

УДК 532.546

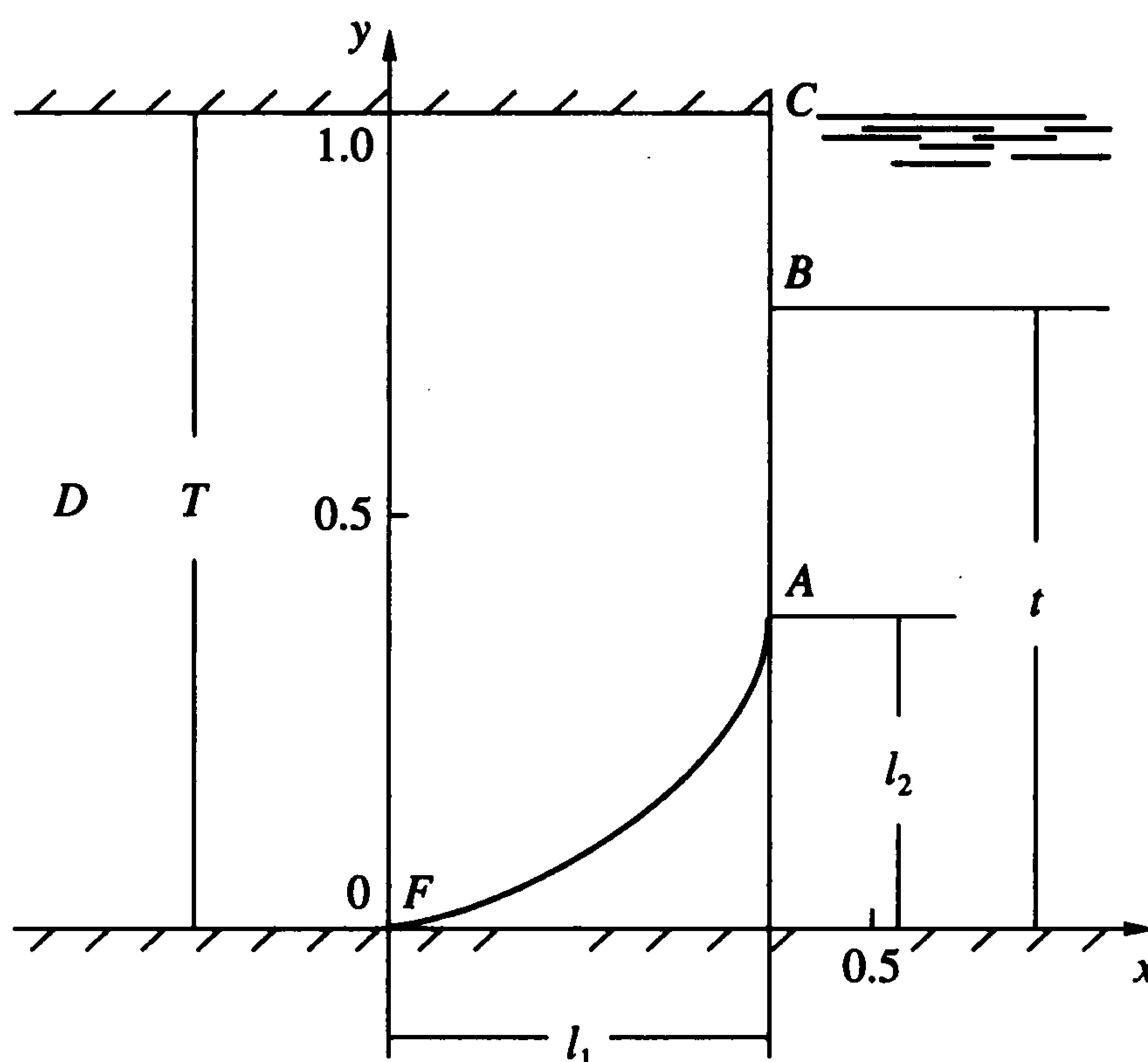
© 2003 г. Э. Н. Береславский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТЖИМА ПОТОКА В НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДОНОСНЫХ СЛОЯХ

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации рассматриваются математические модели некоторых течений пресных грунтовых вод в полубесконечном напорном водоносном слое к морю (бассейну, резервуару, котловану и т.п.) с соленой водой, над поверхностью которого находится слой пресной воды. Для их изучения формулируются и с применением метода П.Я. Полубариновой-Кочиной решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета отжима (т.е. процесса вытеснения фильтрующихся пресных вод более тяжелыми солеными, приводящего к деформации границы раздела жидкостей) в случаях, когда потоки грунтовых вод поступают в море сбоку или снизу. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов приводится детальный анализ структуры и характерных особенностей моделируемых процессов, а также влияния всех физических характеристик моделей на характер и степень отжима. В частном случае, когда отсутствует слой пресной воды над поверхностью моря, дается сопоставление результатов расчета для обеих схем притока и обсуждается характер зависимостей степени отжима от первоначального положения контакта жидкостей.

Обычно в задачах фильтрации пресных и соленых вод в линзах и каймах, а также под гидротехническими сооружениями [1–7] движение пресной воды рассматривается в пластах, нижняя часть которых занята более тяжелой соленой покоящейся водой, невозмущенная поверхность которой всегда горизонтальна. Для этих задач характерно также наличие горизонтальных водопроницаемых участков в виде границ каналов, водоемов, бьефов, дрен и т.д. Подобная ситуация наблюдается и в задачах течения в прибрежных напорных водоносных горизонтах [8–16], когда потоки грунтовых вод поступают в море снизу, причем очертание дна моря также всегда принимается горизонтальным.

Примером задачи, не укладывающейся в существующую классификацию [5, 6], является задача [17] о притоке пресных грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с соленой водой. В этом случае исходное положение контакта пресной и соленой воды предполагается вертикальным; кроме того, в области течения содержатся вертикальные эквипотенциали и промежутки высачивания, что в совокупности не совсем характерно для задач подземной гидромеханики. Последнее приводит к тому, что в плоскости годографа скорости соответствующие участки границы не имеют общей точки пересечения. Поэтому в применении к подобным задачам методы, основанные на использовании формулы Кристоффеля–Шварца, оказываются непригодными. Более того, эта область годографа скорости, как показывает анализ [1–6] всевозможных схем, присущих теории фильтрации, встречается лишь в одном случае – в классической задаче о фильтрации через прямоугольную перемычку [1, 3, 7, 18]. Для исследования последней П.Я. Полубаринова-Кочина разработала весьма общий и эффективный метод [1–7], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [19]. Решение задачи получается в виде интегралов от эллиптических интегралов [20, 21], часть из которых имеет логарифмические особенности вблизи каждой из особых точек, что создает известные дополнительные сложности вычислительно-



Фиг. 1

го характера. Поэтому, несмотря на кажущуюся простоту схемы течения в прибрежном водоносном слое с боковой разгрузкой, трудности решения задачи в полной мере аналогичны задаче о перемычке.

В предыдущих исследованиях [8–14, 17] анализ влияния параметров на картину течения по существу не проводился.

Ниже оба случая (бокового притока и притока снизу) исследуются с использованием метода П.Я. Полубариновой-Кочиной. Сначала решение задачи преобразуется к виду, удобному для вычислений. При этом на основе высказанных П.Я. Полубариновой-Кочиной соображений [3] доказывается сходимость всех полученных интегралов для геометрических размеров и параметров, характеризующих рассматриваемые фильтрационные потоки. Далее с помощью преобразованных формул и числовых расчетов анализируется влияние каждого физического параметра моделей на геометрические и фильтрационные характеристики, изучаются особенности и степень отжима, что в итоге и дает полную картину явлений. Наконец, в частном случае бокового притока, когда отсутствует слой пресной воды над поверхностью моря, результаты расчетов для обеих схем сопоставляются при одинаковых фильтрационных параметрах и обсуждается характер зависимостей степени отжима от исходного положения контакта жидкостей.

