

УДК 533.6.011;697.4

© 2003 г. А. Н. Крайко, Д. Е. Пудовиков, К. С. Пьянков, Н. И. Тилляева

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ГОЛОВНЫЕ ЧАСТИ ЗАДАННОГО УДЛИНЕНИЯ,  
ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЛИ БЛИЗКИЕ К ОПТИМАЛЬНЫМ  
ПО ВОЛНОВОМУ СОПРОТИВЛЕНИЮ**

В рамках идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа решена задача построения оптимальных или близких к оптимальным головных частей тел вращения фиксированного удлинения при сверхзвуковом обтекании. Их контур включает передний торец – участок краевого экстремума по длине и примыкающий к нему с изломом гладкий пологий участок. При малых удлинениях пологий участок – результат точного решения вариационной задачи. При удлинениях, превышающих некоторую зависящую от числа Маха набегающего потока  $M_\infty$  величину, точное решение требует введения малых внутренних изломов, из которых даже главный слабо влияет на величину сопротивления. Контур, названный “близкими к оптимальным”, не удовлетворяют тому из условий оптимальности, которое определяет главный излом. В рассчитанных примерах ( $1.2 \leq M_\infty \leq 10$ ) конические головные части оказались намного хуже оптимальных. Для контуров, оптимальных в приближении формулы Ньютона, а также оптимальных затупленных и остроконечных степенных, такая ситуация имеет место при малых удлинениях и малых сверхзвуковых числах Маха (остроконечные степенные контуры удастся строить лишь при достаточно больших удлинениях). То, что торец – участок краевого экстремума, показано сравнением сопротивлений тел, получающихся разными допустимыми варьированиями торца. Альтернативное доказательство, не ограниченное конкретным видом варьирования торца, может опираться на решение сопряженной задачи, сформулированной в рамках общего метода множителей Лагранжа. Последняя представляет и самостоятельный интерес, в частности, из-за выявленных при ее формулировке особенностей отражения разрывов множителей Лагранжа от звуковой линии с обращением в точке отражения части из них в бесконечность.

**1. Введение.** Задача о построении осесимметричной головной части заданного удлинения, реализующей минимум сопротивления, – “задача Ньютона” решена Ньютоном на заре вариационного исчисления с использованием предложенной им формулы для определения давления  $p$  на поверхности тела (“формулы Ньютона” – ФН)

$$p = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \vartheta \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $V$  – модуль вектора скорости  $V$ , индекс  $\infty$  метит параметры набегающего потока, а  $\vartheta$  – угол между касательной к контуру и  $V_\infty$ .

Решение Ньютона [1] долгое время рассматривалось безотносительно к аэродинамике. В начале 1950-х годов выяснилось, что ФН неплохо работает при гиперзвуковых скоростях полета. Тогда же аэродинамики обратились к построению с использованием ФН (1.1) оптимальных, в первую очередь плоских и осесимметричных

тел. К этому времени решение Ньютона, известное математикам, не было, как правило, известно аэродинамикам, занявшимся решением задачи Ньютона и различных ее обобщений. К тому же в самих “Математических началах натуральной философии” даже наиболее близкое к современному описание способа его получения, данное в примечаниях А.Н. Крылова [1], оказалось достаточно трудным для понимания механиков того времени. Еще в более сложном положении оказались западные специалисты. Им указанное примечание было недоступно, а обсуждаемое в [2] и найденное в переписке Ньютона описание его способа решения понять с современных позиций много труднее. По-видимому, этим объясняется отсутствие во многих “первых” работах, посвященных данному вопросу, ссылок на решение Ньютона. Если же оно, как это сделано Эггерсом и др. [3, 4], тем не менее, вспоминалось, то передний торец – обязательный элемент решения Ньютона – вводился без объяснения и, как выяснилось позднее [5], без понимания причин его появления.

Была предпринята первая попытка [6] решить задачу Ньютона с использованием для давления на поверхности осесимметричной головной части более сложной и, как тогда представлялось, более точной, чем (1.1), формулы Ньютона–Буземана (ФНБ). В связи с найденными [6] с ее использованием экстремальными образующими, удовлетворяющими классическому условию экстремума (“уравнению Эйлера” вариационного исчисления), возникло два вопроса. Во-первых, как и в случае ФН, экстремали, как правило (исключения: не представляющие особого интереса торец – тело нулевого удлинения и игла – тело бесконечного удлинения), не могли начинаться на оси симметрии, т.е. являлись образующими тел с протоком. Во-вторых, замена нулем отличного от нуля угла наклона экстремали в ее концевой точке уменьшало сопротивление на конечную величину. Возможность такого уменьшения связана с тем, что, согласно ФНБ, при обтекании выпуклых изломов давление в точке излома обращается в минус бесконечность, приводя к уменьшающему сопротивлению конечному “тянущему эффекту”. В газе  $p \geq 0$ , и такой эффект – следствие несовершенства ФНБ, что нужно учесть при формулировке вариационной задачи. Было установлено [7], что учет этого обстоятельства ведет к тому, что в рамках ФНБ концевой участок контура оптимальной головной части оказывается участком краевого экстремума – границей применимости ФНБ, определяемой равенством  $p = 0$ .

Невозможность проведения требуемой двусторонней экстремали с оси симметрии приводит к введению другого участка краевого экстремума [1, 2, 8–11]. Таким участком является присутствующий в решении Ньютона торец. У Ньютона торец – участок краевого экстремума, который появился из-за ограничения длины головной части. По этой причине на торце допустимы только неотрицательные вариации продольной координаты  $\delta x \geq 0$ . Однако, как заметил Лежандр, при допущении на торце  $\delta x > 0$  сопротивление построенной Ньютоном головной части может уменьшаться, правда, не в первом, а во втором порядке по  $\delta x' \equiv d\delta x/dy$ , ибо торец, удовлетворяя необходимому условию двустороннего экстремума, не удовлетворяет условию Лежандра – необходимому условию “слабого” минимума. В силу последнего экстремали, реализующие минимум сопротивления, должны удовлетворять неравенству  $dx/dy \equiv \text{ctg } \vartheta \geq 1/\sqrt{3}$  где  $y$  – радиальная переменная цилиндрических координат  $x, y$ .

Несмотря на замечание Лежандра, решение Ньютона с передним торцом верно, поскольку торец – участок краевого экстремума не только из-за ограничения длины головной части, но и как граница применимости ФН. Для головных частей эта формула справедлива, если  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ , и торец оказывается одновременно участком краевого экстремума и по  $x$ , и по  $\vartheta$ . На самом деле Ньютон, не знавший условия Лежандра, не только доказал, что в свете указанных ограничений торец является таким участком, но и получил более сильное (см. [1], с. 428–433), чем условие Лежандра,

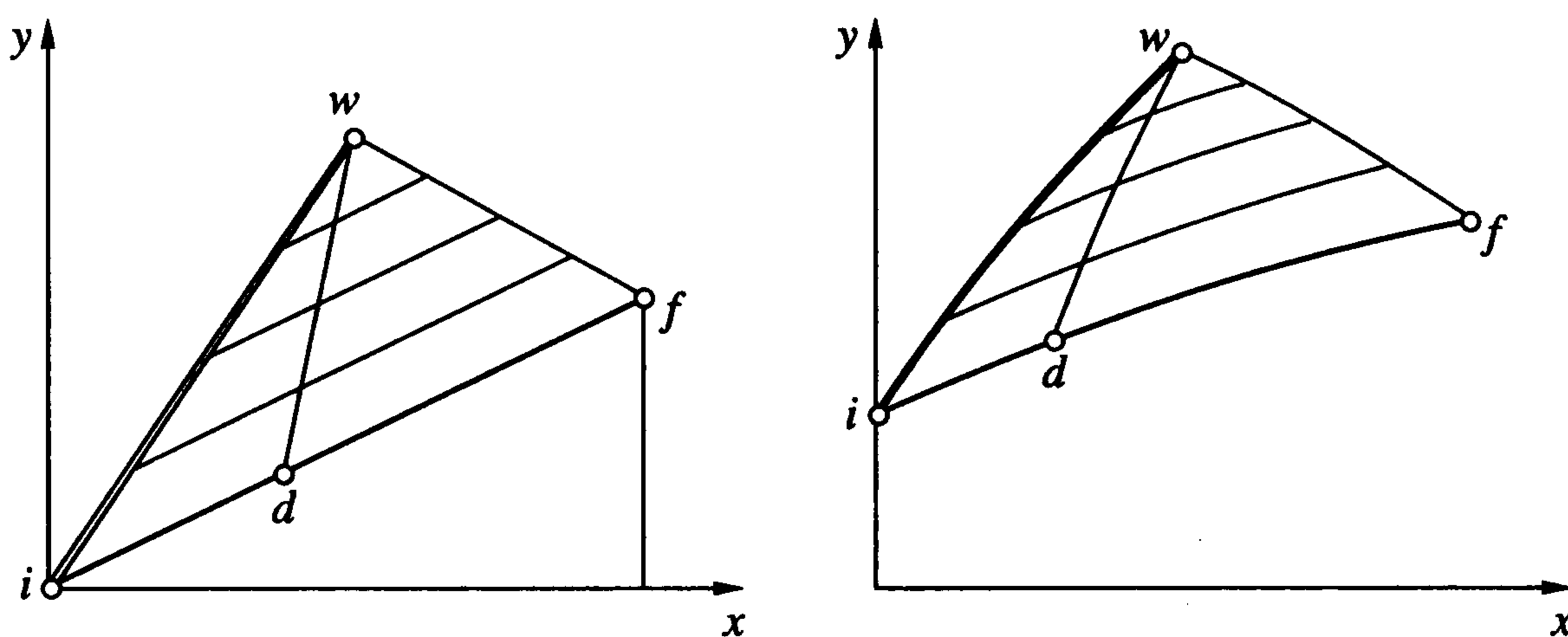
необходимое условие оптимальности двусторонней экстремали:  $dx/dy \geq 1$ . Лежандр этого неравенства у Ньютона не заметил.

Участок  $p = 0$  при использовании ФНБ и передний торец при задании длины не исчерпывают всех участков краевого экстремума в задачах построения осесимметричных (и плоских) головных частей минимального волнового сопротивления. При свободной длине другой тип участка краевого экстремума появляется при построении в рамках ФН плоских и осесимметричных головных частей заданного объема [5, 11]. Здесь при малых и умеренных значениях безразмерного объема головные части минимального волнового сопротивления имеют форму штыря, который выступает из торца – переднего конца заданного тела. Согласно полученным ранее результатам [5, 11], в решаемой с использованием ФН (1.1) задаче с заданным объемом (при свободной длине), как и в задаче Ньютона, на участках двустороннего экстремума должно выполняться упомянутое выше неравенство  $dx/dy \geq 1$ .

Внимание, уделенное выше построению оптимальных головных частей в рамках ФН и ФНБ, оправданно и при рассмотрении той же задачи в рамках полных уравнений течения вязкого и нетеплопроводного газа (“уравнений Эйлера”). Прежде всего, ценность обсуждавшихся выше результатов связана с тем, что при построении осесимметричных головных частей минимального волнового сопротивления в приближении уравнений Эйлера возникает та же проблема отсутствия отличных от иглы остроконечных экстремальных образующих, обтекаемых с присоединенным головным скачком. Для плоских головных частей достаточно большой длины такая проблема, как и при использовании ФН и ФНБ, не возникает, однако возникает другая связанная с изломами оптимальной образующей. Вклад таких изломов в сопротивление оптимальных плоских головных частей известен с высокой степенью полноты. Результаты, полученные в приближении уравнений Эйлера для оптимальных плоских головных частей, важны и при построении их осесимметричных аналогов.

В рамках уравнений Эйлера первый точный результат по построению плоской головной части заданного удлинения, которая при обтекании сверхзвуковым потоком идеального газа реализует минимум волнового сопротивления, получен Г.Г. Черным [12]. Исследуя обтекание тел, близких к клину, он выделил случаи, когда клин является оптимальной головной частью, и установил, что это возможно при обращении в нуль коэффициента отражения от ударной волны возмущений давления, приходящих на нее вдоль  $C^+$ -характеристик (см. фиг. 1, где  $if$  – образующая головной части,  $iw$  – присоединенный скачок,  $dw$  и  $wf$  –  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристики). Для каждого фиксированного набегающего потока это условие выполняется для клиньев только нескольких удлинений  $l = x_f/y_f$ , включая клин бесконечного удлинения с нулевым углом при вершине и со скачком, выродившимся в  $C^+$ -характеристику. Позднее тот же результат независимо получен Ю.Д. Шмыглевским [13], которым в рамках уравнений Эйлера решалась соответствующая вариационная задача.

