

УДК: 533.6.011.5

© 2003 г. С. А. Таковицкий

ОСТРОКОНЕЧНЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ ГОЛОВНЫЕ ЧАСТИ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для осесимметричных головных частей в рамках уравнений Эйлера развит прямой метод построения остроконечных контуров, близких к оптимальным по волновому сопротивлению. Построенные этим методом контуры хорошо аппроксимирует двухпараметрическая степенная функция. Расчеты, выполненные с использованием предложенной аппроксимации, демонстрируют уменьшение волнового сопротивления построенных тел по сравнению с известными оптимальными затупленными однопараметрическими степенными головными частями.

Одна из классических задач сверхзвуковой аэродинамики – определение осесимметричных головных частей, обеспечивающих минимальное волновое сопротивление при заданных ограничениях по габаритам. Первые оптимальные головные части, определенные Ньютоном, характеризуются наличием переднего торца. Исследования в рамках законов сопротивления Ньютона и Буземана выявили, что передний торец является участком краевого экстремума [1]. В приближении формулы Ньютона–Буземана возникает другая особенность оптимального контура – его замыкающий участок, на котором давление газа равно нулю [2]. В рамках линейной теории решение этой же задачи получено Карманом [3]. Использование аналитических зависимостей, близких к получаемым по методу касательных конусов, для распределения давления на поверхности тела позволило определить головные части, для которых экспериментально подтверждено значительное уменьшение лобового сопротивления по сравнению с некоторыми остроконечными формами [4].

Аэродинамические формы, полученные при упрощенной постановке вариационной задачи, имеют участки, для которых распределение давления вычисляется с большой погрешностью. Тем не менее работоспособность приближенных законов для профилирования головных частей подтверждена исследованиями на основе точных методов расчета. Для однопараметрических степенных тел ($r \sim x^m$, где x отсчитывается вдоль оси симметрии от передней точки тела, а r – расстояние до оси) расчеты в рамках уравнений Эйлера показали, что оптимальное значение показателя степени m лежит в диапазоне от 0.60 до 0.75 [5]. Численные оптимизационные исследования связаны с большими затратами времени ЭВМ и проводятся с ограничением рассматриваемых конфигураций с целью уменьшения числа независимых параметров [6].

При решении задачи в рамках уравнений Эйлера установлено [7–12], что единственная заостренная осесимметричная головная часть, обтекаемая с присоединенным скачком – не представляющая интереса игла (отрезок оси симметрии). Отличные от иглы осесимметричные головные части, обтекаемые с присоединенным скачком конечной интенсивности – тела с протоком. Оптимальные осесимметричные головные части без протока обтекаются с отошедшим скачком. Это давало основание предположить, что они, как и в рамках приближенных моделей, имеют торец – участок краевого экстремума, появляющийся из-за ограничения, накладываемого на длину головной части. Последние исследования показывают [13], что это действительно так и дают большое количество примеров построения оптимальных головных частей, затупленных по торцу.

С ростом удлинения λ (отношения длины к диаметру основания) оптимальный размер торца быстро уменьшается [13]. Так, при $\lambda = 2$ и числах Маха $M = 3 \dots 10$ радиус торца составляет 0.08...0.06 радиуса основания, становясь еще меньше с ростом λ . Факт уменьшения относи-

тельных размеров переднего торца и его вклада в сопротивление тела при уменьшении толщины последнего свидетельствует о том, что остроконечные тела могут быть близкими по форме к оптимальным телам при достаточно больших удлинениях. Ниже на основе прямого метода оптимизации при большом числе геометрических параметров ($n = 350$) определена оптимальная форма образующей для тел с острой вершиной и показано, что она хорошо аппроксимируется двухпараметрической степенной зависимостью. Систематическими исследованиями степенных тел в рамках уравнений Эйлера установлено превосходство двухпараметрических остроконечных степенных тел над однопараметрическими затупленными телами во всем рассмотренном диапазоне чисел Маха набегающего потока $M = 1.5 \dots 4$.

