4}$$

где f_2 и f_4 – произвольные функции независимой переменной ν, а f_3 и f_5 – некоторые функции переменной z.

Теперь нужно выяснить: имеет ли НКЗ (5.1), (5.2) решения в форме (5.3) и налагает ли переопределенность смешанной задачи (5.1), (5.2) какие-либо дополнительные (помимо (5.4)) ограничения на выбор начальных возмущений $\xi_0(\nu, z)$, $u'_0(\nu, z)$.

Наиболее убедительные ответы на поставленные вопросы могут быть даны, если переформулировать НКЗ (5.1), (5.2) в виде

$$\begin{gathered} R'_{1tt} + 2w^0 R'_{1tz} = (\chi - w^{02})R'_{1zz}, \quad h' = R^0\chi_{11}R'_{1z} \\ \frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \chi_{11}\frac{d\chi_{11}}{d\nu}\left(\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\right] = 0, \quad H' = -\chi_{11}R'_1 \\ R'_1(0, z) = R'_{10}(z)\left(= -\frac{df_3}{dz}\right), \quad R'_{1t}(0, z) = (R'_{1t})_0(z)\left(= -\frac{df_5}{dz}\right) \end{gathered} \tag{5.5}$$

Видно, что смешанная задача (5.5) включает в себя единственное уравнение для определения единственной же искомой функции $R'_1(t, z)$, причем, что крайне важно, это уравнение однородно. Таким образом, начальные данные $R'_{10}(z)$ и $(R'_{1t})_0(z)$ можно брать произвольными без всяких добавочных ограничений.

В итоге, если решение $R'_1(t, z)$ НКЗ (5.5) найдено, то с помощью второго из системы соотношений (5.2) может быть вычислена функция $\xi(t, \nu, z)$ как решение смешанной задачи (5.1), (5.2), полностью отвечающее представлению (5.3).

Итак, опираясь на приведенные здесь соображения, можно сделать вывод, что у НКЗ (5.1), (5.2) могут быть решения в форме (5.3), при этом ее переопределенность никакими дополнительными (за исключением (5.4)) ограничениями на начальные возмущения $\xi_0(\nu, z)$, $u'_0(\nu, z)$ не сопровождается.

Ниже, для удобства дальнейшего изложения, вводятся вспомогательные интегралы

$$\begin{gathered} M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}\xi^2 d\nu dz, \quad T \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}(u' - w^0 R'_1)^2 d\nu dz \\ \Pi \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}\chi R_1'^2 d\nu dz, \quad \Pi_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}(\chi - w^{02})R_1'^2 d\nu dz \\ T_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}w^0(u' - w^0 R'_1)R'_1 d\nu dz, \quad T_2 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}u'^2 d\nu dz \end{gathered} \tag{5.6}$$

так что

$$E_2 \equiv T + \Pi + T_1 \equiv T_2 + \Pi_1 = \mathrm{const} \tag{5.7}$$

Двукратное дифференцирование функционала M (5.6) по времени и выполнение преобразований получившегося в результате интеграла с использованием связей (4.1), (5.1), (5.2) и (5.6) позволяет прийти к основному уравнению [1, 9]

$$d^2M/dt^2 = 4(T - \Pi)$$

которое называют вириальным равенством [8]. Умножая теперь данное равенство на некоторый постоянный множитель λ, принимая во внимание соотношение (5.7) и применяя уравнение

$$dT_1/dt = 0$$

(непосредственно вытекающее из смешанных задач (4.1) и (5.1), (5.2)), выводим ключевое соотношение

$$dE_\lambda/dt = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda \tag{5.8}$$

где

$$E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda, \quad 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T + \lambda^2 M - \lambda\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}(u' - w^0 R_1' - \lambda\xi)^2 d\nu dz \geq 0$$

Выбрав множитель λ строго положительным, уравнение (5.8) сводим, при учете неотрицательности функционала T_λ, к дифференциальному неравенству

$$dE_\lambda/dt \leq 2\lambda E_\lambda$$

интегрирование которого дает важную оценку

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{5.9}$$

Примечательно, что неравенство (5.9) верно как для любых решений НКЗ (5.1), (5.2), так и для произвольных положительных значений постоянной величины λ. Кроме того (что весьма существенно), при получении этого неравенства не накладывалось никаких ограничений на знак функционала Π.