1. Схема бокового притока. Постановка задачи. Пресная вода плотности ρ_1 , движущаяся в полубесконечном напорном водоносном горизонтальном слое, который расположен на непроницаемом пласте каменной соли, отжимается в нижней части слоя более тяжелой покоящейся соленой водой плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). При этом в нижней правой части пласта первоначально вертикальная линия раздела между пресными и солеными водами начинает деформироваться, смещаясь влево навстречу потоку, образуя так называемый язык соленой воды. Через некоторое, достаточно большое время возможно установившееся движение, когда рассол успокаивается, линия раздела оказывается линией тока для пресной воды [1, 22] и возникает картина течения, представленная на фиг. 1. При интенсивной эксплуатации, когда может нарушиться динамическое равновесие между пресными и солеными водами, возникает угроза внедрения морской воды в водоносный пласт: язык соленой воды, двигаясь в сторону суши, может достигнуть водозабора. Поэтому определение положения границы раздела представляет большой практический интерес.

Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $k = \text{const}$ и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность водоносного слоя T , уровень соленой воды в море t ($0 < t \leq T$), фильтрационный расход Q и параметр $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$ считаются заданными. Как это принято в задачах подобного рода [1–14, 17], влиянием капиллярных и диффузионных явлений на границе жидкостей пренебрегаем.

Введем комплексный потенциал течения $w = \varphi + i\psi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kT и T . Требуется определить положение линии раздела AF области фильтрации z и пару гармонических функций φ и ψ , сопряженных внутри этой области, так, чтобы вдоль участков ее границы выполнялись следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} AB: x = l_1, \quad \varphi = \rho(y-t); \quad BC: x = l_1, \quad \varphi = 0; \quad CD: y = T, \quad \psi = Q \\ DF: y = 0, \quad \psi = 0; \quad AF: \psi = 0, \quad \varphi = \rho(y-T) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь l_1 и l_2 – искомые ширина и высота языка соленой воды, вторгшегося в пресноводный пласт.

2. Построение решения. Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей граничным условиям (1.1), которая изображена на фиг. 2, а.

Эта область, представляющая собой круговой треугольник, все углы которого равны нулю (модулярный треугольник), имеет большое значение в теории автоморфных функций [23, 24]. В теории фильтрации модулярный треугольник характерен только для задачи о прямоугольной земляной перемычке, решение которой было получено сначала [25, 26] как решение задачи Дирихле, а затем – более простым путем П.Я. Полубариновой-Кочиной [1, 3, 18]. С вычислительной точки зрения, рассматриваемый ниже случай вполне аналогичен задаче о фильтрации через бесконечно широкую перемычку ([1], с. 78; [3], с. 276). Подчеркнем, что в применении к подобным областям методы конформных отображений, основанные на формуле Кристоффеля–Шварца, непригодны.

Для решения задачи используем метод П.Я. Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость ζ на область z (соответствие точек указано на фиг. 2, б), комплексная скорость $w = d\omega/dz$, а также

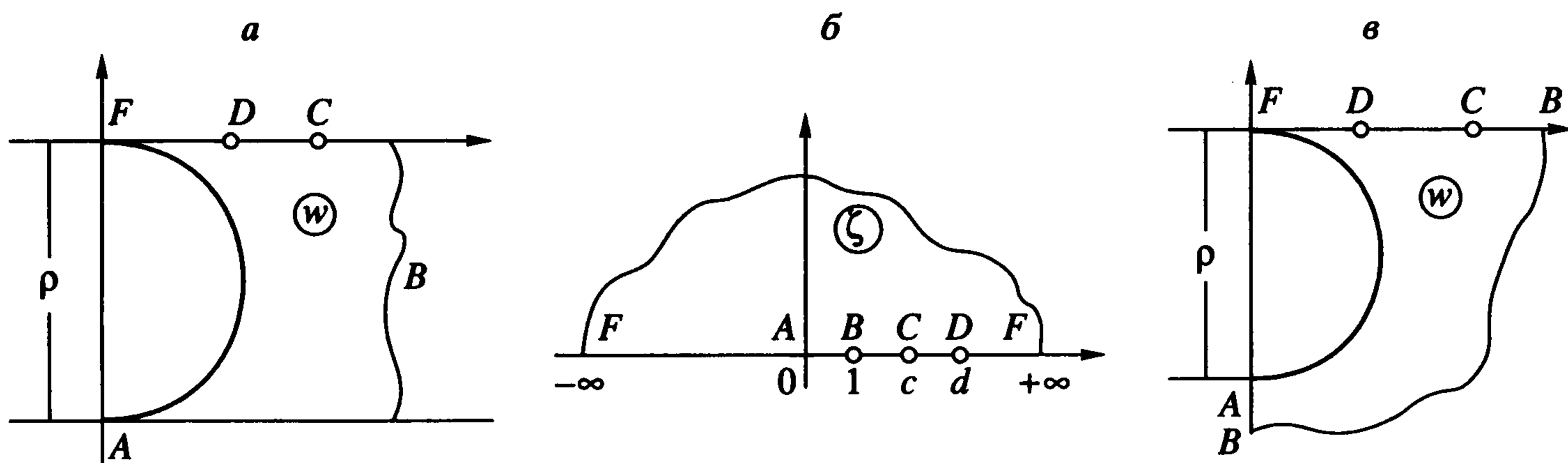
$$Z = dz/d\zeta, \quad F = d\omega/d\zeta \quad (2.1)$$

Определяя показатели функций Z и F около особых точек [6, 8], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [8, 9]:

$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & d & \infty \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 2 & \zeta \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 2 & \end{bmatrix} = \frac{1}{(d-\zeta)\sqrt{c-\zeta}} P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 & \zeta \\ 0 & 0 & 1/2 & \end{bmatrix} = \frac{Y}{(d-\zeta)\sqrt{c-\zeta}} \quad (2.2)$$

Из соотношения (2.2) видно, что $\zeta = c$ и $\zeta = d$ – обыкновенные точки для функции Y , поэтому соответствующее символу Римана (2.2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + (1-2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Как известно [8, 10], уравнение (2.3) имеет два линейно независимых интеграла

$$Y_1(\zeta) = K(\zeta), \quad Y_2(\zeta) = K'(\zeta) \quad (2.4)$$

образующих фундаментальную систему решений в окрестности точки $\zeta = 0$. Здесь $K(\zeta)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, рассматриваемый как функция квадрата модуля $k^2 = \zeta$, $K'(\zeta) = (1 - \zeta) = K(k^2)$, $k^2 = 1 - \zeta$. Отметим, что $K'(\zeta)$ является решением, содержащим логарифмическую особенность в точке $\zeta = 0$, вблизи которой асимптотическое представление имеет вид [27]

$$K'(\zeta) = -\frac{1}{2} \ln \zeta \quad (2.5)$$

Функция, совершающая конформное отображение верхней полуплоскости ζ на область комплексной скорости w , должна выражаться через отношение линейных комбинаций решений Y_1 и Y_2 . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек A, B и D на плоскостях ζ и w , то получим

$$w = \rho(K(\zeta) - iK'(\zeta))/K'(\zeta) \quad (2.6)$$

Принимая во внимание соотношение (2.2) и учитывая выражение (2.6), найдем

$$F = iA\rho(K(\zeta) - iK'(\zeta))/\Delta(\zeta), \quad Z = iAK'(\zeta)/(\Delta(\zeta)), \quad \Delta(\zeta) = (d - \zeta)(\sqrt{c - \zeta}) \quad (2.7)$$

где $A > 0$ – неизвестная постоянная. Можно проверить, что функции (2.1), определенные на основании соотношений (2.7), удовлетворяют граничным условиям (1.1), сформулированным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (2.7) для различных участков границы области ζ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию контура области движения z и тем самым служит контролем вычислений. В результате получаем выражения

$$T = \frac{A\pi K'(1/d)}{\sqrt{d(d-c)}}, \quad Q = \frac{A\rho\pi K(1/d)}{\sqrt{d(d-c)}} \quad (2.8)$$

$$T - t = A \int_1^c \frac{K((\zeta - 1)/\zeta)}{\sqrt{\zeta}\Delta(\zeta)} d\zeta \quad (2.9)$$

и координаты точек линии раздела AF

$$x(\zeta) = A \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(\zeta/(\zeta - 1))}{\Delta(\zeta)} d\zeta, \quad y(\zeta) = A \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(1/(1 - \zeta))}{\Delta(\zeta)} d\zeta, \quad -\infty \leq \zeta \leq 0 \quad (2.10)$$