Указанная задача была решена [13] методом контрольного контура (МКК), состоявшего из скачка  $iw$  и “замыкающей”  $C^-$ -характеристики  $wf$ . На фиг. 1 показана схема сверхзвукового обтекания с присоединенным головным скачком клина (слева) и головной части тела вращения с протоком (справа). В МКК сопротивление образующей  $if$  с помощью интегрального закона сохранения осевой компоненты количества движения выражается через интегралы по отрезкам  $iw$  и  $wf$ . Как разность интегралов по ним же выражаются заданная длина головной части и условие равенства протекающих через  $iw$  и  $wf$  расходов. Энтропия газа за скачком, сохраняющаяся затем вдоль линий тока, – известная функция угла его наклона  $\sigma$  к оси  $x$ , а вдоль замыкающей  $C^-$ -характеристики параметры (включая  $x$ ,  $y$  и функцию тока  $\psi$ ) связаны обыкновенными дифференциальными уравнениями. С учетом этого в МКК вариационная задача определения оптимальной образующей  $if$  сводится к задаче Лагранжа с изопериметрическими условиями и с дополнительными связями в виде обыкно-



Фиг. 1

венных дифференциальных уравнений. Необходимые условия экстремума дают уравнения для оптимальных формы отрезка  $iw$  ударной волны, т.е. функции  $\sigma = \sigma(\psi)$ , и распределений параметров на отрезке  $wf$  экстремальной  $C^-$ -характеристики. Если указанные отрезки и параметры на них известны, то нахождение отвечающего им контура  $if$  сводится к численному решению методом характеристик двух стандартных задач: Коши с данными на отрезке скачка  $iw$  и Гурса с данными на отрезках  $dw$  и  $wf$  характеристик разных семейств. Анализ необходимых условий экстремума, полученных Ю.Д. Шмыглевским [13], показал, что их выполнение возможно только при тех же, что были указаны Г.Г. Черным [12], удлинениях  $l$  плоской головной части. Для совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей к числу таких удлинений, кроме  $l = \infty$ , в зависимости от числа Маха набегающего потока  $1 < M_\infty \leq \infty$  меняется от одного до трех [10–14].

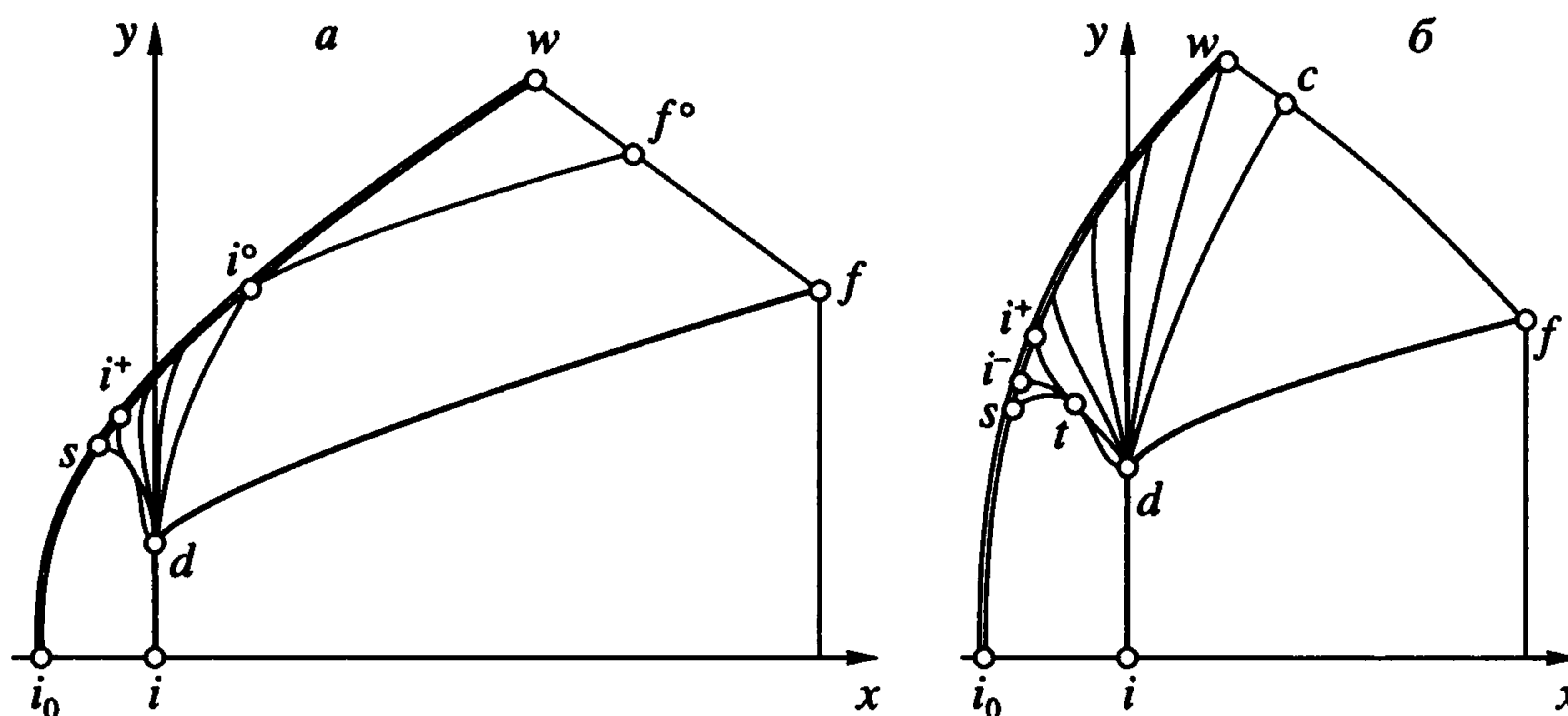
Для головных частей тел вращения аналогичные результаты были получены [14–16] с помощью МКК. Результаты [13–16] были обобщены [17] на произвольный двухпараметрический газ. Согласно работам [14–17], отличный от  $C^+$ -характеристики оптимальный головной скачок не может начинаться на оси симметрии. Поэтому найденные в [14–17] в рамках МКК отличные от иглы оптимальные гладкие контуры  $if$  можно рассматривать только в качестве образующих головных частей тел вращения с протоком (см. также [10, 18]). Эта ситуация аналогична имевшей место при построении оптимальных осесимметричных головных частей в рамках ФН и ФНБ.

В дальнейшем понадобятся условия оптимальности, определяющие в осесимметричном случае экстремальные отрезки ударной волны и замыкающей  $C^-$ -характеристики. Для двухпараметрического газа они имеют вид [11, 16]

$$\frac{\mu^\circ}{\mu} \frac{y p v^2}{(y p u)_\infty} + \frac{T v_s (u_s - u_\infty)}{T_s V^2} [(1 + \Omega M^2) v + u \sqrt{M^2 - 1}] = 0 \quad (1.2)$$

$$y p V^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{tg} \alpha = -\mu = \text{const} \quad (1.3)$$

Здесь  $M = V/a$  – число Маха;  $a$  – скорость звука;  $u$  и  $v$  –  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости  $V$ ;  $\alpha$  – угол Маха:  $\operatorname{ctg} \alpha = (M^2 - 1)^{1/2}$ ;  $T$  – температура,  $\Omega = -a^2/(\rho i_\rho)$ ;  $i_\rho = (\partial i / \partial \rho)_p$ , где  $i = i(p, \rho)$  – удельная энтальпия – известная функция  $p$  и  $\rho$ ; для совершенного газа  $\Omega = \kappa - 1$ ; параметры на  $C^-$ -характеристике  $wf$ , не имеющие индексов, и за скачком (с индексом  $s$ ) отвечают одинаковым значениям  $\psi$ ;  $y_\infty \equiv y_\infty(\psi) = [2\psi/(k p_\infty V_\infty)]^{1/2}$  с произвольным нормирующим множителем  $k > 0$ , а  $\mu^\circ$  и  $\mu$  – постоянные. В случаях, рассмо-



Фиг. 2

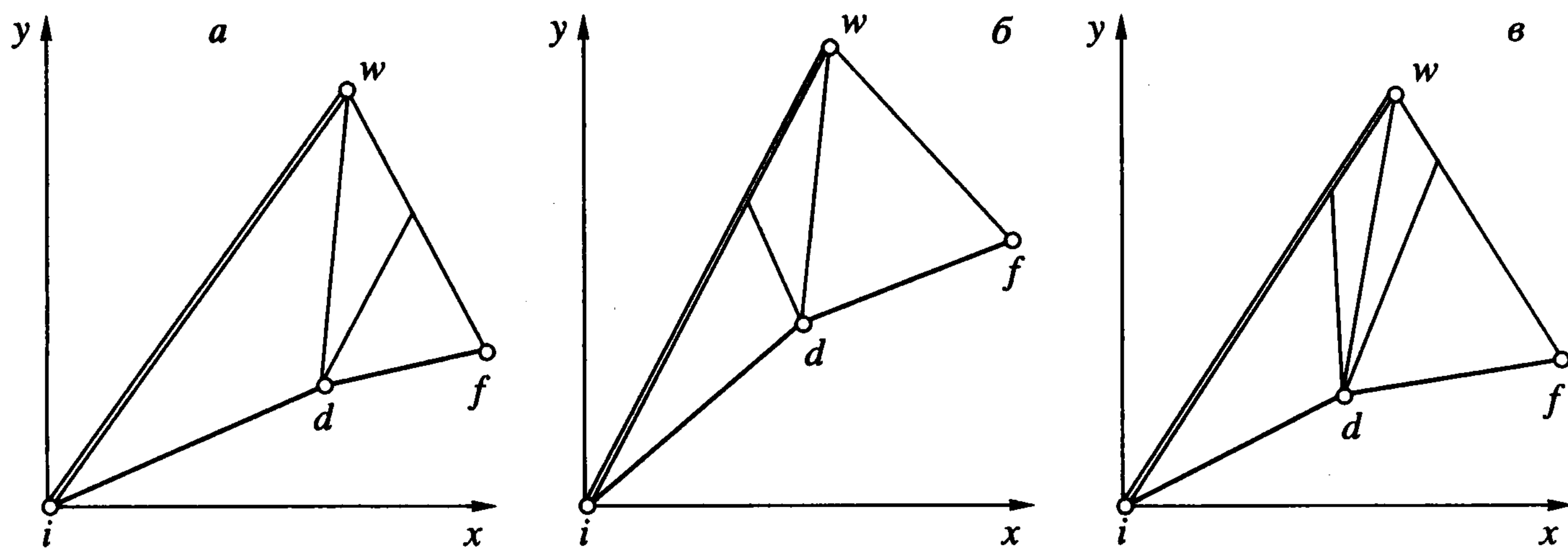
тренных в [10, 13–18],  $\mu^\circ = \mu$ . При этом, в силу равенства (1.3), справедливого, в частности, в точке  $w$ , в ней

$$\Lambda_w \sim \lambda_w \equiv v_w \left\{ \rho v + \frac{\rho_\infty u_\infty (u - u_\infty)}{V^2} [(1 + \Omega M^2)v + u\sqrt{M^2 - 1}] \right\}_w = 0 \quad (1.4)$$

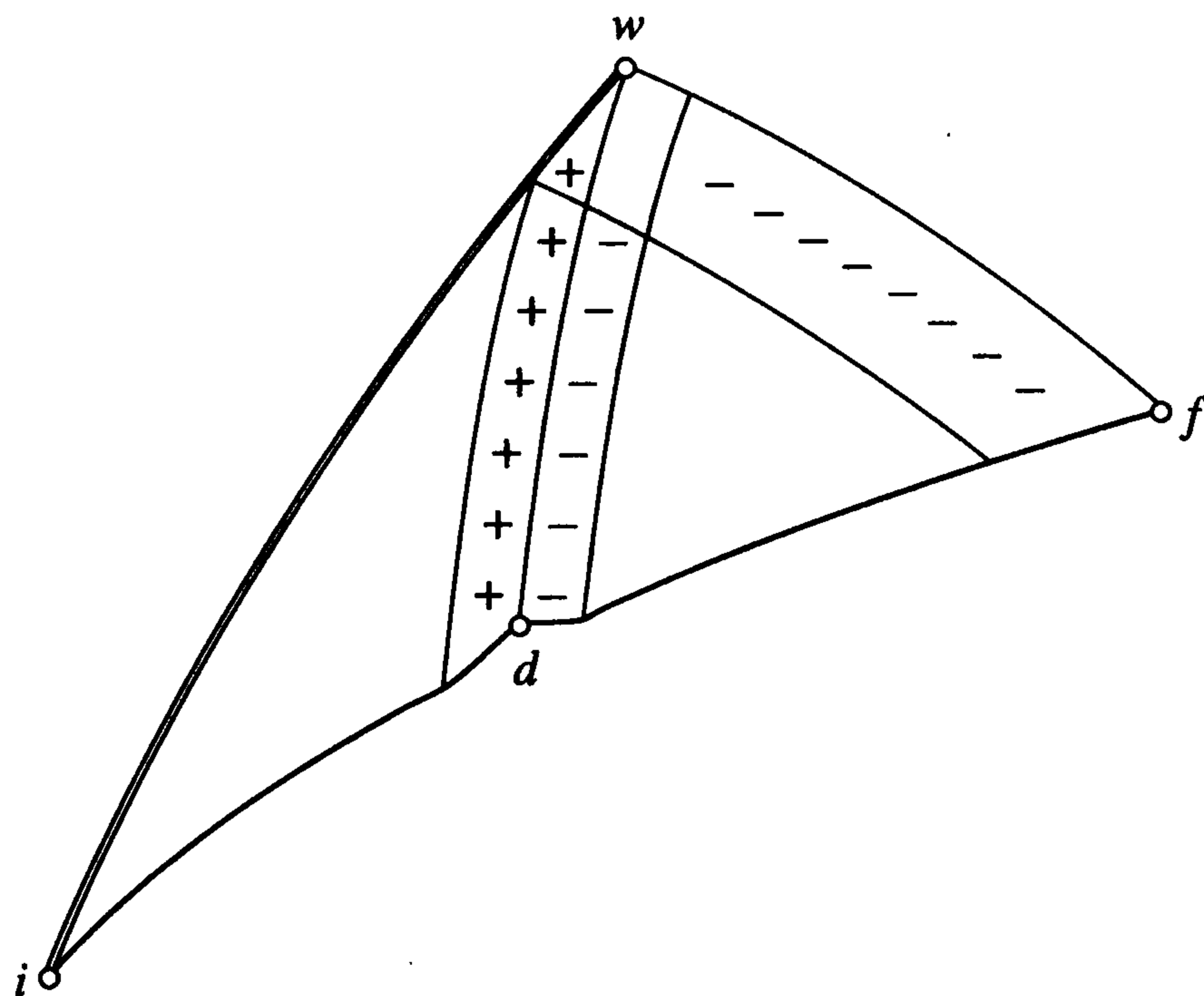
что эквивалентно обращению в нуль упоминавшегося выше коэффициента отражения  $\Lambda_w$ . При заданных координатах конечных точек, принадлежащих головному скачку и замыкающей  $C^-$ -характеристике, оптимальными образующими являются любые нарисованные на фиг. 1 линии тока. О равенстве (1.3) с  $\mu^\circ/\mu \neq 1$  пойдет речь позже.