Наконец, соотношение (5.9) позволяет заключить, что интеграл E_λ, в глобальном смысле, монотонно меняется с течением времени. Это служит основанием для того, чтобы воспринимать его ниже в качестве функционала Ляпунова [1, 9, 10].

6. Двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений. Обратимся к построению априорных двусторонних экспоненциальных оценок нарастания МОДВВ (5.1)–(5.4) стационарных решений (3.8) смешанной задачи (3.3)–(3.6) при помощи основного интегрального неравенства (5.9), а также путем надлежащего подбора функций $\xi_0(\nu, z)$ и $u_0'(\nu, z)$ в условиях, когда или всюду внутри струи, или лишь в некоторой ее части справедливо неравенство

$$\chi - w^{02} < 0 \tag{6.1}$$

В этом случае можно взять начальные возмущения $\xi_0(\nu, z)$ и $u_0'(\nu, z)$ (5.2), (5.4) такими, чтобы выполнялись соотношения

$$\Pi_1(0) < 0, \quad T_2(0) - T_1(0) < |\Pi_1(0)| \tag{6.2}$$

Тогда функционал $E_\lambda(0)$ (5.8) превратится в полином второй степени по параметру λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (5.6) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E_3(0) \equiv E_2(0) - T_1(0)$ (4.2), (5.6), (5.7):

$$E_\lambda(0) = E_3(0) - \frac{\lambda dM}{2\,dt}(0) + \lambda^2 M(0) \tag{6.3}$$

Если считать, что

$$0<\lambda<\Lambda\equiv A_1+\sqrt{A_2}$$
$$A_1\equiv\frac{1}{4M(0)}\frac{dM}{dt}(0),\quad A_2\equiv A_1^2-\frac{E_3(0)}{M(0)} \tag{6.4}$$

то с помощью выражения (6.3) интеграл $E_\lambda(0)$ может быть оценен сверху, т.е.

$$E_\lambda(0)<0 \tag{6.5}$$

Неравенства (5.9) и (6.5) очевидным образом свидетельствуют об экспоненциальном по времени росте МОДВВ (5.1)–(5.4).

Полагая $\lambda\equiv\Lambda-\delta_1$ (с какой-либо постоянной величиной $\delta_1\in\,]0,\Lambda[$), соотношение (5.9) можно представить в форме

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t)\le E_{\Lambda-\delta_1}(0)\exp[2(\Lambda-\delta_1)t]\quad (E_{\Lambda-\delta_1}(0)<0) \tag{6.6}$$

Поскольку в соответствии с определениями (5.8) функционалов E_λ, T_λ и Π_λ, а также с выражением (5.6) для интеграла Π_1 истинно соотношение

$$E_\lambda(t)>\Pi_1(t)$$

неравенство (6.6) может быть переписано в более показательном виде

$$-\Pi_1(t)>\left|E_{\Lambda-\delta_1}(0)\right|\exp[2(\Lambda-\delta_1)t]$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1\frac{dR^0}{d\nu}(w^{02}-\chi)R_1'^2\,d\nu dz>2\left|E_{\Lambda-\delta_1}(0)\right|\exp[2(\Lambda-\delta_1)t] \tag{6.7}$$

Соотношение (6.7) наглядно демонстрирует, что параметр $\Lambda-\delta_1$ (6.4), (6.6) является нижней гранью допустимых значений инкрементов МОДВВ (5.1)–(5.4) точных стационарных решений (3.8) НКЗ (3.3)–(3.6).