1. Постановка задачи и прямой метод оптимизации. Требуется найти безусловный минимум функции

$$X(r_1, r_2, \dots, r_n) = \min$$

представляющей зависимость волнового сопротивления X от геометрических параметров r_i ($i = 1, \dots, n$). Задача решалась в два этапа, различающихся по числу параметров.

На первом этапе исследования проведены при большом числе параметров, что позволило максимально расширить класс рассматриваемых конфигураций. В качестве геометрических параметров были выбраны радиусы узловых поперечных сечений. Их число $n = 350$. Узловые сечения сгущены к первому (ближайшему к вершине головной части, совмещенной с началом отсчета x) сечению по закону

$$x_i = x_1 + \frac{s^{i-1} - 1}{s^n - 1}(L - x_1)$$

Здесь x_i – расстояние от вершины тела до сечения с порядковым номером i , L – длина тела, а $s = 1.012$ – коэффициент сгущения. Первое сечение удалено от вершины на один процент длины тела ($x_1 = 0.01L$). Образующая тела представлена набором отрезков, соединяющих соседние узловые сечения и основание головной части. Для участка образующей перед первым сечением принималась следующая связь между радиусом и продольной координатой: $x \equiv \varphi(r) = Fr + Gr^2$. Коэффициенты F и G определялись условиями гладкости образующей по значениям r_1 и r_2 – радиусов первого и второго узловых сечений. При этом допускаются конфигурации как с выпуклой, так и с вогнутой образующей.

На втором этапе после установления особенностей геометрии оптимальных тел число параметров было уменьшено до двух. При этом радиус образующей как функция x аппроксимировался степенной функцией, которая в общем случае дает остроконечную головную часть.

Для решения задачи использован метод, впервые примененный при оптимизации изолированного крыла и крыла, находящегося в условиях взаимодействия с другими элементами самолета [14, 15]. В его основу положено установление связи между газодинамическими функциями и геометрическими параметрами в рамках локального анализа. Последний опирался на линеаризацию, предполагающую локальную близость потока к сверхзвуковому плоскопараллельному (“локальная формула Аккерета”). В результате определяется аппроксимация целевой функции (силы сопротивления) в виде квадратичной формы. Информация о градиенте и матрице Гессе функции обеспечивает быструю сходимость к оптимуму. Вариации формы, направленные на уменьшение сопротивления, находятся методом Ньютона.

При оптимизации тела вращения метод был модифицирован следующим образом. Локальный анализ проводился при постоянстве радиуса r_1 образующей в первом узловом сечении. Экстремальное значение r_1 определялось дополнительной вариаци-

ей формы. При этом приращения радиусов при $i = 2, \dots, n$ связываются линейным соотношением

$$\Delta r_i = \Delta r_1 \frac{L - x_i}{L - x_1}$$

Таким образом, оптимизационный цикл состоял из спуска по двум направлениям в n -мерном пространстве.

На втором этапе задача решалась методом циклического покоординатного спуска. Минимальное число параметров и их удачный выбор (на основе анализа особенностей топографии целевой функции) определили эффективность такого подхода.