Полагая в уравнениях (2.10) для координат точек линии раздела AF $\zeta = 0$, найдем искомые размеры языка

$$l_1 = x(0), \quad l_2 = y(0) \quad (2.11)$$

а также расход через участок BC

$$Q_{BC} = Q - A\rho \int_1^c \frac{K(1/\zeta)}{(d-\zeta)\sqrt{\zeta(c-\zeta)}} d\zeta \quad (2.12)$$

Контролем счета являются другие выражения для величин Q_{BC} и l_2 :

$$Q_{BC} = A\rho \int_0^1 \frac{K(\zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta, \quad l_2 = t - A \int_0^1 \frac{K'(\zeta)}{\Delta(\zeta)} d\zeta \quad (2.13)$$

3. Преобразование формул к виду, удобному для вычислений. Представления (2.8)–(2.13) содержат три неизвестные постоянные: A , c ($1 < c < \infty$) и d ($c < d < \infty$). Для определения параметра отображения d служит отношение Q/T : из выражений (2.8) получаем

$$K(1/d)/K'(1/d) = Q(\rho T) \quad (3.1)$$

Параметр c находится из уравнения (2.9). Постоянная A при этом предварительно исключается из всех уравнений (2.9)–(2.13) посредством первого из соотношений (2.8), фиксирующего мощность T водоносного слоя. Соотношение (3.1) регламентирует задание физических параметров Q , T и ρ и, следовательно, область применимости принятой схемы течения.

В результате исследования системы уравнений (2.8), (2.9) с использованием свойств эллиптических интегралов устанавливается, что при заданном значении толщины слоя t (а тем самым, и параметра отображения c) и фиксировании двух из трех величин: Q , T и ρ – модуль эллиптических интегралов однозначно определяется из уравнения (3.1). Третий физический параметр оказывается при этом “плавающим”: диапазон его изменения определяется опять же, исходя из уравнения (3.1), с учетом значений Q_* , T_* и ρ_* , соответствующих случаям $k^2 \approx 0$ и $k^2 \approx 1$. Кроме того, при фиксированном значении расхода Q с уменьшением плотности ρ и увеличением мощности T в одинаковое число раз степень отжима возрастает в то же число раз. Такое поведение, совершенно естественное с физической точки зрения, вытекает непосредственно из соотношения (3.1) и формул (2.10): в этом случае правая часть уравнения (3.1) и левые части уравнений (2.8) не изменяются, а следовательно, остаются прежними и неизвестные постоянные A и d . Подобный анализ допустим в случаях, когда один из трех параметров: Q , ρ или T – фиксируется, а два других варьируются таким образом, чтобы отношение $Q/(\rho T)$ не изменялось. Это обстоятельство значительно расширяет диапазон изменения входных параметров модели.

Основная вычислительная сложность задачи заключается в том, что подынтегральные функции, входящие в соотношения (2.9)–(2.13), имеют, как уже упоминалось, логарифмические особенности в окрестности точки $\zeta = 0$ и, кроме того, они бесконечны на пределах интегрирования. Что касается точки $\zeta = c$ и $\zeta = d$, то из соотношений (2.9)–(2.13) видно, что в этой точке все интегралы являются сходящимися. Далее, из представления (2.5) следует конечность значений l_1 и l_2 , а также выражений (2.12) и (2.13) для расхода.

Для удобства вычислений введем обозначения $\alpha = 1/d$ и $\beta = 1/c$ ($0 < \alpha < \beta \leq 1$) и, следуя П.Я. Полубариновой-Кочиной ([3], с. 278), заменим ζ соответствующими выраже-

ниями для различных интервалов, делаящими подынтегральные функции в выражениях (2.9)–(2.13) конечными на пределах интегрирования, а именно: положим

$$\zeta = \sin^2 t \text{ при } 0 < \zeta < 1; \quad \zeta = 1 - 1/\tau, \quad \tau = \sin^2 t \text{ при } -\infty < \zeta < 0$$

$$\zeta = 1/\tau, \quad \tau = \beta + (1 - \beta)\sin^2 t \text{ при } 1 < \zeta < c$$

В результате приходим к следующим расчетным зависимостям:

$$T = \frac{A\pi K(\alpha)}{2\sqrt{\beta - \alpha}}, \quad Q = \frac{A\rho\pi K(\alpha)}{2\sqrt{\beta - \alpha}}$$

$$T - t = A\sqrt{\beta_1} \int_0^{\pi/2} \frac{K(\beta_1 \cos^2 t) \cos t}{\beta - \alpha + \beta_1 \sin^2 t} dt$$

$$x(t) = I_s(t; \alpha_1, \beta_1), \quad y(t) = I_c(t; \alpha_1, \beta_1), \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$l_1 = x(\pi/2), \quad l_2 = y(\pi/2)$$

$$Q_{BC} = Q - A\rho\sqrt{\beta_1} \int_0^{\pi/2} \frac{K(\beta + \beta_1 \sin^2 t) \cos t}{\beta - \alpha + \beta_1 \sin^2 t} dt$$

$$Q_{BC} = \rho I_s(\pi/2; \alpha, \beta), \quad l_2 = t - I_c(\pi/2; \alpha, \beta)$$

Здесь

$$\alpha_1 = 1 - \alpha, \quad \beta_1 = 1 - \beta$$

$$I_s(t; \alpha, \beta) = A \int_0^t \frac{K(\sin^2 t) \sin t \cos t}{(1 - \alpha \sin^2 t) \sqrt{1 - \beta \sin^2 t}} dt,$$

$$I_c(t; \alpha, \beta) = A \int_0^1 \frac{K(\cos^2 t) \sin t \cos t}{(1 - \alpha \sin^2 t) \sqrt{1 - \beta \sin^2 t}} dt$$

Для вычисления интегралов можно, разлагая подынтегральные выражения в ряды по степеням малых параметров α и β , воспользоваться известными формулами [27]

$$\int_0^{\pi/2} K(\sin^2 t) \sin t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} K(\cos^2 t) \sin t dt = 2G$$

где $G = 0.915966$ – постоянная Каталана.

4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов. На фиг. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $T = 1$, $\rho = 0.0105$, $Q = 0.009$ и $t = 0.7623$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ρ , Q , T и t на величины l_1 и l_2 и расход Q_{BC} приведены в табл. 1 и 2. В каждом из трех блоков таблиц (они разделены вертикальными линиями) варьируется (в допустимом диапазоне) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются (базовый вариант): $T = 1$, $\rho = 0.0105$, $Q = 0.009$ и $t = 0.7623$. На фиг. 3–6 сплошными линиями представлены зависимости величин l_1 (кривые 1) и l_2 (кривые 2) от ρ , T , Q и t , штриховые линии соот-

Таблица 1

$\rho \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q_{BC} \cdot 10^4$	$T \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q_{BC} \cdot 10^4$
65	859	832	71	605	368	367	76
70	1444	1386	61	679	1041	997	60
101	3900	3465	44	997	4106	3615	44
165	8100	5802	39	1662	14352	9982	39
321	17268	7824	38	3268	60405	26012	37