Пусть верно неравенство

$$\lambda>\Lambda^+\equiv\sup_{\xi_0(\nu,z),\,u_0'(\nu,z)}\Lambda \tag{6.8}$$

В таком случае функционал $E_\lambda(0)$ будет положительно определенным для любых возможных начальных данных $\xi_0(\nu,z)$ и $u_0'(\nu,z)$ (5.2), (5.4).

В итоге, считая $\lambda\equiv\Lambda^++\delta_2$ (δ_2 – произвольная положительная постоянная), соотношение (5.9) преобразуем в неравенство

$$E_{\Lambda^++\delta_2}(t)\le E_{\Lambda^++\delta_2}(0)\exp[2(\Lambda^++\delta_2)t] \tag{6.9}$$

говорящее о том, что величина $\Lambda^++\delta_2$ оценивает сверху значения инкрементов МОДВВ (5.1)–(5.4) стационарных решений (3.8) смешанной задачи (3.3)–(3.6).

Сравнение соотношений (6.7) и (6.9) позволяет сделать вывод, что для скорости нарастания ω МОДВВ (5.1)–(5.4) параметр Λ^+ (6.4), (6.8) служит для построения и верхней, и нижней границы:

$$\Lambda^+-\delta_1\le\omega\le\Lambda^++\delta_2 \tag{6.10}$$

Двойное неравенство (6.10) свидетельствует о том, что быстрее всего растут те МОДВВ (5.1)–(5.4), инкременты которых близки по величине к значению параметра Λ^+.

Итак, если справедливо соотношение (6.1), то после вычисления посредством выражений (6.4) и (6.8) величины параметра Λ^+, которое характеризует скорость нарастания ω (6.10) наиболее быстро растущих МОДВВ (5.1)–(5.4), можно ответить на вопрос: за какое время МОДВВ (5.1)–(5.4) будут приводить стационарные осесимметричные сдвиговые струйные магнитогидродинамические течения (3.8) (либо, что эквивалентно, (1.22)) невязкой идеально проводящей несжимаемой однородной по плотности жидкости со свободной поверхностью к разрушению?

Отметим, что результаты, изложенные в этом разделе, представляют собой доказательство того, что условие (4.4) линейной устойчивости точных стационарных решений (3.8) (или (1.22)) является одновременно и достаточным, и необходимым.

С математической точки зрения представленные в настоящей работе результаты являются априорными, поскольку теоремы существования решений рассматривавшихся смешанных задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными не доказаны.

7. Примеры. Изучается стационарное осесимметричное сдвиговое струйное магнитогидродинамическое течение

$$
\begin{aligned}
&w^0(\nu) = 2-\nu, \quad R^0(\nu) = \nu, \quad R_1^0 = 1, \quad h^0 = 0, \quad H^0(\nu) = \nu+2 \\
&a_*(\nu) = \nu^2/2+2\nu+1, \quad \kappa = 2, \quad \Phi_0 = \sqrt{2}, \quad R_* = 2
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости с бесконечной проводимостью в области, которая представляет из себя неограниченную полосу

$$
[(z,\nu)\colon -\infty < z < +\infty,\ 0 \le \nu \le 1] \tag{7.2}
$$

Ясно, что данное течение – типичный представитель течений, соответствующих стационарным решениям (1.22) НКЗ (1.19) (а значит, и точным стационарным решениям (3.8) смешанной задачи (3.3)–(3.6)).

Для течения (7.1), (7.2) функция $F(a_*)$ (1.21) должна удовлетворять связям (4.3), принимающим в рассматриваемой ситуации форму

$$
dF/d\nu = 2-\nu, \quad 2F(0) = F(1)
$$

откуда вытекает, что

$$
F(\nu) = -\nu^2/2+2\nu+3/2
$$

Далее, течение (7.1), (7.2) таково, что для него выполняется неравенство (4.4). В самом деле, прямые расчеты показывают, что

$$
\chi - w^{02} = 8\nu \ge 0
$$

на всем интервале (7.2) изменения независимой переменной ν.