Найденный в [14, 15] частный класс гладких осесимметричных контуров минимального волнового сопротивления предлагалось использовать [15, 19] при построении осесимметричных головных частей тел без протока, реализующих минимум волнового сопротивления при заданном начальном участке  $id$ . Задание участка  $id$  при допущении излома в точке  $d$  однозначно определяет течение (в том числе ударную волну  $i_0i^\circ$ ) слева от  $di^\circ$  – замыкающей  $C^+$ -характеристики пучка волн разрежения, возникающего при обтекании излома в точке  $d$ . Участок  $id$  мог, как на фиг. 2, *a*, задаваться в форме торца:  $x = 0$ , однако конкретные примеры в [15, 19] не строились. Для тел рассмотренного в [15, 19] типа угол наклона скачка в точке  $i^\circ$  таков, что к ударной волне  $i_0i^\circ$  в ней можно непрерывно пристроить участок волны  $i^\circ w$  и “экстремальную” треугольную область  $i^\circ wf^\circ$ . Участки  $i^\circ w$  и  $wf^\circ$  скачка и  $C^-$ -характеристики удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3) с  $\mu^\circ = \mu$  и с заменой  $i$  и  $f$  на  $i^\circ$  и  $f^\circ$ . Отрезок  $f^\circ f$  замыкающей  $C^-$ -характеристики находится с использованием условия оптимальности (1.3) при известной энтропии  $s = S(\psi)$ , которая определяется не зависящим от формы контура  $df$  начальным участком скачка  $i_0i^\circ$ .

В рамках ФН и ФНБ оптимальные плоские головные части можно было построить для любых удлинений, превышающих единицу (как и головные части тел вращения с протоком в определенном диапазоне удлинений и относительных радиусов протока). Поэтому в связи с результатами [12–19] возникает вопрос, почему этого не удастся сделать при решении тех же задач в рамках уравнений Эйлера. Ответ на него дает анализ возможных ограничений МКК, использованного в [13–18]. Дело в том, что при получении этим методом необходимых условий оптимальности неявно предполагается возможность независимого и знакопеременного варьирования угла наклона скачка  $\sigma$  и  $p$  или  $\vartheta$  на замыкающей  $C^-$ -характеристике. Для гладких тел это действительно так, ибо за форму скачка отвечает начальный участок контура  $id$ , а за замыкающую характеристику – его конечной участок  $df$ . Если же оптимальный



Фиг. 3



Фиг. 4

контур имеет излом, то на попадающих в пучок волн разрежения участках скачка и замыкающей характеристике исчезает возможность либо знакопеременного (фиг. 3, а и б), либо и знакопеременного и независимого варьирования (фиг. 3, в).

То, что в рамках уравнений Эйлера оптимальный контур в общем случае не может быть гладким, доказывается с помощью предложенного в [12] приема варьирования в характеристической "ε-полоске" (фиг. 4). Пусть оптимальная образующая  $if$  гладкая, а коэффициент  $\Lambda_w$ , например, отрицателен. Проварьируем наклон контура только в ε-окрестности точки  $d$  на  $\Delta > 0$  слева от точки  $d$  и на  $-\Delta$  справа от нее. Тогда при малых ε и Δ возмущения параметров описываются решением линеаризованных относительно в общем случае неравномерного невозмущенного потока (отвечающего  $\Delta = 0$ ) уравнений Эйлера. Возмущения параметров будут величинами порядка Δ только в идущих к скачку и в отраженной характеристических полосках, показанных на фиг. 4, где знаки + и - указывают положительные и отрицательные вариации  $\delta p = O(\Delta)$ . В окрестности точки  $f$  на контур головной части попадает только левая половина ε-полоски с  $\delta p = O(\Delta) < 0$ , что ведет к уменьшению сопротивления на  $O(\epsilon\Delta)$  при вкладе прочих участков контура, равном  $O(\epsilon^2\Delta)$ . Если  $\Lambda_w > 0$ , то тот же ре-

зультат получится при замене бугорка в окрестности точки  $d$  выемкой. Возможность уменьшения сопротивления противоречит предположению об оптимальности гладкого контура. При наличии в точке  $d$  конечного излома вклад в сопротивление ее проварьированной окрестности оказывается величиной того же порядка  $\varepsilon\Delta$  и подобное противоречия не возникает.

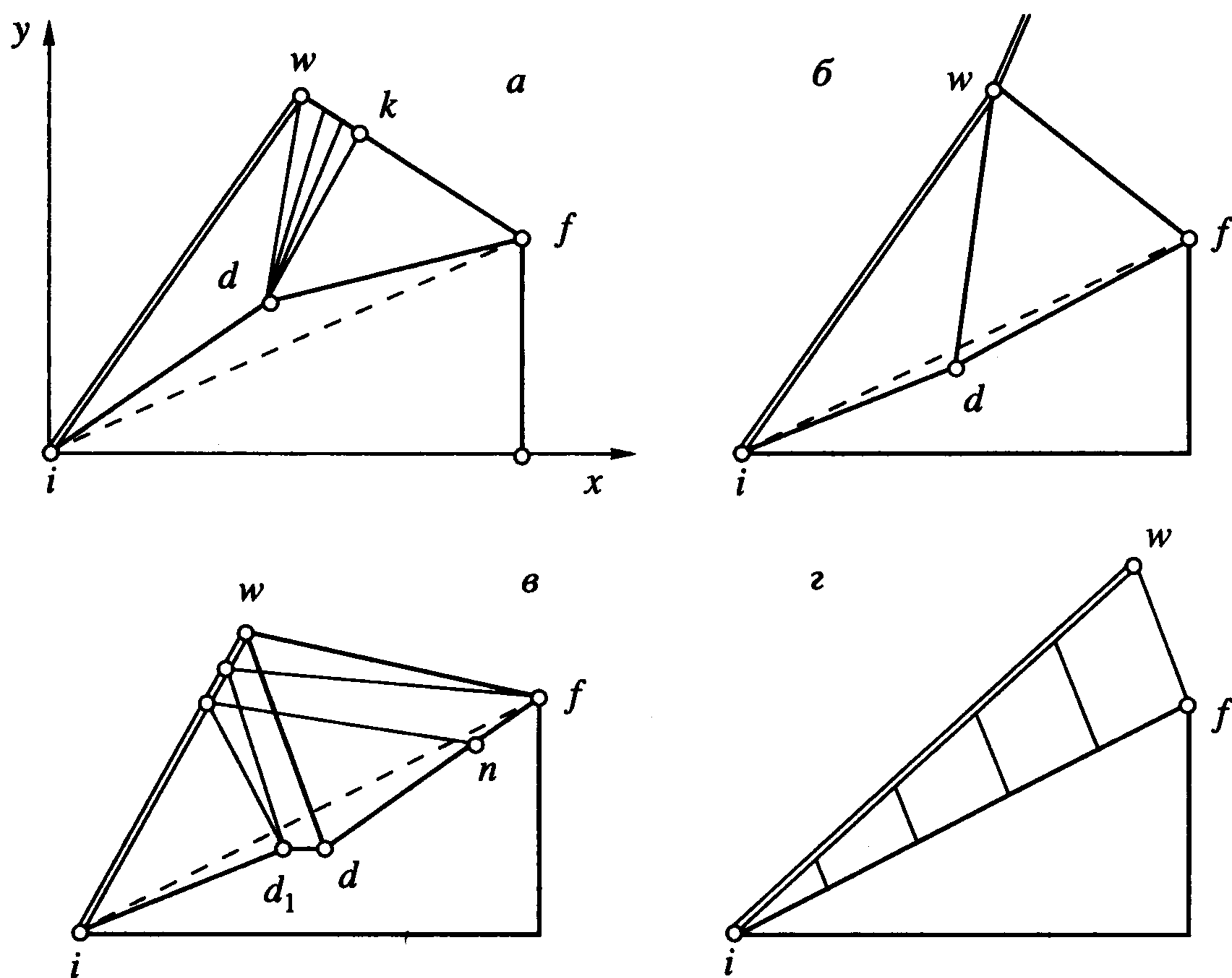
Итак, в общем случае отличного от нуля коэффициента отражения  $\Lambda_w$ , оптимальный контур не может быть гладким. Более того, тем же приемом можно показать [10], что в рамках уравнений Эйлера оптимальные контуры, обтекаемые с присоединенным скачком, в общем случае имеют не один, а бесконечно много изломов и точек их сгущения. Такая на первый взгляд безнадежная (в смысле построения оптимального решения) ситуация упрощается, благодаря тому, что величина главного излома, пропорциональна  $\Lambda$ , следующего  $-\Lambda^2$  и т.д. при, как правило,  $|\Lambda| \ll 1$ . Поэтому введение даже одного излома позволяет получить основное, причем весьма малое уменьшение волнового сопротивления.

Первые близкие к оптимальным контуры с одним изломом, обтекаемые с присоединенным скачком, были построены [20, 21] с использованием крайне сложного численного алгоритма, включающего метод характеристик и условия оптимальности, полученные в рамках общего метода множителей Лагранжа [10]. Была построена [20, 21] 21 образующая с одним изломом: 7 головных частей профилей и 14 обечаек тел вращения с протоком. Все построенные для обтекания совершенным газом с  $\kappa = 1.4$  плоские образующие имели излом, не превышающий (по углу) 0.05, при максимальном уменьшении волнового сопротивления в 0.66% по сравнению с клином. Сопротивления образующих головных частей тел вращения с протоком в сравнении с гладкими прямолинейными образующими с теми же координатами точек  $i$  и  $f$  получились меньше на проценты. Последнее, однако, обязано не наличию излома, а тому, что в осесимметричном случае прямолинейные образующие не оптимальны и при  $\Lambda_w = 0$ , а их сопротивления при  $\Lambda_w = 0$  превышают сопротивления образующих, форма которых определяется условиями (1.2) и (1.3) с  $\mu^\circ/\mu = 1$ , на те же проценты.

В рамках метода неопределенного контрольного контура [10] был развит [22] способ построения близких к оптимальным гладких образующих тел вращения с протоком. При этом (см. также [11]) после получения условий (1.2) и (1.3) с  $\mu^\circ/\mu \neq 1$ , которые должны выполняться на скачке  $iw$  и на характеристике  $wf$ , в выражении для вариации волнового сопротивления  $\delta\chi$  остается единственное слагаемое

$$\delta\chi = (\mu^\circ - \mu)\delta x_w = y_w \lambda_w (M_w^2 - 1)^{-1/2} \delta x_w \quad (1.5)$$

где  $\delta x_w$  – приращение  $x_w$  при фиксированных  $y_w$  и  $\psi_w$ . Для произвольных, отличных от нуля вариаций  $\delta x_w$  правая часть равенства (1.5) равна нулю только при равенстве нулю коэффициента  $\Lambda_w$ , определяемого формулой (1.4). Это дает гладкие оптимальные образующие, исследованные в [14–18]. При  $\Lambda_w \neq 0$  равенства (1.2) и (1.3), записанные в точке  $w$ , определяют постоянные  $\mu$  и  $\mu^\circ/\mu \neq 1$ . Использование тех же равенств с найденными  $\mu$  и  $\mu^\circ/\mu$  при  $\psi < \psi_w$  позволяет строить соответствующие участки ударной волны и замыкающей  $C^-$ -характеристики, а по ним – и континуума гладких, близких к оптимальным образующих. “Ближих к оптимальным” – из-за упоминавшейся выше малости  $\Lambda_w$ , а не оптимальных – из-за отличия от нуля правой части (1.5). Близость полученных таким способом гладких контуров к почти оптимальным с одним изломом подтвердили выполненные сравнения. Коэффициенты волнового сопротивления 9 из 14 построенных в [20, 21] образующих с изломом и построенных в [22] гладких образующих совпали с точностью до трех знаков. Различие в оставшихся 5 примерах не превысило 0.3%, т.е. в осесимметричном случае излом дает еще меньший эффект, чем в плоском.



Фиг. 5

Малость главных изломов оптимальных контуров, обтекаемых с присоединенным скачком, позволила искать близкие к оптимальным контуры плоских головных частей как комбинацию прямолинейных отрезков, пересекающихся под малым углом  $\Delta\vartheta_d$  в точке  $d$ . На основе таких соображений был развит [23] быстрый способ построения близких к оптимальным образующих с одним изломом. При этом (см. также [11]) для всех чисел Маха  $1 \leq M_\infty \leq \infty$  и относительных полутолщин головной части  $\tau = 1/l = y_f/x_f$  определяются оптимальное положение излома и его величина, а также и уменьшение волнового сопротивления по отношению к клиньям с такими же  $\tau$ . При  $\Lambda_w < 0$  оптимальный излом выпуклый и расположен, как показано на фиг. 5, а [11, 23]. При  $\Lambda_w > 0$  оптимальный излом обтекается с образованием слабого скачка (фиг. 5, б), расположенного так, что отраженный скачок приходит в точку  $f$ . Строго говоря, анализ показал [11, 23], что при  $\Lambda_w > 0$  образующая, близкая к оптимальной, имеет два близко расположенных главных излома одного порядка: первый, обтекаемый с образованием центрированной волны, а второй – слабого скачка (фиг. 5, в). При  $\Lambda_w = 0$  подход, предложенный в [11, 23], дает точный результат [12, 13] – оптимальные прямолинейные образующие. Однако эта возможность неединственна [11, 23]. Прямолинейная образующая оптимальна и тогда, когда  $\Lambda_w \neq 0$ , но поток над ней звуковой (фиг. 5, г, совпадающие  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристики нормальны  $if$ ).