Таблица 2

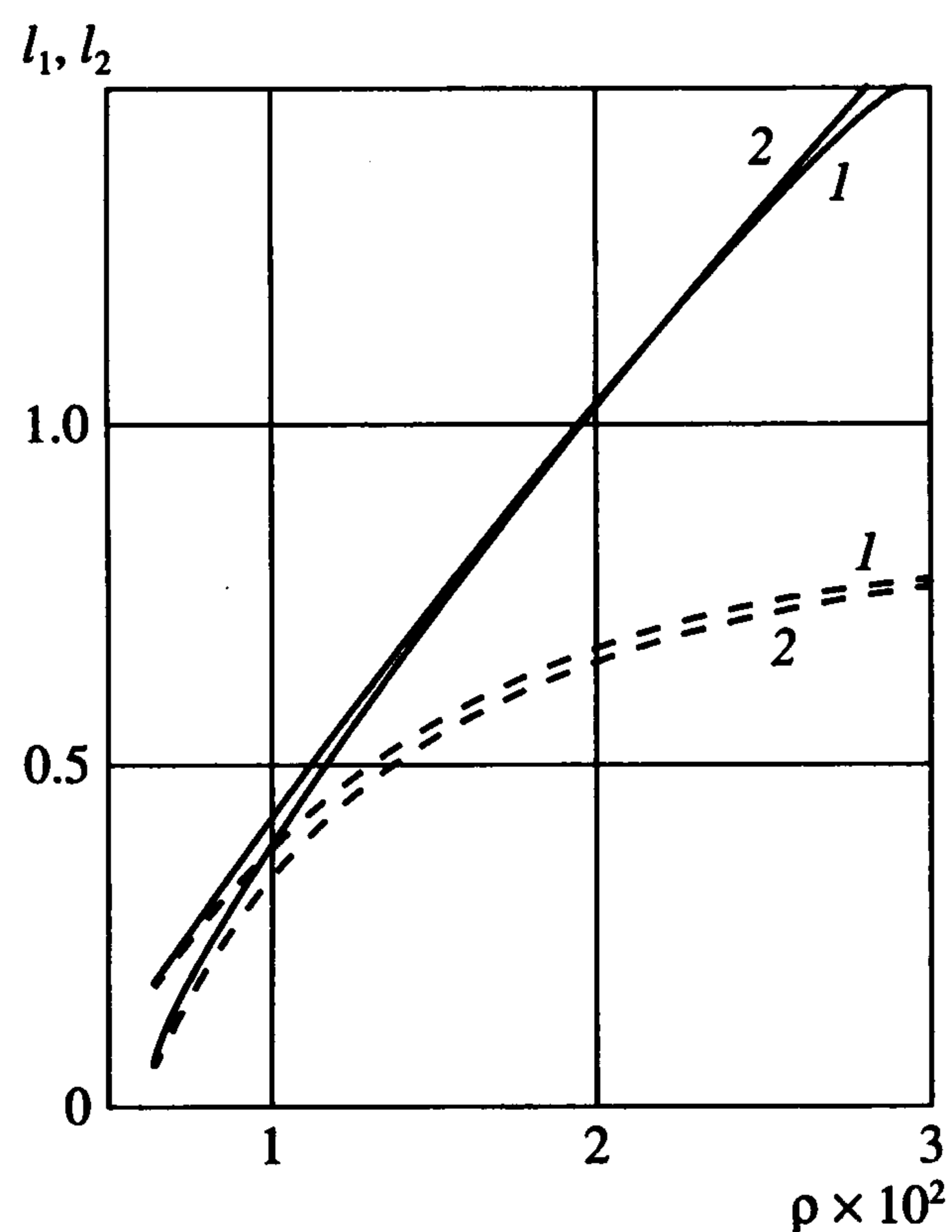
$Q \cdot 10^4$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q_{BC} \cdot 10^4$	$t \cdot 10^3$	$l_1 \cdot 10^4$	$l_2 \cdot 10^4$	$Q_{BC} \cdot 10^4$
28	17974	7905	12	345	2513	2094	75
46	10445	6581	20	550	3671	3122	63
87	4401	3825	41	762	4455	3863	45
130	1666	1593	85	942	4747	4151	19
152	211	206	143	1000	4766	4170	0

ветствуют частному случаю $t = T$, когда отсутствует слой пресной воды над морской поверхностью.

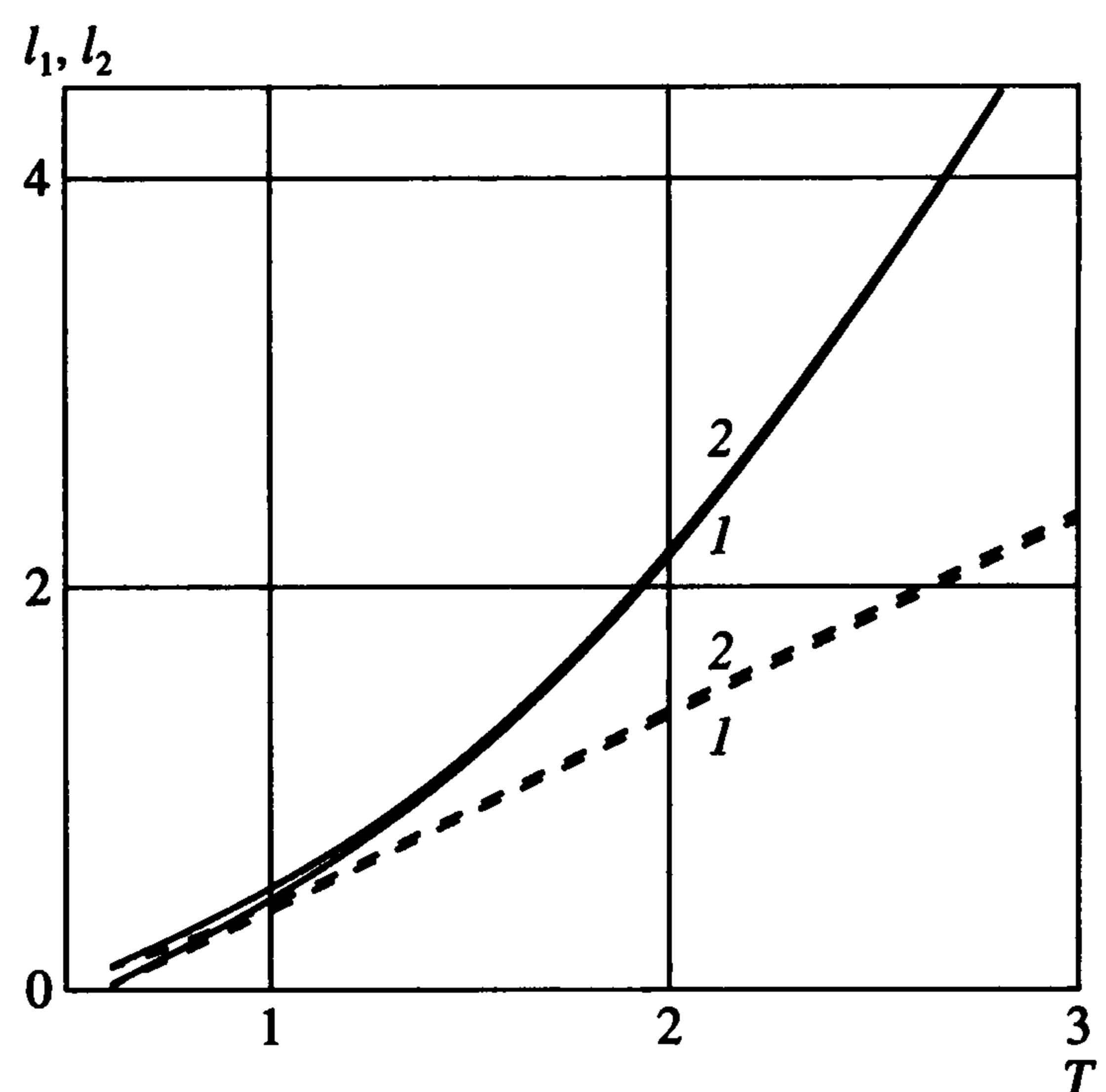
Анализ данных таблиц и графиков приводит к следующим выводам.

Увеличение мощности водоносного слоя, толщины слоя соленой воды, плотности соленых вод и уменьшение расхода увеличивают степень отжима.