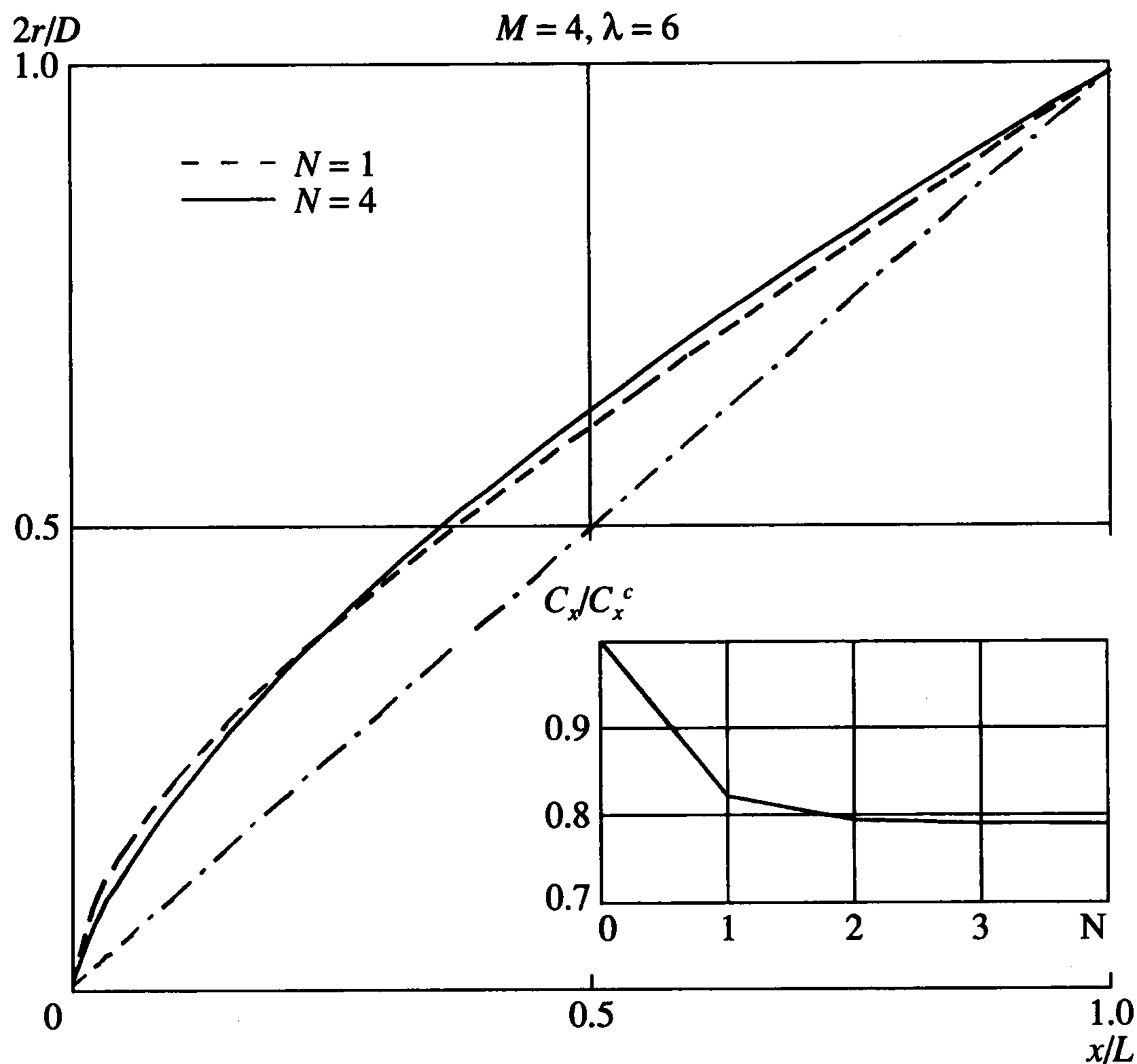
Течение идеального газа около тела вращения рассчитывалось маршевым методом [16]. Разрыв газодинамических переменных на головном скачке уплотнения выделялся строго. Уравнения Эйлера интегрировались по явной конечно-разностной схеме Мак-Кормака. Исследованы течения с присоединенным головным скачком уплотнения, поток за которым остается сверхзвуковым в направлении оси симметрии. Максимальное число узлов расчетной сетки между поверхностью тела и скачком достигало 400.

Описанный выше выбор узловых сечений обеспечивает выполнение неравенств $x_i - x_{i-1} \ll r_i$ для $i \geq 2$, которые позволяют использовать “плоскопараллельную линеаризацию” и, как следствие этого, приводят к правильному определению направления уменьшения X в пространстве параметров r_2, \dots, r_n . Без такого выбора, например при равномерном расположении всех узловых сечений по оси симметрии, направление уменьшения X даже в пространстве тех же параметров r_2, \dots, r_n определялось неправильно, и метод прямой оптимизации не работал. При достаточно больших (зависящих от M) удлинениях выбор x_1, s и $\varphi(r)$ ограничивал сверху и получающийся “оптимальный” наклон начального участка (или отношение r_1/x_1) так, что поток при обтекании заострения получался сверхзвуковым. С уменьшением удлинения (чему отвечает рост размера торца [13]), несмотря на принятые меры, реализовалось дозвуковое течение, и развитый подход переставал работать.