Сравнения с близкими к оптимальным плоскими контурами с одним изломом из [20, 21] показали, что их аналоги из [11, 23] реализуют не менее 80-90% выигрыша по сравнению с клиньями. Почти мгновенное построение тысяч близких к оптимальным плоских образующих в рамках развитого в [11, 23] подхода позволило установить величину возможных выигрышей во всем диапазоне значений  $M_\infty$  и  $\tau$ , отвечающих сверхзвуковому обтеканию с присоединенным скачком. Для совершенного газа с  $\kappa = 1.4$  максимальные выигрыши по коэффициенту волнового сопротивления – величины порядка 1.6%, причем такие значения получаются при гиперзвуковом обтекании достаточно толстых тел ( $\tau = 0.2 \dots 0.5$ ). Выигрыши в области, отвечающей по-

ложительным коэффициентам отражения, не превышают 1%. Это делает неактуальным рассмотрение изображенных на фиг. 5, в контуров с двумя изломами.

Для скачков конечной интенсивности, для которых  $v_s, v > 0$ , в силу условий (1.2) и (1.3) ордината скачка  $y_\infty$  не может обратиться в нуль, ибо в таком случае первое слагаемое в равенстве (1.2) стало бы бесконечным при конечном втором слагаемом. Поэтому гладкие образующие рассматриваемого типа не могут начинаться на оси симметрии. Вспомнив решение той же задачи в приближении ФН, можно назвать первую причину получившегося ограничения: оптимальные головные части тел вращения без протока не обязаны быть остроконечными и обтекаться с присоединенным скачком. Если это так, то не работает метод контрольного контура, ибо с помощью интеграла вдоль отошедшего скачка нельзя выразить заданную длину тела. Если же в дополнение искомый оптимальный контур содержит торец, который в рамках уравнений Эйлера из-за ограничения на длину по-прежнему может оказаться участком краевого экстремума, то в рамках метода неопределенного контрольного контура невозможно к тому же сформулировать условие допустимости лишь одностороннего варьирования абсциссы торца. Наконец, из-за негладкой стыковки торца и участка двустороннего экстремума метод контрольного контура неприменим еще по той же причине, что и в случае обсуждавшихся выше внутренних изломов.

Отмеченные обстоятельства в развитие соображений, приводившихся в [10, 24, 25], оправдывают рассмотрение в качестве головных частей без протока, “подозреваемых на оптимальные” (при ограничении на длину), как и в приближении ФН и ФНБ, тел с торцом  $x = 0$ . При этом сначала нужно определить оптимальный размер торца и построить оптимальную или близкую к оптимальной примыкающую к торцу с изломом пологую образующую. С учетом сказанного выше эти проблемы решены в следующем разделе. Для “коротких” головных частей построенные гладкие образующие удовлетворяют всем отвечающим их варьированию условиям экстремума. Если максимально допустимая длина больше некоторой величины, то построенные гладкие, близкие к оптимальным пологие участки аналогичны гладким контурам из [11, 23]. Тела этого типа названы “длинными”. Затем нужно доказать, что торец – участок краевого экстремума. Эта проблема решается численно, сравнением сопротивлений тел с торцом и головных частей, получающихся при его допустимых варьированиях. Альтернативой подобной численной проверке могут стать формулировка и численное решение так называемой “сопряженной” задачи в рамках общего метода множителей Лагранжа. Для “подозреваемых на оптимальность” головных частей и множителей Лагранжа, удовлетворяющих правильно сформулированной сопряженной задаче, выражение для вариации волнового сопротивления принимает вид

$$\delta\chi = \dots + X_d \Delta x_d + \int_0^{y_d^\circ} y X^\circ \delta x dy \quad (1.6)$$

Многоточием обозначено присутствующее только у “длинных” тел слагаемое, аналогичное правой части равенства (1.5); интеграл берется вдоль торца (фиг. 2, а)  $id$ ;  $X_d$  и  $X^\circ$  – функции параметров потока и множителей Лагранжа, а  $\Delta x_d$  и  $\delta x$  – приращение  $x$  точки излома и вариация абсциссы торца. Допустимые  $\Delta x_d$  и  $\delta x$  неотрицательны. Поэтому, согласно выражению (1.6), условия оптимальности торца принимают вид  $X_d \geq 0$  и  $X^\circ \geq 0$ . Для коротких тел формулировка сопряженной задачи в рамках общего метода множителей Лагранжа дана в Приложении.

**2. Оптимальные и близкие к оптимальным по волновому сопротивлению осесимметричные головные части.** В данном разделе строятся “короткие” и “длинные” головные части, реализующие соответственно минимальное или близкое к минималь-

ному волновое сопротивление. Смысл введенных терминов поясняют фиг. 2, а и б. Для короткой головной части (фиг. 2, б) приходящая в конечную точку  $f$  оптимального контура  $idf$   $C^-$ -характеристика  $wcf$  пересекает часть пучка волн разрежения из  $C^+$ -характеристик, который возникает при обтекании излома в точке стыковки торца  $id$  и пологого участка  $df$ . Совпадение точек  $w$  и  $c$  отвечает границе между короткими и длинными головными частями. При больших удлинениях  $l = x_f/y_f$ , отвечающих длинным головным частям,  $C^-$ -характеристика  $wf$  целиком располагается вне указанного пучка (фиг. 2, а).

Согласно приводимым ниже результатам, переход от коротких к длинным головным частям, как правило, происходит при удлинениях  $l$ , близких к единице и даже меньших единицы. В этом смысле термин “длинная” (головная часть) отличается от общепринятого, а при заданном  $l$  до построения ее образующей заранее неизвестно, короткой или длинной она окажется.

Построение коротких и длинных головных частей начиналось с расчета обтекания осесимметричного торца. Уравнения Эйлера интегрировались с использованием процесса установления и алгоритмов [26–28] для расчета областей до- и трансзвукового течения и с помощью маршевой схемы и алгоритма для расчета сверхзвуковых течений с переменной ориентацией вектора скорости. В основе этих алгоритмов лежат схема Годунова и ее сверхзвуковой стационарный аналог [29], их модификации [30–33] в направлении повышения порядка аппроксимации в подобластях непрерывности параметров и способ построения головного скачка [34]. За торцом задавалась наклонная проницаемая прямолинейная граница, к которой примыкали вспомогательные (окаймляющие) ячейки с постоянными параметрами, равными параметрам набегающего потока. Задание такой границы обеспечивало аккуратный счет пучка волн разрежения.

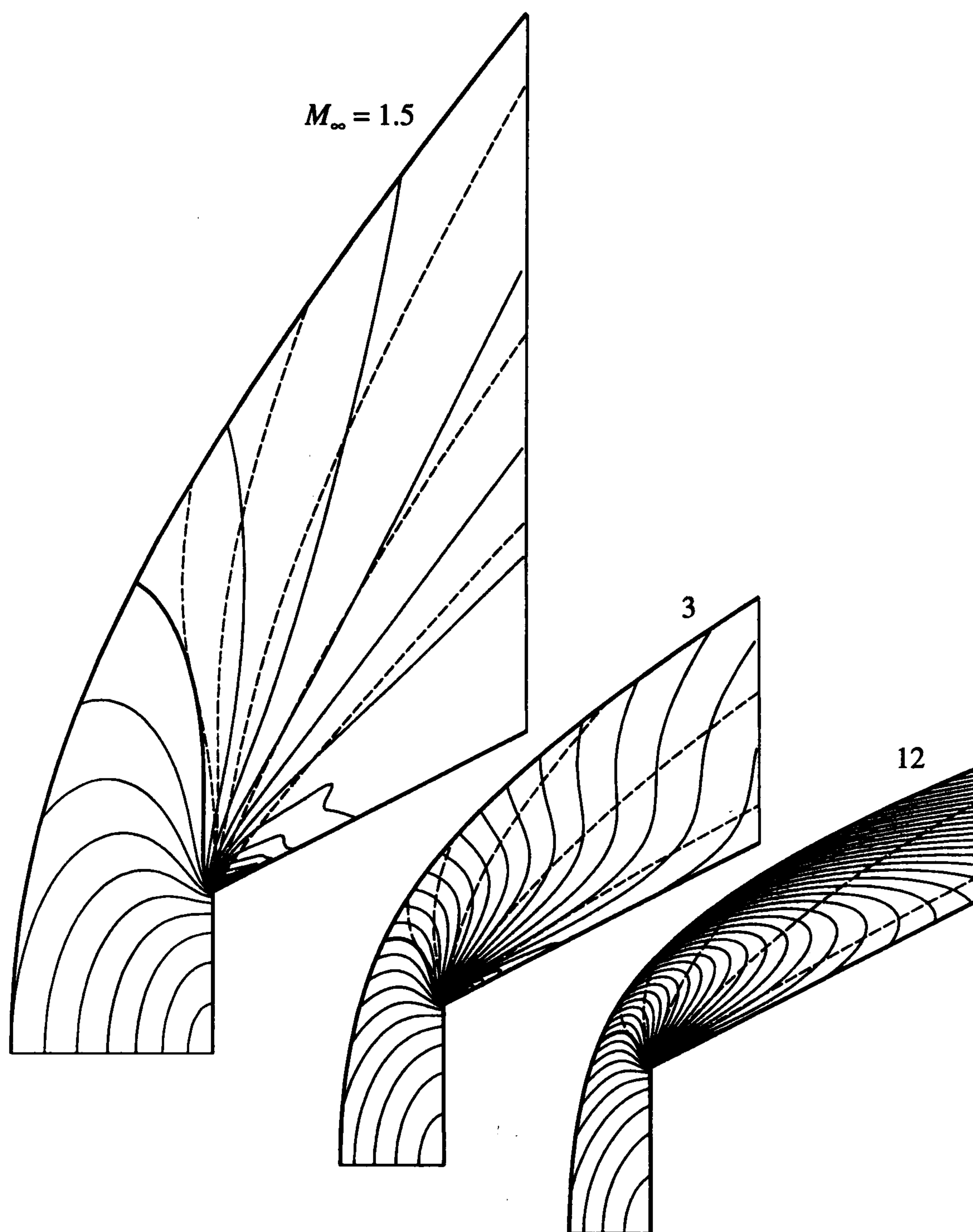
Примеры расчетов, выполненных для нескольких чисел Маха набегающего потока  $M_\infty$ , представлены на фиг. 6. Приводимые здесь и далее результаты отвечают обтеканию тел совершенным газом с  $\kappa = 1.4$ . Для каждого  $M_\infty$  показаны выделяемый в процессе счета головной скачок, через равные интервалы  $\Delta M = 0.1$  изомахи (жирная:  $M = 1$ ) и несколько выходящих из точки излома  $C^+$ -характеристик (штриховые линии). Последние построены по найденным установившимся полям параметров интегрированием уравнения  $dy/dx = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)$ . Представление о разностных сетках при суммарном числе ячеек порядка  $7 \cdot 10^3$  дает фиг. 7. На ней для  $M_\infty = 3$  приведены вдвое по каждому направлению разреженные линии сеток, которые применялись при расчете обтекания торца (левая часть фиг. 7) и конуса (правая часть) с отошедшим скачком. Выделены границы подобластей с сетками разной структуры и нарисовано несколько линий тока, построенных интегрированием уравнения  $dy/dx = \operatorname{tg} \vartheta$ .