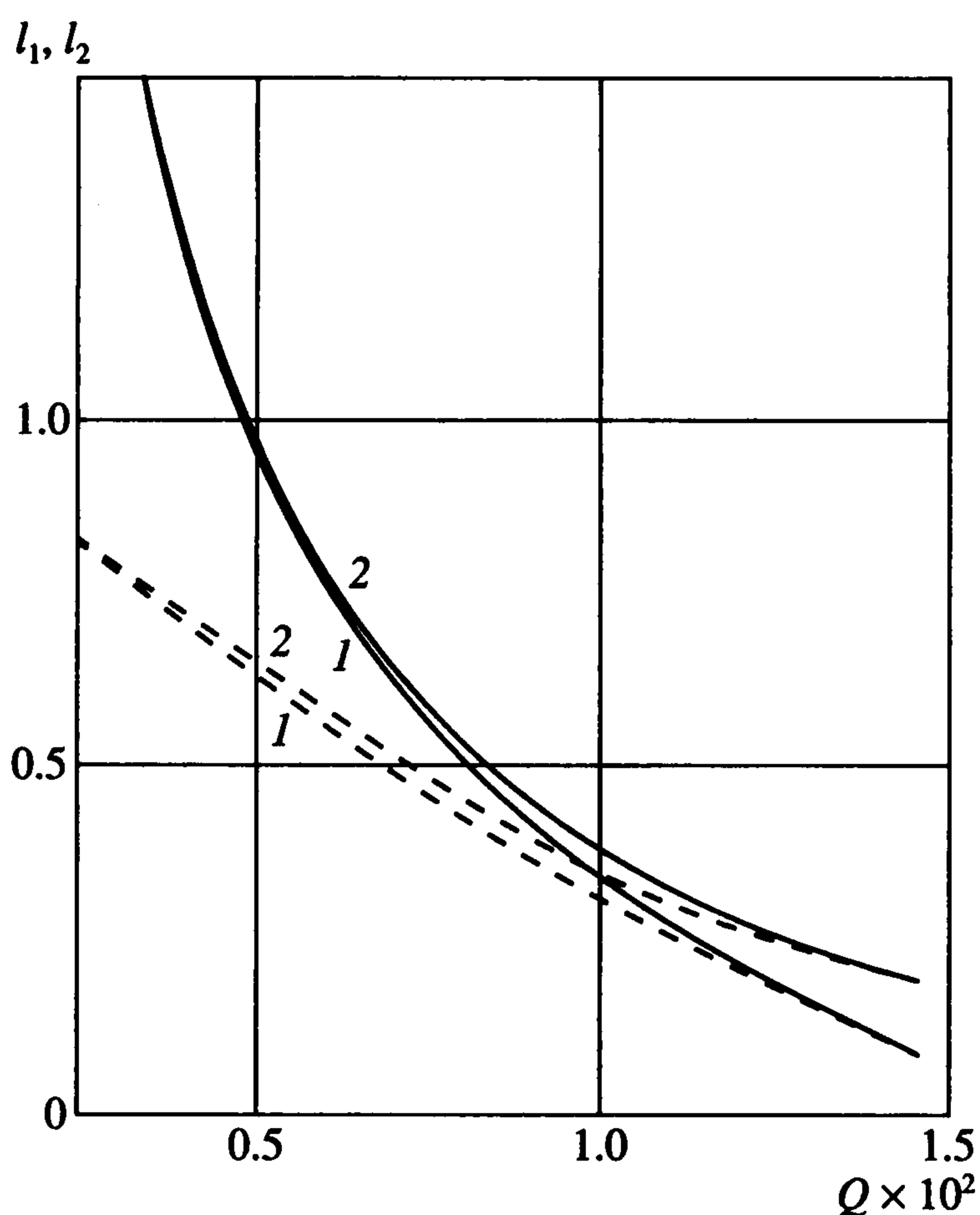
Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимости величин l_1 и l_2 от параметров ρ , T и t : увеличение плотности ρ_2 соленых вод, мощности напорного слоя T и толщины слоя соленой воды t приводит к росту размеров языка соленой воды. Так, при увеличении параметра ρ в 4.9 раза величины l_1 и l_2 возрастают в 20.1 и 9.4 раза соответственно. Напротив, увеличение расхода Q в 5.4 раза приводит к уменьшению l_1 и l_2 соответственно в 85.2 и 38.4 раза.



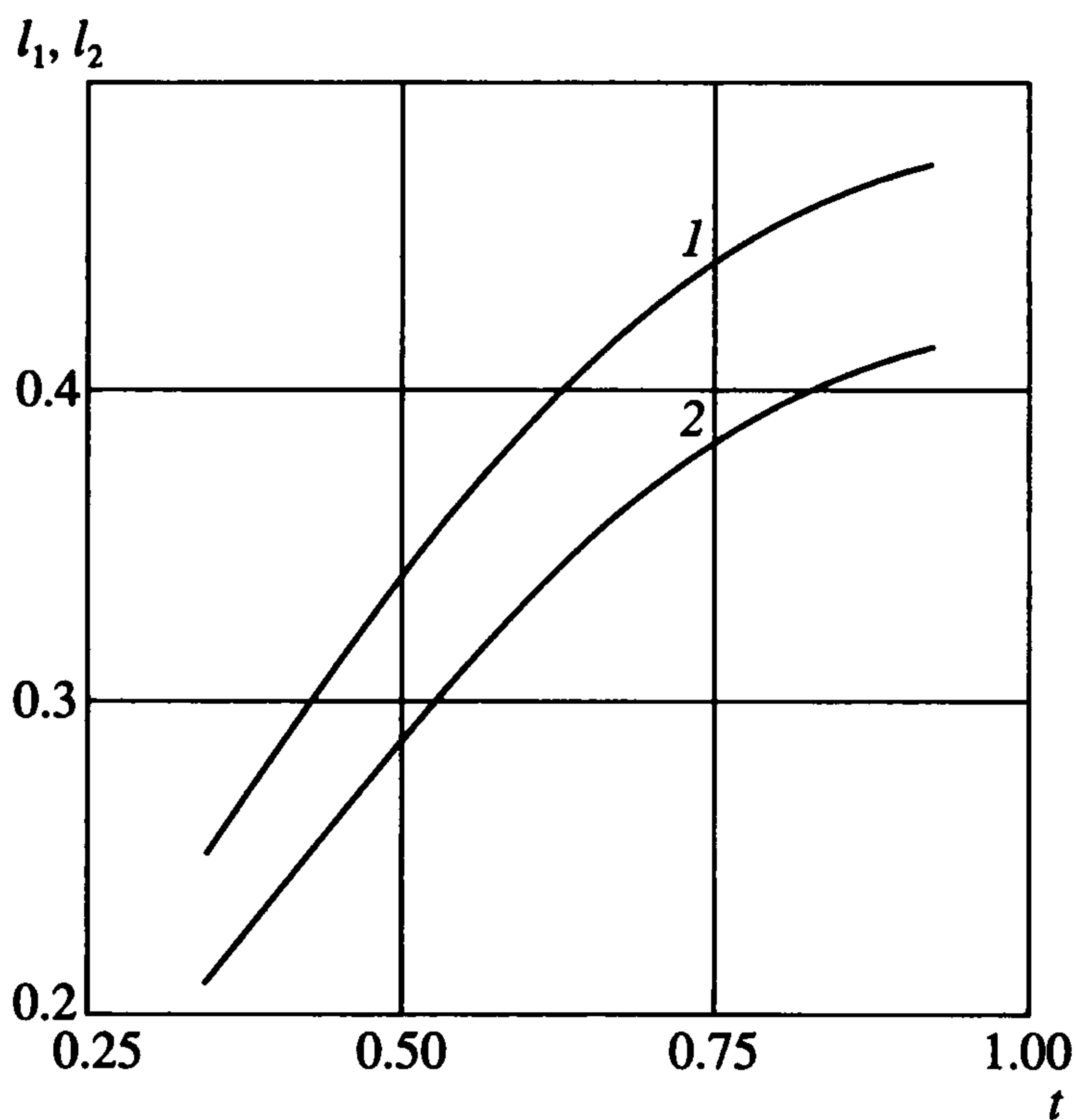
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Наиболее существенное влияние на степень отжима оказывает мощность водоносного пласта. Видно, что при возрастании T в 5.4 раза величины l_1 и l_2 возрастают соответственно в 164 и 73 раза. Высота языка при этом может достигать 80% от мощности слоя.