2. Результаты исследования. Исследование проведено в диапазоне сверхзвуковых скоростей, соответствующих числам Маха $M = 1.5, 2, 3$ и 4 . Определены оптимальные тела с удлинением $\lambda = L/D = 2, 3, 4, 5, 6$ и 10 (D – диаметр основания). Тело с $\lambda = 2$ при $M \leq 2$ не рассматривалось. При вычислении коэффициента волнового сопротивления C_x в качестве характерной площади бралась площадь основания.

На первом этапе исследований использовался метод, базирующийся на методе Ньютона, что обеспечило исключительно быструю сходимость к оптимуму. Несмотря на большое число варьируемых параметров ($n = 350$) оптимальная форма тела определяется всего за 4 цикла. Изменение образующей и сопротивления головной части (отнесено к сопротивлению C_x^c конуса) в процессе оптимизации тела с $\lambda = 6$ при $M = 4$ показано на фиг. 1. Начальная образующая была конической (ей соответствует штрихпунктирная прямая), но уже первый оптимизационный цикл ($N = 1$) обеспечивал попадание в непосредственную окрестность оптимума. Уменьшение C_x после первого цикла составляет 18%, а окончательное (при $N = 4$) – 21%.

Для тех же $\lambda = 6$ и $M = 4$ сравнение образующей, полученной численной оптимизацией, с контуром затупленной однопараметрической оптимальной головной части степенной формы [5], обнаружило близость их формы при $x > 0.05L$. Коэффициенты волнового сопротивления также имеют близкие значения – 0.0183 и 0.0185 соответственно. Однако для меньших чисел Маха и больших удлинений требуется более детальная аппроксимация формы головной части. По результатам анализа оптимальных форм, построенных прямой численной оптимизацией, показано, что хорошую



Фиг. 1

аппроксимацию их образующих дает двухпараметрическая степенная зависимость вида

$$2r/D = B[1 - (1 + Ax/L)^m] \quad (2.1)$$

При этом максимальная погрешность вычисления радиуса не превышает 3%.