Следующий этап процедуры построения – поиск требуемого контура среди коротких оптимальных головных частей заданного удлинения  $l = x_f/y_f$ . При этом строится семейство замыкающих экстремальных  $C^-$ -характеристик  $cf$ , координаты конечной точки  $f$  которых попадают на прямую  $x = ly$ , благодаря чему все отвечающие им головные части имеют заданное удлинение. Экстремальные  $C^-$ -характеристики  $cf$  выпускаются из разных точек разных замыкающих  $C^+$ -характеристик пучка волн разрежения с центром в конечной точке торца  $d$ . При этом используются условие постоянства полной энтальпии  $I$  во всем потоке

$$2i(p, \rho) + V^2 = 2I_\infty \equiv 2i(p_\infty, \rho_\infty) + V_\infty^2 \quad (2.1)$$

найденная при расчете обтекания торца зависимость энтропии  $s$  от  $\psi$

$$s = S(\psi) \quad \text{при} \quad 0 \leq \psi \leq \psi_c \quad (2.2)$$

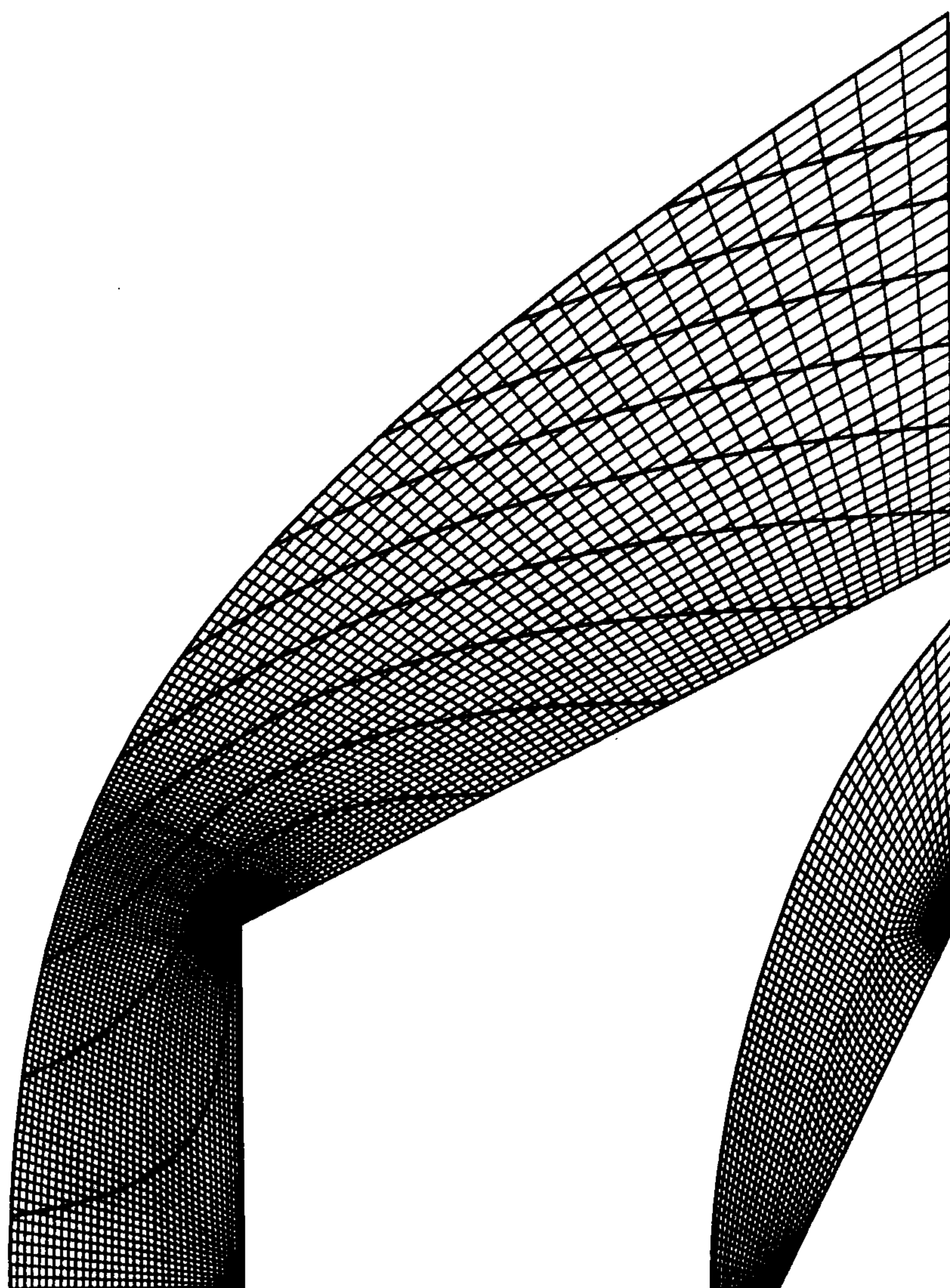


Фиг. 6

а также необходимое условие экстремума (1.3) на  $cf$  и дифференциальные связи, включая условие совместности [10, 35], на  $C^-$ -характеристике

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{k\rho V \sin \alpha}, \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{k\rho V \sin \alpha}, \quad \frac{d\vartheta}{d\psi} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha dp}{\rho V^2 d\psi} + \frac{\sin \vartheta}{k\gamma^2 \rho V} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) интегрировались по  $\psi$  от точки  $s$  выбранной  $C^+$ -характеристики  $dc$  пучка волн разрежения от  $\psi = \psi_c > 0$  до  $\psi_f = 0$  одновременно с решением конечных уравнений (1.3), (2.1) и (2.2). Постоянная  $\mu$  в правой части уравнения (1.3) вычислялась по параметрам в точке  $s$ . На самом деле уравнение (1.3) служило только для контроля. При расчетах вместо него использовался результат дифференцирования уравнения (1.3) по  $\psi$  с учетом соотношений (2.1), (2.2), уравнения состояния  $i = i(p, \rho)$ , выражения для  $a^2 = i_p / (1 - \rho i_p)$  и уравнений (2.3). Результирующее уравнение интегрировалось вместе с (2.3). Если удлинение  $l$  невелико, то произвол в выборе точки  $s$  на замыкающей  $C^+$ -характеристике пучка волн разрежения позволял найти такие  $x_f$  и  $y_f$ , что их отношение равно  $l$ .



Фиг. 7

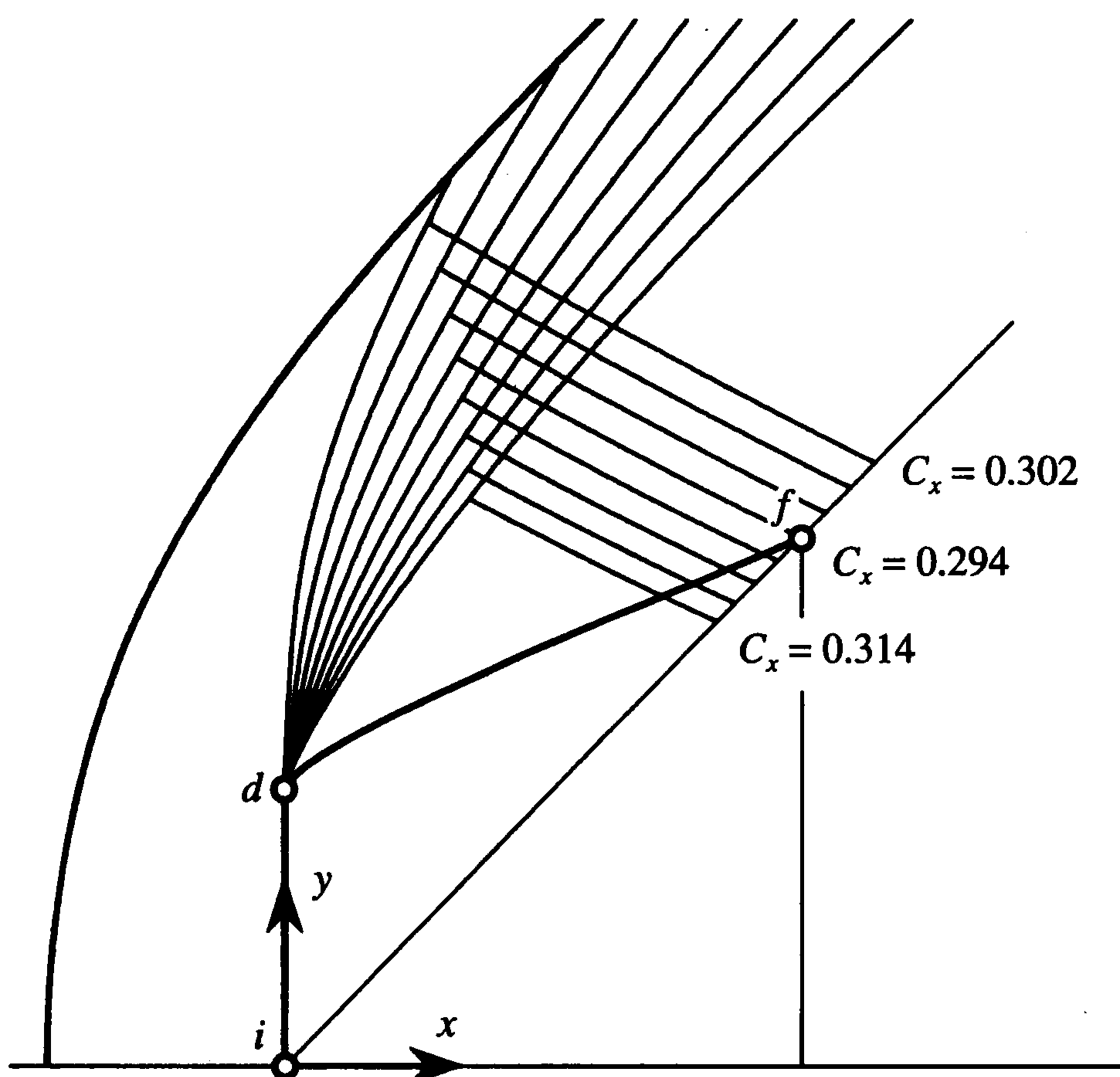
Реализация описанной процедуры для разных замыкающих характеристик пучка дает множество экстремальных  $C$ -характеристик  $cf$ , которые, отвечая головным частям с заданным  $l$ , в масштабе фиксированного торца имеют разную длину и разные волновые сопротивления  $\chi$ . Последнее равно сумме сопротивления торца  $\chi_{id}$  и волнового сопротивления пологого участка  $\chi_{df}$ . Сопротивление  $\chi_{df}$  вычислялось как разность соответствующих потоков по  $cf$  и  $dc$ , а различие размеров учитывает коэффициент волнового сопротивления  $C_x$ , причем

$$C_x = \frac{\chi_{id} + \chi_{df}}{y_f^2} - p_\infty, \quad \chi_{df} = \int_f^c \left[ p \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\rho V \sin \alpha} + u \right] d\psi - \int_d^c \left[ p \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{\rho V \sin \alpha} + u \right] d\psi$$

Здесь и далее нормирующий множитель в выражении для функции тока (см. уравнение (2.3) и формулу для  $y_\infty(\psi)$  после (1.3))  $k = 2$ , а за масштабы скорости, плотности и давления взяты (“градус” метит размерные величины)  $V_\infty^\circ$ ,  $\rho_\infty^\circ$  и  $\rho_\infty^\circ (V_\infty^\circ)^2$ .

Поэтому  $u_\infty = V_\infty = \rho_\infty = 1$ , а  $p_\infty = 1/(\kappa M_\infty^2)$ .

Сравнение коэффициентов  $C_x$  головных частей, построенных для разных точек  $c$ , либо выявит ту, которая для заданного удлинения  $l$  реализует минимум  $C_x$ , либо не обнаружит таковой. Первая возможность соответствует построению короткой головной части, подозреваемой на минимум волнового сопротивления (фиг. 8). Вторая имеет место, когда точка  $c$ , обеспечивающая заданное удлинение, поднимаясь к



Фиг. 8

скачку по  $S^+$ -характеристикам, замыкающим пучки все возрастающей интенсивности, попадет на него раньше, чем найдется минимум  $C_x$ . В этих случаях  $S^-$ -характеристика, приходящая в точку  $f$  искомого контура, начинается на скачке вне начального пучка волн разрежения (фиг. 2, а,  $wf$  – экстремальная замыкающая  $S^-$ -характеристика).

Порядок построения участков  $df$  близких к оптимальным гладких (без изломов) длинных головных частей отличается от порядка построения их коротких аналогов. При выбранной замыкающей  $S^+$ -характеристике пучка с “центром” в точке  $d$  произвол, позволявший строить короткие головные части заданного удлинения, состоял в выборе положения на указанной характеристике точки  $s$ . Для длинных головных частей роль такого произвола (также при выбранной замыкающей  $S^+$ -характеристике  $di^\circ$ ) играл выбор угла наклона скачка  $\sigma_w$  в точке  $w$ , причем  $\alpha_\infty < \sigma_w < \sigma_{i^\circ}$ . При выбранном  $\sigma_w$  сначала по соотношениям на скачке определялись параметры за ним. Для совершенного газа (индекс  $w$  опущен) [35]

$$p = p_\infty \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_\infty^2 \sin^2 \sigma - 1) \right], \quad \rho = \rho_\infty \left[ \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + \frac{2}{(\kappa+1)M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right]$$

$$u = V_\infty \left[ 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left( \sin^2 \sigma - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \right], \quad v = V_\infty \frac{2}{\kappa+1} \left( \sin^2 \sigma - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \operatorname{ctg} \sigma \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v}{u}, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad M = \frac{V}{a}$$

После определения параметров за скачком в точке  $w$  и задания произвольных  $x_w$  и  $y_w > 0$  (например,  $x_w = 0, y_w = 1$ ) из равенств (1.2) и (1.3), записанных в этой точке, вычислялись  $\mu$  и  $\mu^\circ$ . Если коэффициент  $\Lambda_w = 0$ , то  $\mu^\circ = \mu$ . В противном случае  $\mu^\circ \neq \mu$ , и для построенной далее “близкой к оптимальной” головной части, не выполняется

необходимое условие экстремума в точке  $w$ , упоминавшееся в разд. 1. Совместное решение уравнений (1.2), (2.1), (2.3), (2.4) и уравнения, получающегося в результате дифференцирования по  $\psi$  равенства (1.3), позволял построить отрезки  $wi^\circ$  и  $wf^\circ$  ударной волны и  $C^-$ -характеристики до точки с заранее известным  $\sigma = \sigma_{i^\circ}$ . Поскольку, однако, на участке  $wf^\circ$  экстремальной  $C^-$ -характеристики  $wf$  теперь заранее неизвестна функция  $S(\psi)$ , алгоритм расчета отличался от описанного для построения экстремальной  $C^-$ -характеристики  $cf$  короткой головной части.