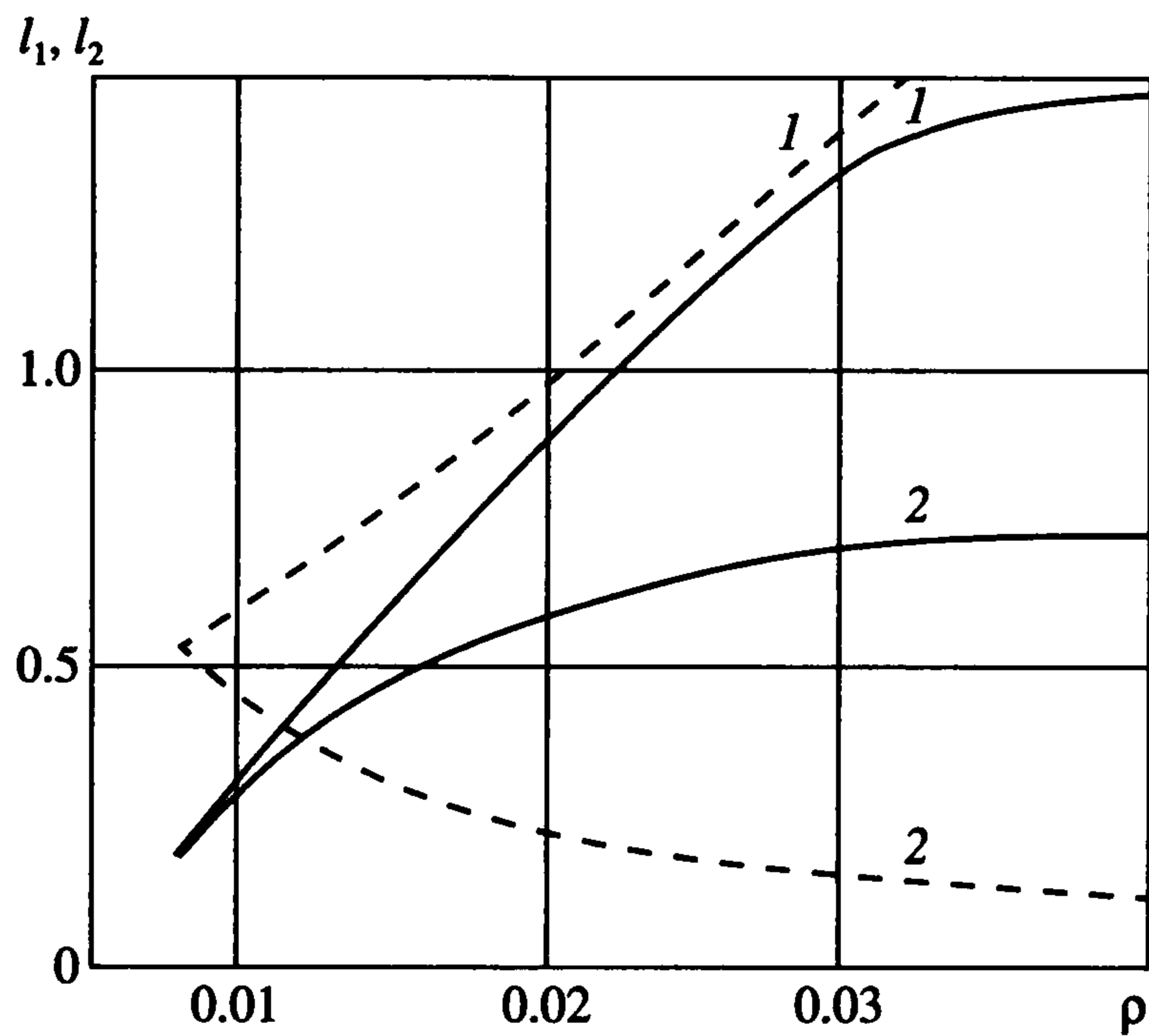
Для всех блоков таблиц примечательно, что в случае малых значений параметров ρ и T и больших значений Q выполняется приближенное равенство $l_1 \approx l_2$. И наоборот, для больших значений ρ и T и малых Q имеем $l_1 \approx 2.2l_2$.

Особый интерес представляет поведение размеров языка в зависимости от толщины слоя соленой воды в море. Из графика фиг. 6 видно, что зависимости l_1 и l_2 от t качественно подобны, причем при фиксированном значении t ширина языка всегда превосходит его высоту на 14–20%.

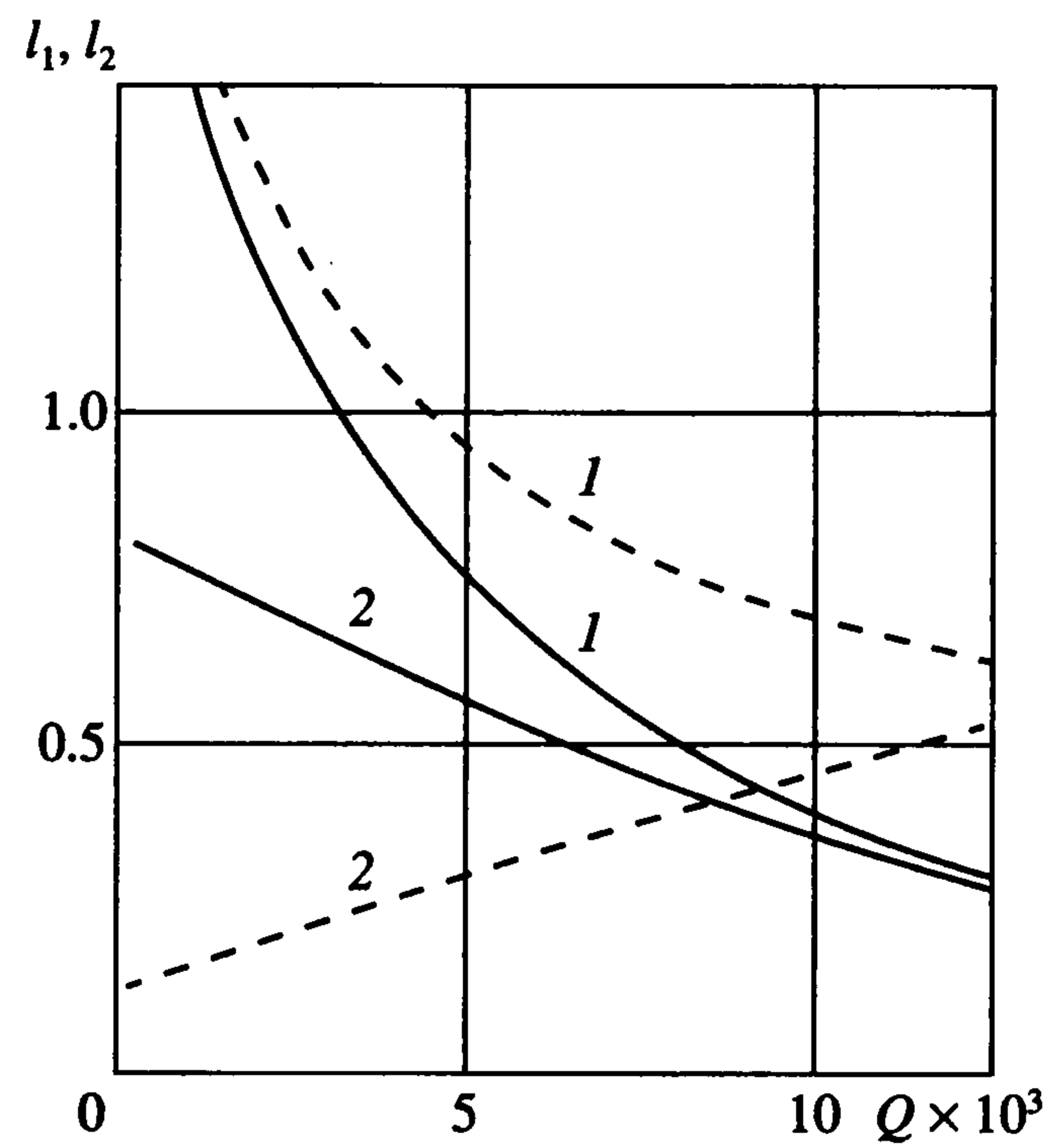
С увеличением параметров ρ , T и t расход через отрезок BC уменьшается. При этом, если с варьированием параметров ρ и T расход Q_{BC} изменяется лишь вдвое, то увеличение уровня соленой воды приводит почти к 19-кратному его уменьшению. Напротив, увеличение расхода Q ведет к существенному увеличению и расхода Q_{BC} , что совершенно естественно с физической точки зрения. Так, при изменении параметра Q от 0.0028 до 0.0152 расход Q_{BC} увеличивается почти в 12 раз, при этом отношение Q_{BC}/Q возрастает с 0.43 до 0.94.