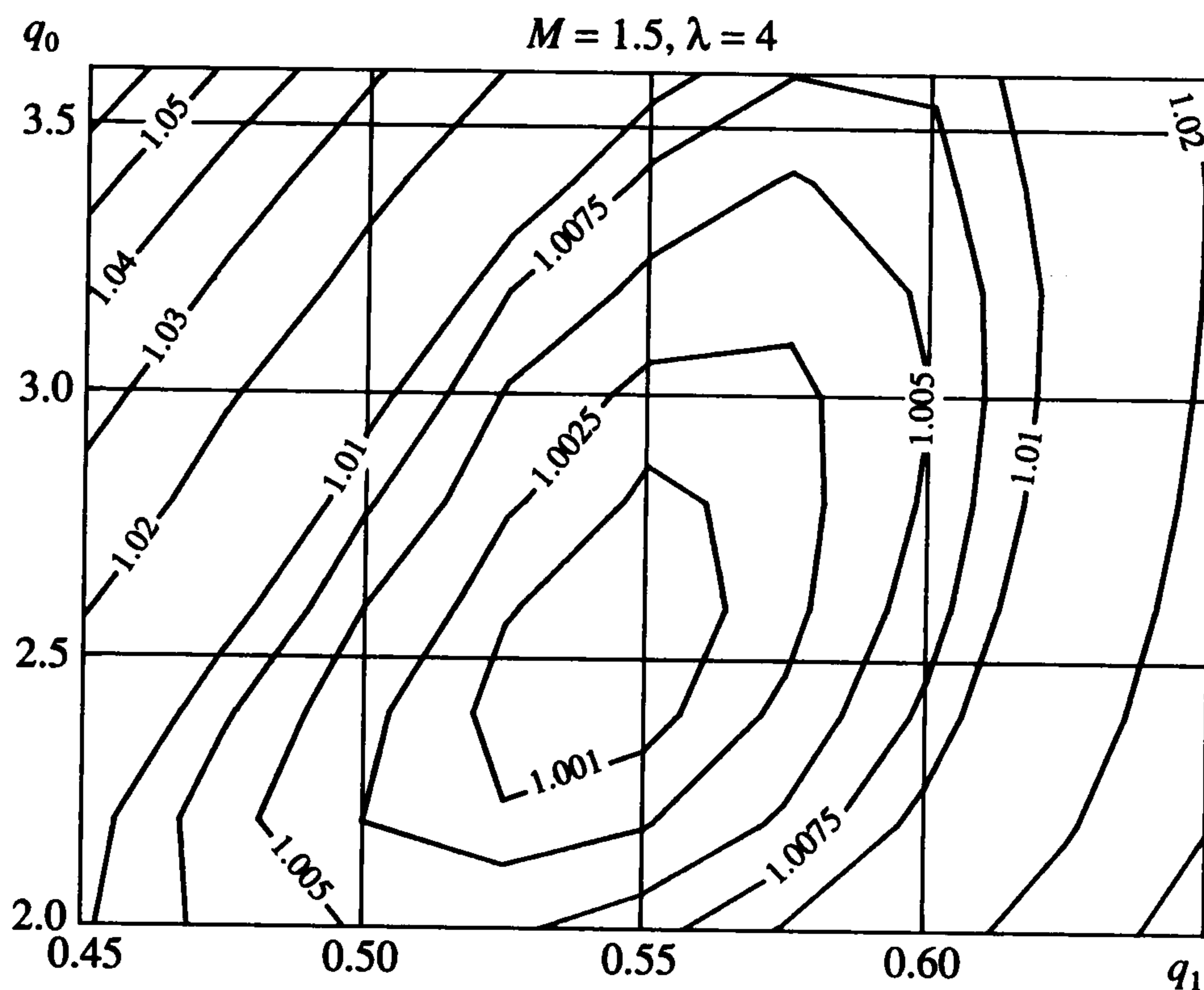
Использование аналитического представления образующей тела позволило предельно сократить число параметров и провести систематические оптимизационные исследования. Форма тела полностью определяется заданием двух геометрических параметров. Анализ топографии целевой функции показал целесообразность выбора в качестве параметров производных радиуса в носке и хвостовом сечении. Для удобства представления выполнено нормирование производных через удлинение тела:

$$q_0 = 2\lambda dr/dx|_{x=0}, \quad q_1 = 2\lambda dr/dx|_{x=L}$$

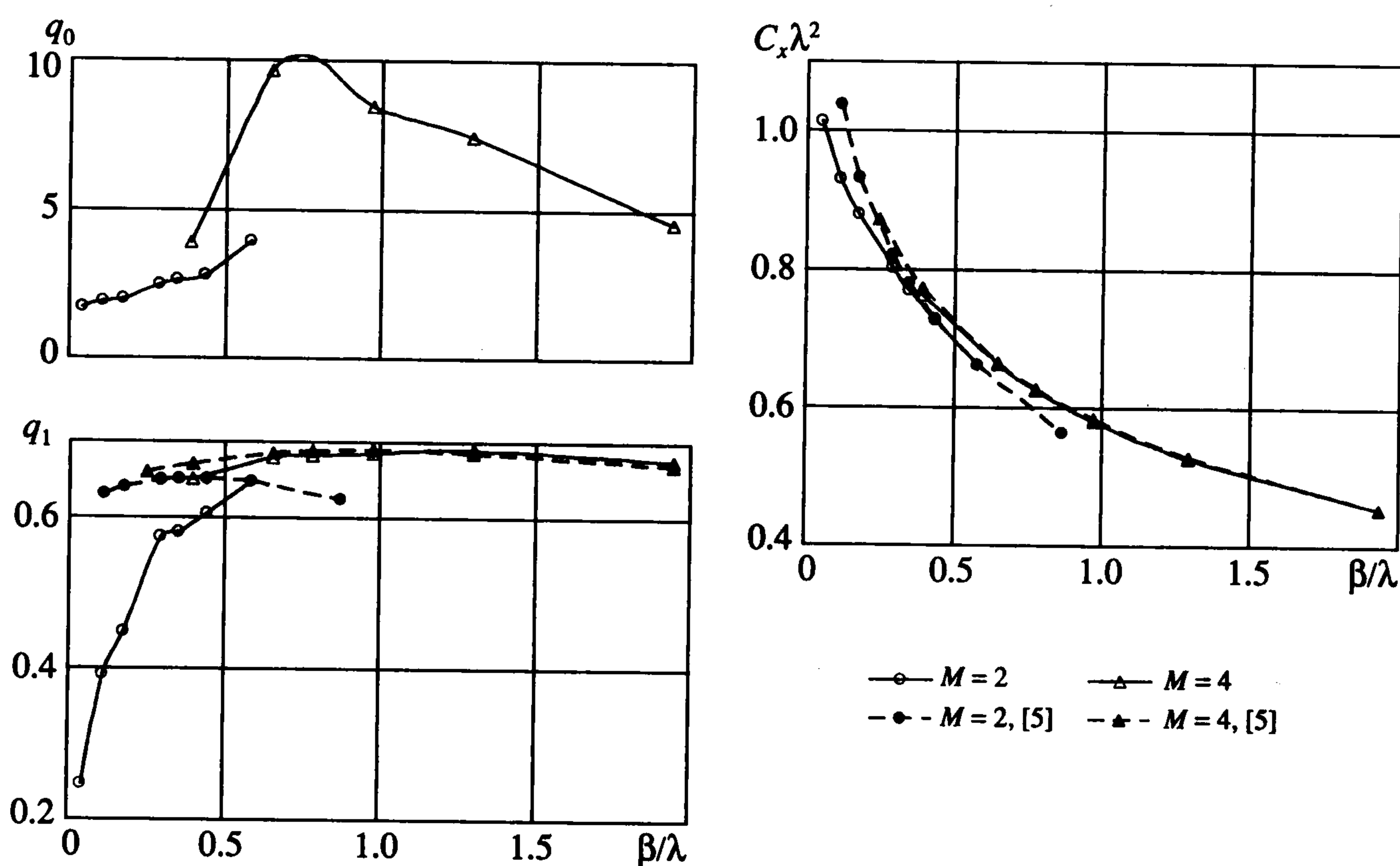
Задание q_0 и q_1 определяет значения параметров, входящих в представление (2.1): $B = -q_0/(mA)$, а коэффициент A и показатель степени m находятся численным решением следующих уравнений:

$$1 = -[q_0/(mA)][1 - (1 + A)^m], \quad q_1 = q_0(1 + A)^{m-1}$$

Линии уровня коэффициента волнового сопротивления (отнесенного к минимальному значению) тела с удлинением $\lambda = 4$ при $M = 1.5$ в плоскости геометрических параметров (q_0, q_1) представлены на фиг. 2. Значительно более слабое влияние на вол-