Расчет каждой пары новых, отвечающих меньшему значению  $\psi$  и большему значению  $\sigma$  точек скачка и  $C^-$ -характеристики начинался с задания величины  $\sigma$ . Затем по формулам (2.4) находились необходимые параметры за скачком, которым здесь приписывался индекс  $s$ . По ним и параметрам "предыдущей итерации" в соответствующей точке экстремальной характеристики определялись  $u_\infty$  и  $\psi$ :

$$u_\infty = \frac{\mu^\circ V^2 \sqrt{M^2 - 1}}{\rho_\infty u_\infty v_s (u_\infty - u_s)} \frac{p_s \rho}{p \rho_s} [(1 + \Omega M^2)v + u \sqrt{M^2 - 1}]^{-1}, \quad \psi = u_\infty^2 \rho_\infty u_\infty$$

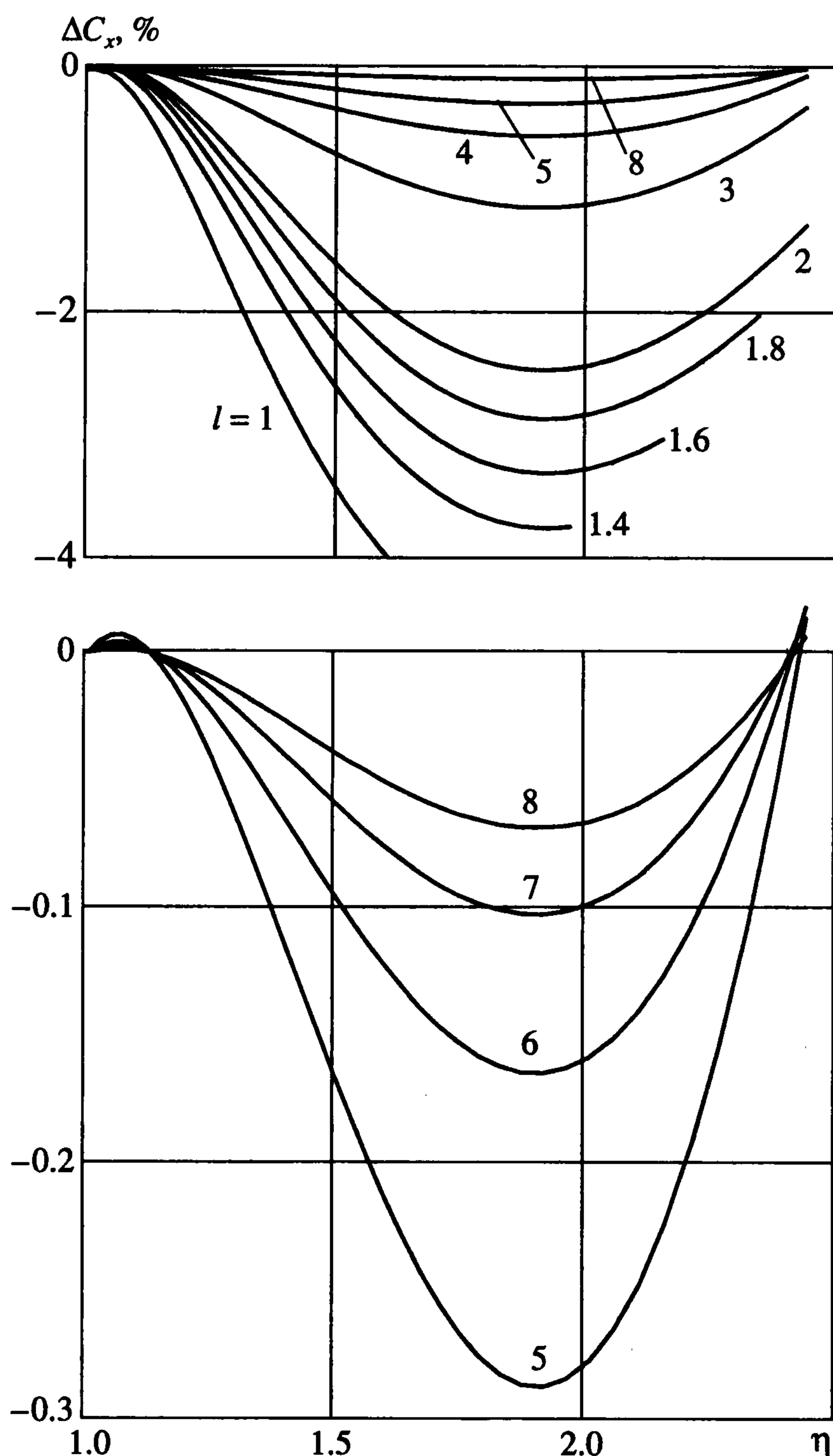
Здесь величины без индексов – отвечающие тому же  $\psi$  параметры на  $C^-$ -характеристике. В первой итерации они полагались равными параметрам в ее предыдущей точке. По рассчитанным  $\psi$  и параметрам за скачком определялась зависимость  $S(\psi)$ , а ее знание позволяло описанным ранее способом найти параметры и координаты новой точки  $C^-$ -характеристики. Итерации продолжались до сходимости по  $\psi$ , а расчет – до достижения значения  $\sigma = \sigma_{i^\circ}$ .

Изначально  $x_w$  и  $y_w$  задавались произвольно. Поэтому получившиеся в результате координаты концевой точки головного скачка не совпадали с известными из расчета обтекания торца  $x_{i^\circ}$  и  $y_{i^\circ}$ . Пусть  $K$  – отношение  $y_{i^\circ}$  к найденному значению радиальной координаты концевой точки головного скачка. Уравнения рассматриваемого течения инвариантны относительно одновременного умножения координат  $x$  и  $y$  на любое положительное число и сдвига вдоль оси симметрии. В соответствии с этим умножение найденных координат экстремальных скачка и  $C^-$ -характеристики на  $K$ , а  $\psi$  – на  $K^2$  и необходимый сдвиг вдоль оси  $x$  обеспечивали согласование в точке  $i^\circ$  координат и функции тока.

При  $0 = \psi_f \leq \psi \leq \psi_{i^\circ} = \psi_{f^\circ}$  функция  $S(\psi)$  известна из расчета обтекания торца. Поэтому построение участка  $f^\circ f$  характеристики  $wf$  осуществлялось так же, как всей экстремальной характеристики для коротких головных частей. Произвол в выборе  $\sigma_w$  позволял строить длинные близкие к оптимальным головные части заданного удлинения. Коэффициент  $C_x$  построенных головных частей в силу интегрального закона сохранения  $x$ -компоненты количества движения равен

$$C_x = \frac{1}{2} \int_{y_f \psi_f = 0}^{\psi_w} \left[ p \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\rho V \sin \alpha} + u \right] d\psi - \frac{\Psi_w}{y_f} \left( \frac{1}{\kappa M_\infty^2} + 1 \right) - \frac{1}{\kappa M_\infty^2}$$

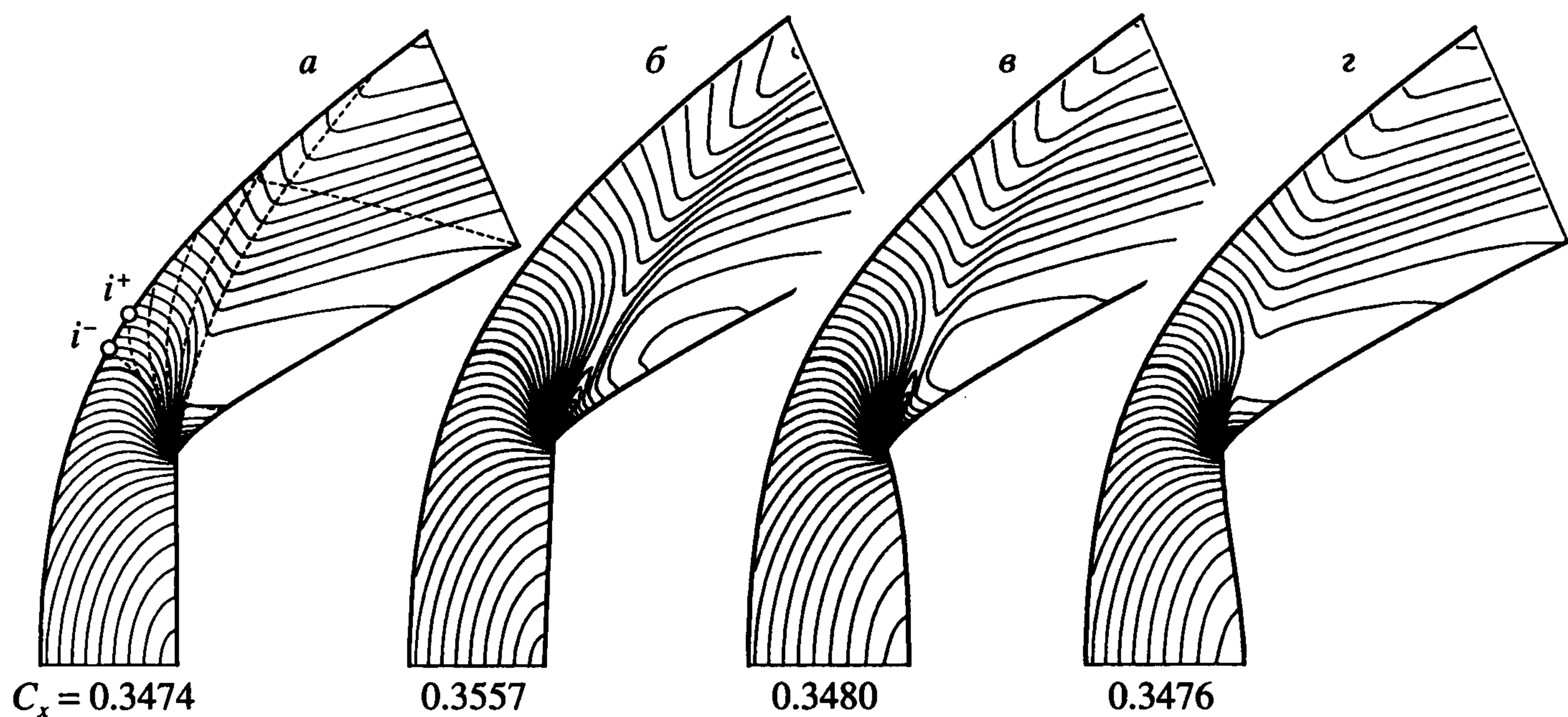
Близкая к оптимальной длинная головная часть определялась по минимуму  $C_x$  как функции  $y_{i^\circ}$ . Фиг. 9 демонстрирует процесс построения длинных, близких к оптимальным головных частей для  $M_\infty = 3$ . На ней для разных удлинений (числа около кривых) представлены приращения  $\Delta C_x = (C_x / C_x|_{\eta=1} - 1) \times 100$  в зависимости от  $\eta = y_{i^\circ} / y_{i^+}$ . Здесь  $C_x|_{\eta=1}$  – величина соответствующего коэффициента головной части фиксированного удлинения, построенной для  $y_{i^\circ} = y_{i^+}$ ,  $C_x$  – их величина (при том же значении  $l$ ) для головных частей с  $y_{i^\circ} > y_{i^+}$ , а  $i^+$  – общая точка головного скачка (фиг. 2, а) и



Фиг. 9

$C^+$ -характеристики  $di^+$ , касающейся звуковой линии. Значения  $\eta$  точек минимума  $C_x$  и  $\Delta C_x$  совпадают. Правые точки всех кривых отвечают треугольникам  $i^\circ wf^\circ$ , выродившимся в точку. Кривая, отвечающая  $l = 1$ , монотонно убывает, не достигнув минимума. Для больших  $\eta$  решений с треугольником  $i^\circ wf^\circ$ , обеспечивающих равенство  $l = 1$ , нет. Это значит, что для  $l = 1$  оптимальная головная часть не длинная, а короткая.

У кривых, построенных для  $1.4 \leq l \leq 8.0$ , есть единственный минимум, который реализуется при фиксированном значении  $y_f$ . Последнее отвечает тому решению в классе коротких головных частей (фиг. 2, б), у которого начальная точка с замыкающей  $C^-$ -характеристики  $cf$ , поднимаясь по замыкающей  $C^+$ -характеристике пучка волн разрежения с центром в точке  $d$ , оказывается одновременно и точкой указанной  $C^+$ -характеристики, и точкой головного скачка. Оптимальные (или близкие к таковым) головные части больших удлинений получаются, если именно к этой точке скачка, возникающего при обтекании торца, пристроить соответствующие (свои



Фиг. 10

для каждого  $l$ ) треугольнику  $i^\circ wf^\circ$  по схеме фиг. 2, а. Этим и объясняется постоянство  $\eta$ , при которых реализуются минимумы кривых для  $1.4 \leq l \leq 8.0$ . И для коротких, и для длинных головных частей оптимальный относительный размер торца  $h = y_d/y_f$

До сих пор предполагалось, что торец – участок краевого экстремума, появляющийся из-за ограничения максимально допустимой длины головной части. Напомним, что в рамках формулы Ньютона торец – участок краевого экстремума не только из-за ограничения длины, но и в силу ограничения  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  применимости формулы (1.1). Последнее ограничение запрещало, в частности, внутренние лунки (с  $\delta x \geq 0$  при  $0 \leq y < 1$ ), введение которых в рамках ФН уменьшает сопротивления на величины порядка  $(\delta x')^2$ . Допустимые в рамках (1.1) вариации торца с  $\Delta x_d \geq 0$  при оптимальном выборе его размера и угла излома ( $\vartheta_{d+} = \pi/4$ ) ведут к пропорциональному  $\Delta x_d$  росту сопротивления (в приближении ФН). В рамках уравнений Эйлера допустимы любые, не увеличивающие длину головной части варьирования торца, а описанные выше алгоритмы их построения пока оставляли открытым вопрос о влиянии на  $C_x$  его допустимого (не увеличивающего длину) варьирования. Вопрос об оптимальности торца как участка краевого экстремума исследовался численно.