Это говорит о том, что течение (7.1), (7.2) будет устойчиво в линейном приближении относительно МОДВВ (4.1) и тем более (5.1)–(5.4).

Теперь исследуется стационарное осесимметричное сдвиговое струйное магнитогидродинамическое течение

$$w^0(\nu) = 4-\nu, \quad R^0(\nu) = \nu, \quad R_1^0 = 1, \quad h^0 = 0$$

$$a_*(\nu) = \frac{\nu+1}{2}N(\nu)+\frac{1}{2}\ln|\nu+1+N(\nu)|+1, \quad \kappa = 8 \tag{7.3}$$

$$H^0(\nu) = N(\nu) \equiv \sqrt{\nu^2+2\nu+2}, \quad \Phi_0 = 4, \quad R_* = 3$$

невязкой идеально проводящей несжимаемой однородной по плотности жидкости в пределах той же бесконечной полосы (7.2).

Данное течение также является одним из представителей течений, соответствующих стационарным решениям (1.22) (а вместе с ними, естественно, и точным стационарным решениям (3.8)). Для него функция $F(a_*)$ предстает в виде

$$F(\nu) = -\nu^2/2+4\nu+21/2$$

в результате чего обращаются в тождества соотношения

$$dF/d\nu = 4-\nu, \quad 4F(0) = 3F(1)$$

которые следуют в рассматриваемом случае из связей (4.3).

Кроме того, для течения (7.2), (7.3)

$$\chi - w^{02} = 2(5\nu-22)$$

т.е. неравенство (6.1) выполняется при любых $\nu \in [0, 1]$.

В итоге, течение (7.2), (7.3) будет неустойчиво, к примеру, по отношению к МОДВВ (5.1)–(5.4) с начальными данными $\xi_0(\nu, z)$ и $u_0'(\nu, z)$ в форме

$$\xi_0(\nu, z) = \sin\frac{2\pi z}{l}+\nu, \quad u_0'(\nu, z) = 0 \tag{7.4}$$

где l – некоторая положительная постоянная величина.

Действительно, используя соотношения (5.2), (5.6), (5.7), (6.2) и (6.3), а также учитывая периодичность функции $\xi_0(\nu, z)$ (7.4) по независимой переменной z, нетрудно установить, что

$$\Pi_1(0) = \frac{4\pi^2}{l^2}\int_0^l\int_0^1\left[(5\nu-22)\cos^2\frac{2\pi z}{l}\right]d\nu dz = -\frac{39\pi^2}{l} < 0$$

$$T_2(0)-T_1(0)+\Pi_1(0) = \frac{4\pi^2}{l^2}\int_0^l\int_0^1\left[(\nu^2-3\nu-6)\cos^2\frac{2\pi z}{l}\right]d\nu dz = -\frac{86\pi^2}{3l} < 0$$

откуда вытекает справедливость неравенств (6.2). Это, в свою очередь, позволяет прийти к заключению, что течение (7.2), (7.3) неустойчиво к МОДВВ (5.1)–(5.4), (7.4); с течением времени они будут развиваться согласно оценкам (6.7) и (6.9) (только в последней нужно вместо параметра Λ^+ (6.4), (6.8) подставить величину Λ (6.4)), тогда как их скорость нарастания ω (6.10) будет определяться при помощи параметра Λ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00614).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губарев Ю.Г., Никулин В.В.* Линейная длинноволновая неустойчивость одного класса стационарных струйных течений идеальной жидкости в поле собственного электрического тока // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 64–75.
2. *Половин Р.В., Демуцкий В.П.* Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. *Захаров В.Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 2. С. 15–24.
6. *Губарев Ю.Г.* К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова–Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 1995. Вып. 110. С. 78–90.
7. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
8. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven; London: Univ. Press, 1969 = *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
9. *Губарев Ю.Г.* К неустойчивости вращательно-симметричных МГД-течений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 19–25.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

Новосибирск
e-mail: gubarev@hydro.nsc.ru
nikulin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
5.XI.2002