Фиг. 2

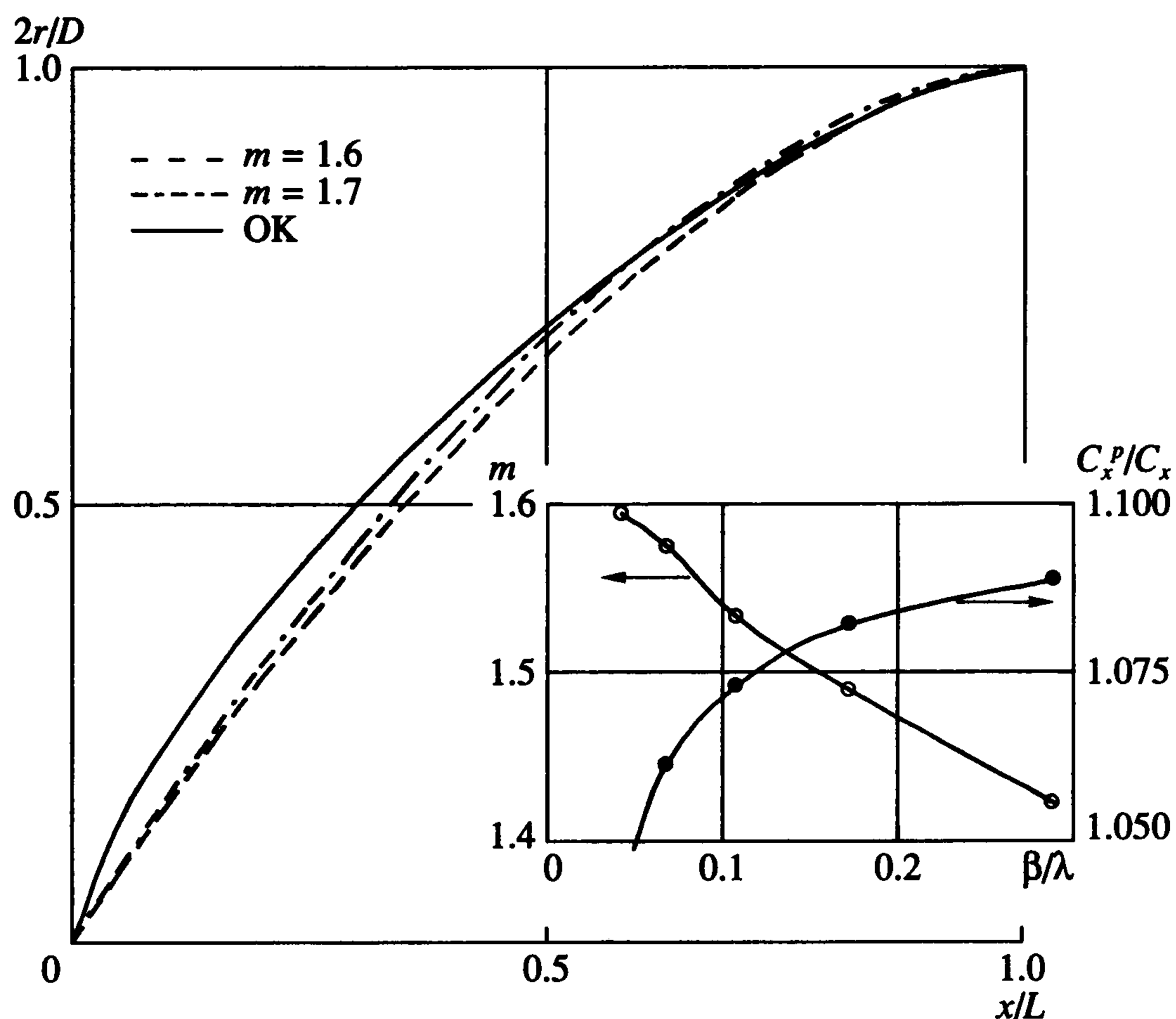


Фиг. 3

новое сопротивление параметра q_0 по сравнению с параметром q_1 связано с большим вкладом в сопротивление периферийных участков осесимметричных тел.

Результаты систематических исследований представлены в виде зависимостей геометрических параметров q_0 , q_1 и коэффициента волнового сопротивления $C_x \lambda^2$ от

параметра сверхзвукового подобия для тонких тел β/λ , где $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ (фиг. 3). В рассмотренном диапазоне M и λ для всех оптимальных тел параметр q_0 имеет значения, соответствующие обтеканию с присоединенным головным скачком. Вместе с



Фиг. 4

тем угол наклона образующей в носке возрастает при уменьшении удлинения тела. При дальнейшем уменьшении λ неизбежно отсоединение скачка.