На фиг. 10 для  $M_\infty = 3$  и  $l = 0.8$  изображены контуры короткой головной части, контуры, полученные тремя разными способами допустимого варьирования торца, и изомахи (с шагом  $\Delta M = 0.05$ , жирные кривые – звуковые линии), а на фиг. 10, а штрихами нарисовано несколько  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристик. Приведенные на фиг. 10 значения  $C_x$ , найденные из решения соответствующих прямых задач, подтверждают, что все допустимые варьирования торца увеличивают волновое сопротивление. Наибольшее его увеличение наблюдалось при “стачивании” торца (фиг. 10, б;  $\Delta x_d = 0.05y_d$ ), заметное – для лунки с наклонной касательной в верхней точке (фиг. 10, в;  $\delta x_i = 0.1y_d$ ,  $\delta\vartheta_{d-} \approx 17^\circ$ ) и незначительное – для лунки с вертикальной касательной в верхней точке (фиг. 10, г;  $\delta x_i = 0.1y_d$ ,  $\delta\vartheta_{d-} = 0$ ).

Малое увеличение коэффициента сопротивления в двух последних случаях и то, что в приближении ФН торец – двусторонняя экстремаль (не удовлетворяющая необходимому условию минимума  $x' \geq 1$ ), сделали целесообразным аналогичные (хотя и недопустимые при фиксированном удлинении) варьирования торца симметричным относительно оси  $y$  способом, но с увеличением длины. При варьировании с  $\delta\vartheta_{d-} = 0$  уменьшение коэффициента сопротивления  $C_x$  получилось на такую же величину,

Таблица 1

$M_\infty$	$l$	$h \cdot 10^3$	$h^N \cdot 10^3$	$\vartheta_{d+}$ , град	$\vartheta_f$ , град	$\vartheta_f^N$ , град	$C_x \cdot 10^4$	$\Delta C_x^{con}$ , %	$\Delta C_x^N, \Delta C_x^{ml}$ ( $\Delta C_x^{m2}$ ), %	$\Delta C_{xNN}^{con}$ , %	
1.5 (S)	0.25	810	777	57	28	39	4316	50	6	21	
	0.50	724	600	55	20	35	3469	75	24	32	
	1.00	595	351	54	15	28	2548	102	43	33	
	2.00	399	121	55	11	18	1578	101	33	25	
1.5 (L)	4.00	175	23	55	7	10	720	50	15	20	
	8.00	42	3	55	3	5.3	241	48	12 (3.3)	19	
	12.0	15	1.0	55	1.8	3.6	117	57	16 (2.6)	19	
	20.0	4	0.2	55	0.9	2.1	45	77	25 (3.4)	19	
2 (L)	2.00	297	121	55	14	18	1650	59	14, 12	25	
	4.00	109	23	55	8	10	680	33	6.0, 3.8	20	
	8.00	24	3	55	4	5.3	223	35	6.1, 2.4 (2.0)	19	
	12.0	10	1.0	55	2.2	3.6	109.4	44	9.7, 4.4 (2.1)	19	
20.0	2.5	0.2	55	1.1	2.1	42.9	59	17, 9.0 (2.7)	19		
	3 (S)	0.25	784	777	61	34	39	5605	38	1.2	21
		0.50	654	600	59	29	35	4525	61	3.6	32
		1.00	452	351	58	24	28	3059	88	6.7	33
3 (L)	2.00	238	121	57	17	18	1566	49	7.0	25	
	4.00	79	23	57	10	10	605	28	2.9 (3.1)	20	
	8.00	18	3	57	5	5.3	198	27	2.7 (1.0)	19	
	12.0	6.5	1	57	2.8	3.6	98.9	32	4.7 (1.8)	19	
20.0	2.3	0.2	57	1.4	2.1	39.9	43	9.4 (1.7)	19		
	4 (S)	0.25	776	777	61	35	39	5801	37	0.9	21
		0.50	633	600	60	31	35	4640	62	1.6	32
		1.00	430	351	56	27	28	3049	81	4.6, 21	33
4 (L)	2.00	220	121	56	19	18	1499	49	5.5, 10	25	
	4.00	71	23	56	11	10	558	28	2.4, 2.5 (2.4)	20	
	8.00	16	3	56	5	5.3	182	24	1.6, 1.0 (0.0)	19	
	12.0	6	1.0	56	3	3.6	91.4	27	2.8, 1.9 (0.9)	19	
20.0	2	0.2	56	1.8	2.1	37.5	36	6.1, 3.5 (1.9)	19		
	6 (S)	0.25	770	777	62	36	39	5942	36	0.8	21
		0.50	615	600	60	33	35	4702	63	0.8	32
		1.00	420	351	54	28	28	3007	79	3.8, 20	33
6 (L)	2.00	209	121	54	20	18	1428	51	4.7, 10	25	
	4.00	65	23	54	12	10	506	31	2.4, 2.2	20	
	8.00	15	3	54	6	5.3	161	23	0.9, 0.2	19	
	12.0	7.8	1.0	54	4.0	3.6	81.4	23	1.1, 0.4	19	
20.0	2.2	0.2	54	2.2	2.1	33.9	28	3.0, 1.7	19		
	10 (S)	0.25	765	777	62	37	39	6013	36	3.5	21
		0.50	608	600	60	34	35	4725	64	4.3	32
		1.00	419	351	52	29	28	2982	78	3.5, 20	33
10 (L)	2.00	205	121	52	22	18	1382	53	4.3, 9.7	25	
	4.00	63	23	52	13	10	466	36	2.3, 2.1	20	
	8.00	14	3	52	7	5.3	140	27	1.2, 0.6	19	
	12.0	5.5	1.0	52	4.9	3.6	69.9	23.0	0.9, 0.3	19	
20.0	2.4	0.2	52	2.8	2.1	29.3	22.6	1.3, 0.7	19		

что и его уменьшение в случае фиг. 10, г, т.е. величина  $\delta C_x$  пропорциональна  $\delta x_i$ , и торец – не участок двустороннего экстремума.

Результаты расчета коротких (S) и длинных (L) головных частей собраны в табл. 1. Наряду с  $M_\infty$  и удлинением  $l$  приведены относительные размеры их торцов  $h = y_d/y_f$

углы наклона в начальных  $\vartheta_{d+}$  и концевых  $\vartheta_f$  точках их пологих участков  $df$ , аналогичные характеристики оптимальных ньютоновских тел ( $h^N$  и  $\vartheta_f^N$  при  $\vartheta_{d+}^N = 45^\circ$ ), коэффициенты сопротивления  $C_x$  оптимальных или близких к оптимальным головных частей и относительные проигрыши (в процентах) конусов ( $\Delta C_x^{\text{con}}$ ), ньютоновских ( $\Delta C_x^N$  – первое или единственное число предпоследнего столбца) и оптимальных степенных тел ( $\Delta C_x^{\text{m1}}$  – второе число, а  $\Delta C_x^{\text{m2}}$  – число в скобках). Если  $C_x^{\text{con}}$ ,  $C_x^N$  и  $C_x^{\text{mk}}$  – рассчитанные по уравнениям Эйлера коэффициенты волнового сопротивления соответствующих головных частей, то  $\Delta C_x^{\text{con}} = (C_x^{\text{con}}/C_x - 1) \times 100$ , а  $\Delta C_x^N$  и  $\Delta C_x^{\text{mk}}$  вычислялись аналогично. Значения  $C_x^{\text{m1}}$  брались из [36], где для  $M_\infty \geq 2$  рассчитывалось обтекание затупленных однопараметрических оптимальных головных частей средних и больших удлинений ( $l \geq 1$ ) с уравнением образующей:  $y/y_f = (x/x_f)^m$  и определялись показатели степени  $m$ , обеспечивающие для данных  $M_\infty$  и  $l$  минимум  $C_x$ . Значения  $C_x^{\text{m2}}$  оптимальных остроконечных двухпараметрических головных частей свободно предоставлены автором работы [37].

При заданном удлинении  $l > 0$  построение оптимальной головной части (ОГЧ) в рамках ФН начинается (см., например, [11]) с численного определения корня  $x'_f \equiv q_f > 1$  трансцендентного уравнения

$$q_f(4q^2 + 3q^4 - 7 - 4\ln q)_f(1 + q_f^2)^{-2} = 4l \quad (2.5)$$

Если  $l > 4$ , то  $q_f \approx 4l/3$ . После определения корня уравнения (2.5)  $h^N$  и  $\vartheta_f^N$  определялись формулами (далее знак  $\approx$  для  $l > 4$ )

$$h^N = \frac{4q_f}{(1 + q_f^2)^2} \approx \frac{27}{2l(8l^2 + 9)}, \quad \vartheta_f^N = \arctg \frac{1}{q_f} \approx \arctg \frac{3}{4l} \approx \frac{3}{4l}$$

а участок  $df$  ньютоновского контура строится по параметрическим соотношениям

$$x = \frac{q_f}{4(1 + q_f^2)^2}(4q^2 + 3q^4 - 7 - 4\ln q), \quad y = \frac{q_f(1 + q^2)^2}{q(1 + q^2)_f}, \quad 1 \leq x' \equiv q \leq q_f$$

Если от  $x$  и  $y$  перейти к  $x^\circ = x/h^N$  и  $y^\circ = y/h^N$ , то они принимают универсальный вид

$$x^\circ = (4q^2 + 3q^4 - 7 - 4\ln q)/16, \quad y^\circ = (1 + q^2)^2/(4q), \quad 1 \leq x' \equiv q < \infty \quad (2.6)$$

В рамках уравнений Эйлера сначала установлением, а затем по сверхзвуковой маршевой схеме рассчитывалось обтекание именно такого (одного для фиксированного  $M_\infty$ ) тела. Одновременно определялись  $C_x^N$  тех его начальных участков, которые через  $q_f$  из (2.5) отвечают заданным удлинениям  $l$ . Для сравнения  $C_x^{\text{con}}$  и  $C_x^N$  рассчитывались по формуле (1.1). Согласно ей, на теле  $c_p \equiv (p - p_\infty)/(\rho V_\infty^2) = 1/(1 + x'^2) = 1/(1 + q^2)$ . На конусе  $c_p = 1/(1 + l^2)$ , а на торце  $c_p = 1$ . С учетом этого и соотношений (2.6) имеем

$$C_{xN}^{\text{con}} = \frac{1}{1 + l^2}, \quad C_{xN}^N = \frac{(3q^4 + 10q^2 + 4\ln q + 2q^{-2} + 17)_f}{32y_f^{\circ 2}} \approx \frac{27(8l^2 + 15)}{64l^2(4l^2 + 9)}, \quad h^N = \frac{1}{y_f^\circ} \quad (2.7)$$

Нижний индекс  $N$  означает, что соответствующие коэффициенты определены по ФН. Согласно формуле (2.7),  $C_{xN}^{\text{con}}/C_{xN}^N \rightarrow 32/27 \approx 1.185$  при  $l \rightarrow \infty$ . В последнем столбце табл. 1 приведена величина  $\Delta C_{xNN}^{\text{con}} = (C_{xN}^{\text{con}}/C_{xN}^N - 1) \times 100$ .

Сравнение  $h$  и  $h^N$  показывает, что торцы оптимальных ньютоновских тел почти всегда меньше. Различие монотонно растет с ростом удлинений и с уменьшением  $M_\infty$ . Исключения – самые короткие тела для гиперзвуковых скоростей ( $l = 0.25$ ,  $M_\infty = 6$  и  $10$ ). Здесь  $h$  слегка меньше, чем  $h^N$ . Углы излома ньютоновских тел всегда больше ( $\vartheta_{d+}^N = 45^\circ$ , а  $\vartheta_{d+} = 52\text{--}62^\circ$ ). Для углов наклона в их концевых точках в основном имеет место обратное неравенство. В результате ньютоновские пологие участки менее выпуклы. Из-за этого и меньших углов наклона к оси  $x$  давление на концевых участках оптимальных тел (вблизи точки  $f$ ) меньше, чем на ньютоновских.

Сравнение значений  $\Delta C_x^N$ ,  $\Delta C_x^{\text{con}}$  и  $\Delta C_{xNN}^{\text{con}}$  – рассчитанных в рамках ФН проигрышей конусов по сравнению с ньютоновскими оптимальными головными частями выявляет плюсы и минусы ФН. При  $M_\infty \geq 3$  для всех удлинений величина  $\Delta C_x^N$  составляет 0.5–7%, т.е. на один-два порядка меньше  $\Delta C_x^{\text{con}}$ . Для  $M_\infty = 1.5$  и  $0.5 \leq l \leq 8.0$  величина  $\Delta C_x^N$  превышает 10%, достигая максимума в 43% для  $l = 1$ . Однако и в этих случаях  $\Delta C_x^N$  в 2.4–4 раза меньше  $\Delta C_x^{\text{con}}$ . Это свидетельствует об удивительной работоспособности ФН в задачах оптимального профилирования, при неправильном определении с ее помощью волнового сопротивления (см. ниже). Такое свойство ФН было обнаружено [11, 22, 38, 39] в задачах оптимального профилирования тел, обтекаемых с присоединенными скачками.

Превышение  $\Delta C_{xNN}^{\text{con}}$  сопротивлений конусов над сопротивлениями ньютоновских головных частей в рамках ФН во всех рассчитанных примерах много меньше, чем в приближении уравнений Эйлера. Причину этого раскрывает табл. 2, где сравниваются коэффициенты сопротивления  $C_x$  конусов и ньютоновских тел, рассчитанные по ФН ( $\Delta C_{xNN}^{\text{con}}$ ) и по уравнениям Эйлера ( $\Delta C_{xNE}^{\text{con}}$ ). Там же приведены погрешности (в процентах) ФН при расчете значений  $C_x$  для конусов  $\delta C_x^{\text{con}} = (C_{xN}^{\text{con}}/C_{xE}^{\text{con}} - 1) \times 100$  и ньютоновских тел ( $\delta C_x^N$ ). ФН может и завышать ( $\delta C_x > 0$ ), и занижать ( $\delta C_x < 0$ ) указанные коэффициенты, однако всегда она “работает в пользу” конусов. Поэтому конусы в рамках ФН проигрывают ньютоновским головным частям намного меньше, чем в приближении уравнений Эйлера. Ранее сравнение их коэффициентов сопротивления  $C_x$  проводилось только с использованием ФН. Так как  $\Delta C_{xNN}^{\text{con}} < \Delta C_{xNE}^{\text{con}}$ , причем весьма значительно, то такое сравнение не полностью раскрывало преимущества ньютоновских головных частей. Для конусов при  $M_\infty \geq 3$  рост погрешностей ФН с уменьшением параметра гиперзвукового подобия [35]  $K = M_\infty \tau$  имеет место при  $l \geq 1$ , когда скачок присоединен к вершине конуса.