5. Частный случай. При слиянии точек B и C в плоскостях z и ζ , что соответствует значениям параметров $t = T$ и $c = 1$, имеем схему течения при отсутствии слоя пресной воды над поверхностью моря. Результаты для этого случая получаются из формул (3.2) при $\beta = 1$, $\beta_1 = 0$. При этом уравнение (2.9) превращается в тождество, а из уравнений (2.12) и (2.13) следует, что $Q_{BC} = Q$.

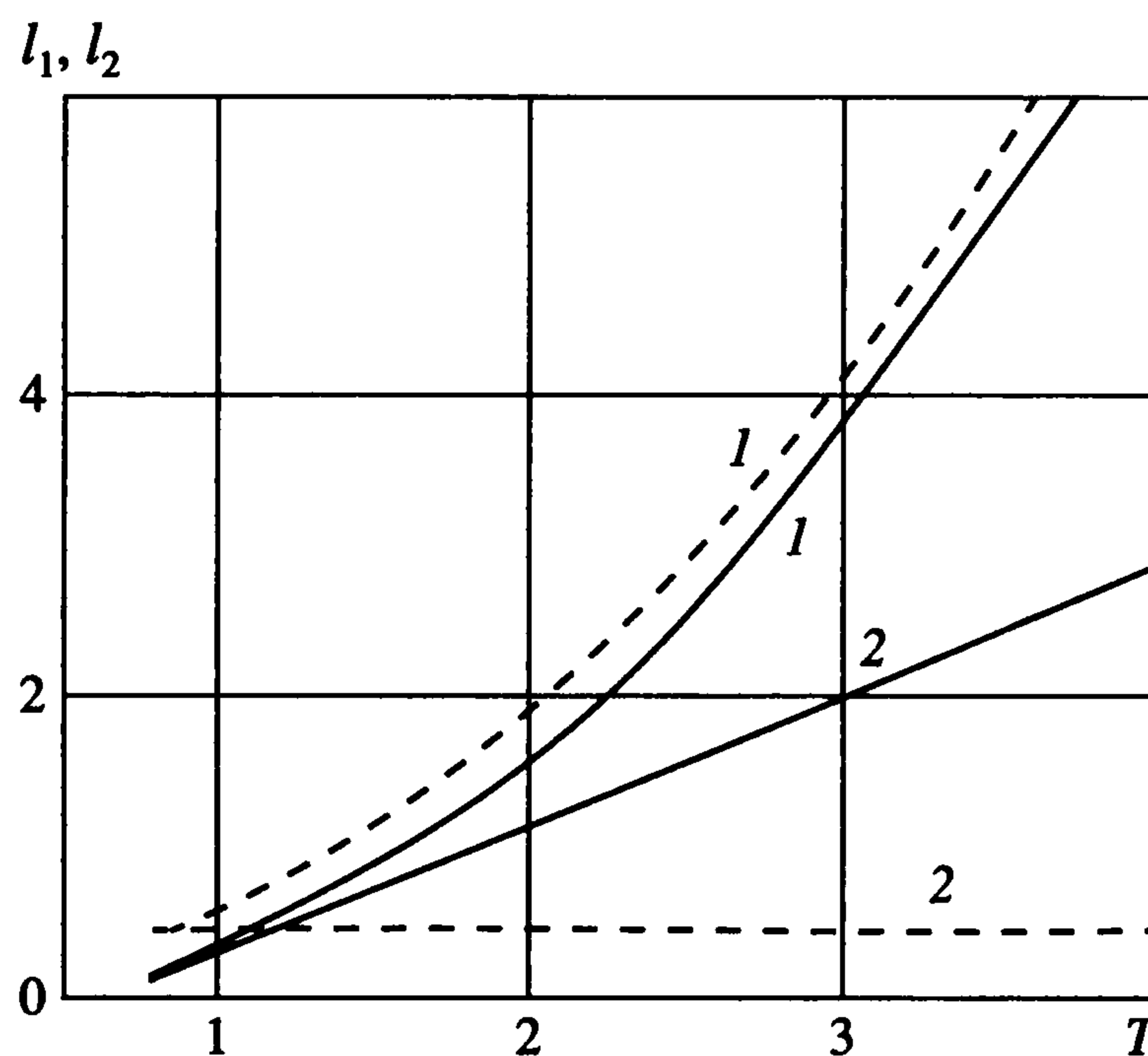
На фиг. 7 изображена картина течения, рассчитанная при $T = 1$, $Q = 0.01$ и $\rho = 0.01$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ρ , Q , T на раз-



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Искомые функции Z и F определяются следующим символом Римана:

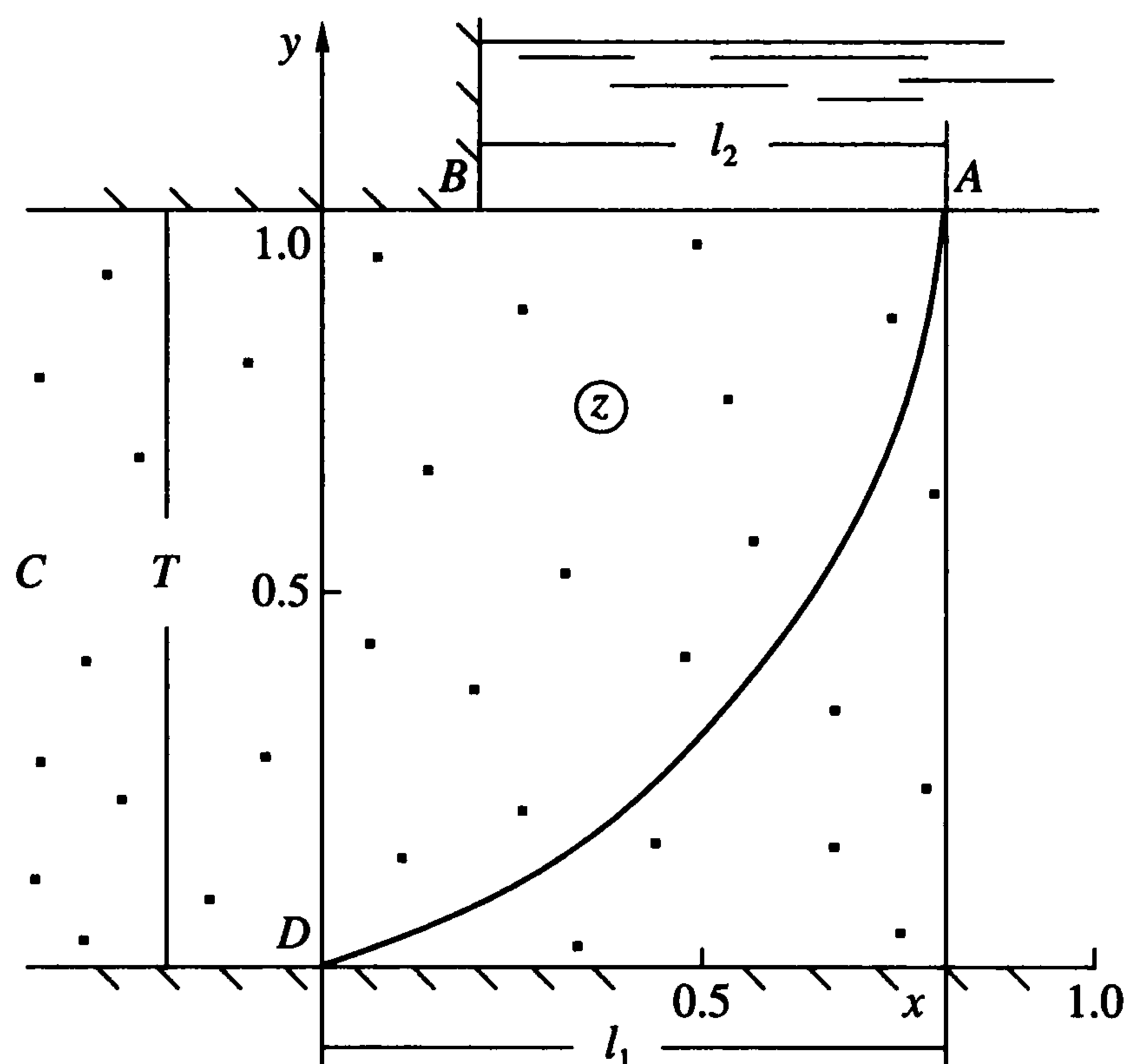
$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & \infty \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} P \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{Y}{(c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \quad (6.1)$$