Сопоставление с данными работы [5] показывает, что остроконечные (двухпараметрические) и затупленные (однопараметрические) оптимальные степенные тела имеют близкие аэродинамические характеристики при умеренных значениях удлинения. При этом отмечается хорошее согласование по параметру q_1 . Для однопараметрического затупленного тела выполняется равенство $q_1 = m$. При уменьшении β/λ различие в значениях параметра q_1 и волнового сопротивления увеличивается. Например, при $M = 2$ и $\lambda = 10$ остроконечная двухпараметрическая степенная головная часть имеет волновое сопротивление на 6% меньшее, чем затупленная головная часть из [5].

Было показано [17], что сопротивление тел степенной и параболической формы малого удлинения может быть уменьшено в результате введения сферического затупления определенного радиуса. Однако для тел большого удлинения такой прием приводит к обратному эффекту. Так, при $M = 1.5$ и $\lambda > 5$ тела из [17] со сферическим затуплением имеют волновое сопротивление, превышающее теоретическое значение $C_x \lambda^2 = 1$ для оживала Кармана [3]. В этом случае переход к остроконечным двухпараметрическим степенным телам позволяет уменьшить C_x более чем на 20%.

С целью определения оптимальной формы бесконечно тонкого тела проведены исследования тел сверхбольшого удлинения (до $\lambda = 40$) при $M = 2$. Установлено монотонное убывание геометрических параметров q_0 и q_1 при стремлении параметра подобия β/λ к нулю (фиг. 3). Если принять $q_1 = 0$, то поиск ограничивается классом "параболических" контуров с неизвестным показателем степени

$$2r/D = 1 - (1 - x/L)^m$$

Правомерность данного допущения подтверждается сближением минимальных значений волнового сопротивления тел с "параболическим" (C_x^P) и степенным конту-

ром при уменьшении β/λ (фиг. 4). В свою очередь, экстремальное значение показателя степени m монотонно возрастает и при $\beta/\lambda = 0$ может быть ограничено диапазоном $1.6 \leq m \leq 1.7$. Найденный оптимальный параболический контур бесконечно тонкого тела существенно отличается от оживала Кармана (ОК) как в головной, так и в центральной части.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00757).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.
2. Гонор А.Л., Черный Г.Г. Формы нетонких тел минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 379–395.
3. Феррари К. Тела вращения минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 111–134.
4. Васильченко В.И., Михайлов П.Д., Притуло М.Ф., Черных И.Г. Исследования аэродинамических характеристик головных частей тел вращения в сверхзвуковом потоке газа // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1666. С. 3–19.
5. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы // Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
6. Cliff S.E., Reuther J.J., Saunders D.A., Hicks R.M. Single-point and multipoint aerodynamic shape optimization of high-speed civil transport // J. Aircraft. 2001. V. 38. № 6. P. 997–1005.
7. Шмыглевский Ю.Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 923–926.
8. Гонор А.Л., Крайко А.Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
9. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
10. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
11. Крайко А.Н., Шеломовский В.В. Головные части тел вращения с протоком, близкие к телам минимального волнового сопротивления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 138–145.
12. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
13. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
14. Таковицкий С.А. О сходимости в задаче оптимизации крыла сложной формы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 5. С. 690–697.
15. Takovitsky S.A. Numerical optimization of the wing of a supersonic airplane // Proc. 23rd Intern. Congr. Aeronaut. Sci. (ICAS). Toronto, Canada, 2002. P. 232.1–232.7.
16. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многосеточных расчетных сеток // Тр. ЦАГИ. 1997. Вып. 2590. С. 24–32.
17. Турбинин В.Б., Михайлов П.Д. Волновое сопротивление тел вращения степенной и параболической формы со сферическим затуплением ($\bar{r}_n = 0-0.4$) при сверхзвуковом осесимметричном обтекании // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1764. С. 21–29.