Соответствующее (6.1) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)Y' = 0$$

имеет два линейно независимых интеграла

$$Y_1 = \text{const}, \quad Y_2 = \arcsin \sqrt{1-\zeta}$$



Фиг. 11

Конформное отображение верхней полуплоскости вспомогательной параметрической переменной ζ (фиг. 2, б) на область комплексной скорости (фиг. 2, в) имеет вид

$$w = \frac{i\pi\rho}{2 \arcsin \sqrt{1-\zeta}} \quad (6.2)$$

Принимая во внимание соотношение (6.1) и учитывая выражение (6.2), найдем

$$F = \frac{iA}{\Delta(\zeta)}, \quad Z = \frac{2A \arcsin \sqrt{1-\zeta}}{\pi\rho \Delta(\zeta)}, \quad \Delta(\zeta) = (c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}, \quad A > 0 \quad (6.3)$$

Выражения для определяющих параметров модели, соответствующие выражениям (2.8) и (2.10), принимают вид

$$T = \frac{2A \ln(\sqrt{c} + \sqrt{c-1})}{\rho\sqrt{c(c-1)}}, \quad Q = \frac{\pi A}{\sqrt{c(c-1)}} \quad (6.4)$$

а координаты точек раздела AD ($-\infty \leq \zeta \leq 0$)

$$x(\zeta) = \frac{2A}{\pi\rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\ln(\sqrt{-\zeta} + \sqrt{1-\zeta})}{\Delta(\zeta)} d\zeta, \quad y(\zeta) = \frac{A}{\rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)} \quad (6.5)$$

В отличие от предыдущей схемы и формул (2.8) в данном случае формулы (6.4) позволяют выразить неизвестные постоянные через определяющие параметры модели в явном виде

$$\alpha = \operatorname{ch}^{-2} \frac{\pi\rho T}{Q}, \quad A = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi\rho T}{Q} \quad (6.6)$$

Преобразуя формулы (6.5) аналогично тому, как это сделано в разд. 3, приходим к следующим расчетным зависимостям, соответствующим формулам (3.2):

$$x(t) = \frac{4A\alpha}{\rho} \int_t^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 - \alpha_1 \sin^2 t} \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} dt$$

$$y(t) = \frac{A\alpha}{\rho\sqrt{\alpha_1}} \ln \left(\exp\left(\frac{\pi\rho T}{Q}\right) \frac{1 - \sqrt{\alpha_1} \sin t}{1 + \sqrt{\alpha_1} \sin t} \right) \quad (6.7)$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha = \operatorname{th}^{-2} \frac{\pi\rho T}{2Q}$$

$$l_1 = x(0), \quad l_2 = \frac{4A\alpha}{\pi\rho} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{1 - \alpha \cos^2 t} dt = \frac{A}{\pi\rho\sqrt{\alpha^{-2} - 1}} \left[\frac{\pi^2}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha^{-1} - \sqrt{\alpha^{-2} - 1})^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right] \quad (6.8)$$

Здесь использован известный результат ([27], с. 451).

Отметим, что, поскольку в рассматриваемом случае в области комплексной скорости (фиг. 2, в) имеется общая точка пересечения граничных участков, формулы (6.7) и (6.8) можно получить и с помощью инверсии области w .

7. Анализ численных расчетов и сопоставление результатов для обеих схем. На фиг. 11 изображена картина течения, рассчитанная при тех же значениях параметров T , Q и ρ , что и фиг. 7. В табл. 3 (нижние строки) сведены результаты расчетов влияния определяющих физических характеристик ρ , Q и T на величины l_1 и l_2 (отрицательные значения l_2 , соответствующие схеме притока снизу, означают, что в плоскости течения точка B – левая граница дна моря – смещается влево от оси ординат). На фиг. 8–10 штриховыми линиями представлены зависимости степени отжима l_1 (кривые 1) и l_2 (кривые 2) от ρ , Q и T .

Анализ зависимостей искомых величин от указанных физических параметров сводится к следующему.

Так же как и в предыдущей задаче, увеличение мощности слоя приводит к увеличению языка. Примечательно, что зависимость ширины l_1 от T здесь качественно подобна случаю бокового притока (фиг. 10). Однако, по сравнению с первой схемой, коренным образом меняется характер зависимости величины l_2 при варьировании параметров ρ и Q : ее рост обусловлен теперь убыванием плотности соленых вод и увеличением расхода (фиг. 8 и 9).

Как и прежде, наиболее существенное влияние на ширину l_1 оказывает мощность слоя. Так, с увеличением T в 6.3 раза параметр l_1 увеличивается в 25 раз. Отношения $l_1^{(2)}/l_1^{(1)}$ и $l_2^{(2)}/l_2^{(1)}$, где верхний индекс указывает на вычисление по первой или второй схеме, для приводимых в таблице значений T изменяются соответственно в 2.5 и 25 раз.

Из графиков, приведенных на фиг. 9 и 10, видно, что зависимости l_2 от Q и T линейны: в рассматриваемых интервалах значений Q и T можно принять $l_2 \approx 0.32(Q - 0.09)$ и $l_2 \approx 0.48$.

При малых значениях ρ и T и больших Q величины l_1 и l_2 различаются всего на 2%, причем $l_1 < l_2$, т.е. абсцисса точки B в плоскости z смещается влево от оси ординат.

Напротив, при больших значениях параметров ρ и T и малых Q ширина l_1 превосходит величину l_2 уже в 18 раз, а при $Q = 0.002$ – даже в 25 раз.

Автор благодарит М.Г. Хубларяна за критические замечания и внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я., Фалькович С.В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах // ПММ. 1947. Т.11. Вып. 6. С. 629–674.

3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.
6. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. Т.2. М.: Наука, 1970. С. 585–648.
7. Кочина П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. М.: Наука, 1991. 351 с.
8. Bear J., Dagan G. The use of the hodograph method for ground water investigations. Haifa Technion: Israel Inst. of Technology. Fac. of Civil Eng. 1962. 47 p.
9. Bear J., Dagan G. The unsteady interface below a coastal collector. Haifa. Technion: Israel Inst. of Technology. Fac. of Civil Eng. 1964. 122 p.
10. Bear J., Dagan G. Some exact solutions of interface problems by means of the hodograph method // J. Geophys. Res. 1964. V. 69. № 8. P. 1563–1572.
11. De Josseli de Jong G. A many valued hodograph in an interface problem. Technische Hogeschool Delft. Afd. Weg-en Waterbouwkunde. 1964. 24 p.
12. Henry H.R. Salt intrusion into fresh water aquifers // J. Geophys. Res. 1959. V. 64. № 11. P. 1911–1919.
13. Van der Veer P. Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation // J. Hydrol. 1977. V. 34. № 1–2. P. 1–11.
14. Bear J., Zaslavsky D., Irmay S. Physical Principles of Water Percolation and Seepage. Paris: UNESCO, 1968 = Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
15. Фролов А.П., Хубларян М.Г. Проникновение соленой воды в пресноводные прибрежные горизонты // Вод. ресурсы. 1986. № 2. С. 58–63.
16. Хубларян М.Г., Фролов А.П. Моделирование процессов интрузии в эстуариях и подземных водоносных горизонтах М.: Наука, 1989. 143 с.
17. Михайлов Г.К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. С. 945–948.
18. Полубаринова-Кочина П.Я. Расчет фильтрации через земляную перемычку // ПММ. 1940. Т. 4. № 1. С. 53–64.
19. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
20. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927 = Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
21. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1955 = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
22. Полубаринова-Кочина П.Я. О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101–104.
23. Форд Л.Р. Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
24. Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1961. 455 с.
25. Девисон Б.Б. Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины // Зап. Гос. гидрол. ин-та. 1932. Т. 6. С. 11–19.
26. Hamel G. Über Grunfwasserströmung // ZAMM. Bd 1934. Bd 14. H. 3. S. 129–157.
27. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.