Причину роста коэффициентов сопротивления  $C_x$  ньютоновских тел объясняет фиг. 11, отвечающая  $M_\infty = 1.5$  и  $l = 0.25$ . На ней показаны изомахи (фиг. 11, а и б;  $\Delta M = 0.1$ , жирные кривые – линии  $M = 1$  и размазанный скачок), изобары (фиг. 11, в;  $\Delta p/p_\infty = 0.05$ , жирная кривая  $p/p_\infty = 1$ ) и линии тока (фиг. 11, в и г). При обтекании излома в данном случае имеют место перерасширение и последующее торможение по-

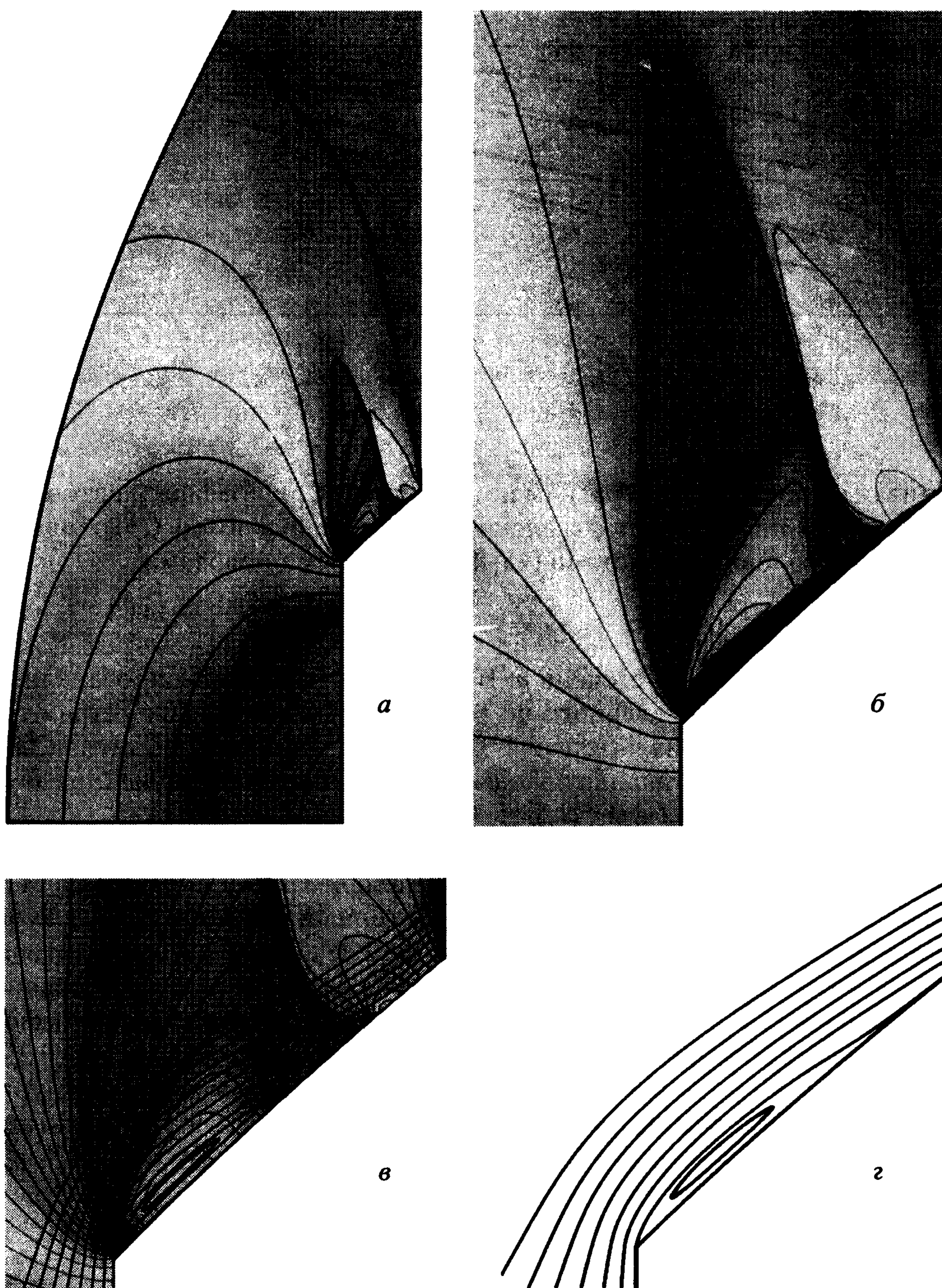
Таблица 2

$M_\infty$	$l$	$K = M_\infty \tau$	$\delta C_x^{\text{con}}, \%$	$\delta C_x^N, \%$	$\Delta C_{xNN}^{\text{con}}, \%$	$\Delta C_{xNE}^{\text{con}}, \%$
1.5	0.25	6	45	71	21	42
	0.50	3	32	41	32	41
	1.00	1.5	-3	3	33	41
	2.00	0.75	-37	-24	25	51
	4.00	0.375	-45	-41	20	31
	8.00	0.1875	-57	-52	19	33
3	0.25	12	22	37	21	36
	0.50	6	10	30	32	56
	1.00	3	-13	15	33	76
	2.00	1.5	-14	-4	25	39
	4.00	0.75	-24	-21	20	24
	8.00	0.375	-39	-36	19	23
6	0.25	24	16	30	21	35
	0.50	12	4	28	32	62
	1.00	6	-7	20	33	72
	2.00	3	-7	7	25	44
	4.00	1.5	-12	-5	20	28
	8.00	0.75	-22	-20	19	22
12	0.25	48	15	28	21	35
	0.50	24	3	28	32	64
	1.00	12	-6	22	33	72
	2.00	6	-5	12	25	48
	4.00	3	-7	5	20	34
	8.00	1.5	-11	-5	19	27

тока. Из-за торможения к излому примыкает замкнутая сверхзвуковая зона с разгоном газа до  $M > 1.6$  и  $p/p_\infty < 0.8$  и с отрывным невязким циркуляционным течением у поверхности, практически не зависящим от разностной сетки (при общем числе ячеек  $N = 1656, 6624$  и  $26496$ ). Окончательное же ускорение потока до сверхзвуковой скорости происходит на основной звуковой линии справа от замкнутой сверхзвуковой зоны. Расчет в рамках полных уравнений Рейнольдса и дифференциальной модели турбулентности [40–44] дал практически ту же отрывную зону (фиг. 11, з).

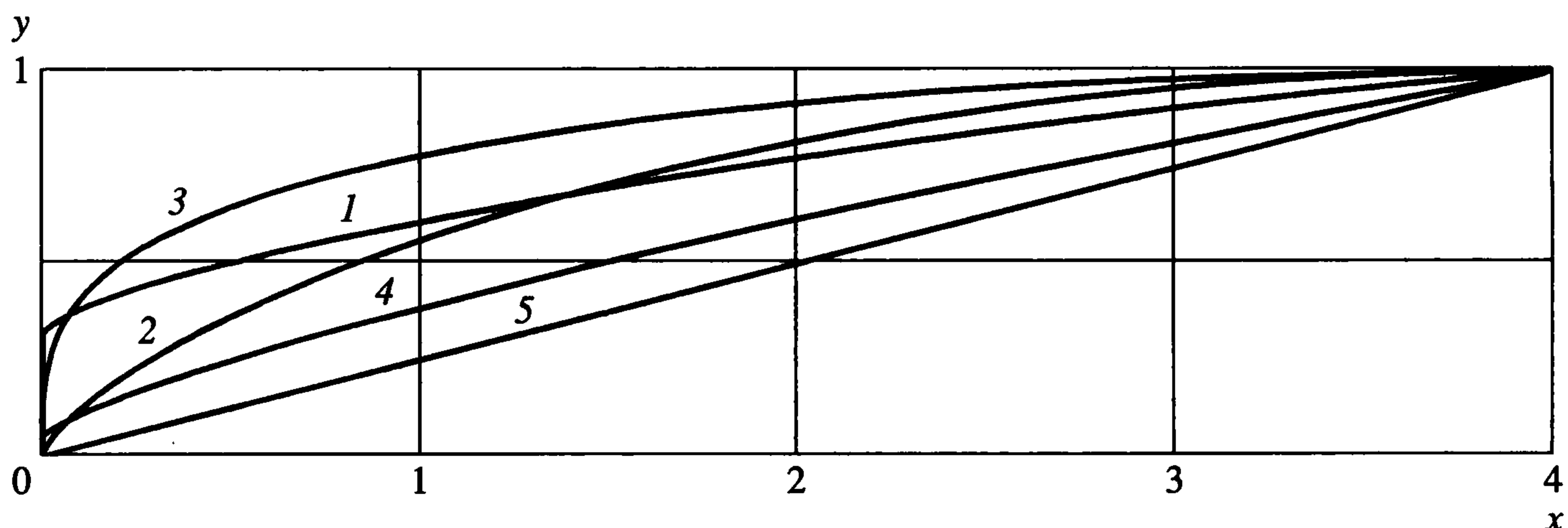
Для ньютоновских тел с  $l > y_*/x_*$ , где  $x_*$  и  $y_*$  – координаты точки выхода с контура  $C^+$ -характеристики, касающейся основной звуковой линии, обтекание окрестности торца остается таким, как на фиг. 11. Для  $l = 0.25$  значительную часть пологого участка занимает область перерасширения потока с давлением порядка и ниже  $p_\infty$ . Этим и объясняется малое по сравнению с ОГЧ увеличение  $C_x$  самого короткого ньютоновского тела (табл. 1,  $\Delta C_x^N = 6\%$ ). С ростом  $l$  больший вклад начинает вносить область торможения на пологом участке с  $p > p_\infty$ . В результате  $\Delta C_x^N$  быстро растет, достигает 43% при  $l = 1$ , затем по мере дальнейшего увеличения  $l$  уменьшается, а при больших  $l$  опять начинает расти, достигая 25% при  $l = 20$ . Аналогично, но при убывающих с ростом  $M_\infty$  значениях поведение  $\Delta C_x^N$  при других  $M_\infty$ . Для  $M_\infty \geq 2$  отрывное течение под местной сверхзвуковой зоной не возникало.

Значения  $C_x^{ml}$  для затупленных однопараметрических оптимальных степенных головных частей были рассчитаны [36] при  $M_\infty = 2$  для  $l \geq 2$ , а при  $M_\infty \geq 4$  – для  $l \geq 1$ .



Фиг. 11

Согласно табл. 1, для рассчитанных  $M_\infty$  у таких тел  $\Delta C_x^{m1} \approx 20\%$  при  $l = 1$  и 10-12% при  $l = 2$ . При дальнейшем росте  $l$  величина  $\Delta C_x^{m1}$  убывает до нескольких процентов, а для больших  $M_\infty$  – до их десятых, но затем вновь возрастает (для  $l = 20$  и  $M_\infty = 2$  – до 9%). Остроконечные двухпараметрические оптимальные степенные головные части [37] удастся строить лишь для достаточно больших  $l$ : при  $M_\infty = 1.5$  и 2 – для  $l \geq 6$ , а при  $M_\infty \geq 3$  – для  $l \geq 4$ , т.е. когда торец ОГЧ мал. Рассчитанные в [37] значения  $C_x^{m2}$  при  $M_\infty = 1.5, 2, 3$  и 4 и  $10 \geq l \geq 6$  или 4 превышают значения  $C_x$  для ОГЧ не более чем на 3.3%.



Фиг. 12

Заканчивая данный раздел, сравним по значениям  $C_x$  и коэффициентов сопротивления трения  $C_f$  и полного сопротивления  $C_D$  оптимальную по  $C_x$  головную часть данной работы с головными частями [45, 46] с плавными обводами

$$y = (x/l)^n(2 - x/l)^n, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.8)$$

и с постоянным показателем степени  $n$ . В зависимости от условий обтекания ( $M_\infty$  и числа Рейнольдса  $Re$ , определенного по радиусу основания и параметрам набегающего потока)  $n$  выбирался из интервала  $0.3 \leq n \leq 0.7$ . Согласно формуле (2.8), такие головные части имеют вертикальную касательную в передней точке (при  $x = 0$ ) и горизонтальную – в концевой (при  $x = l$ ).

Сравнение проводилось для  $l = 4$ ,  $M_\infty = 1.2$  и  $Re = 7 \cdot 10^6$ , когда, согласно имеющимся результатам [45], оптимальный показатель  $n = 0.7$ . Для таких  $M_\infty$  и  $l$  ОГЧ с торцом оказалась короткой, т.е. реализующей точный минимум  $C_x$ . Контурные ОГЧ, двух головных частей, описываемых формулой (2.8) с  $n = 0.7$  и  $0.3$ , ньютоновского тела и конуса изображены на фиг. 12 (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно). При практическом равенстве объемов ОГЧ и головной части, описываемой формулой (2.8) с  $n = 0.7$ , объем головной части, описываемой формулой (2.8) с  $n = 0.3$ , на 25% больше. Расчеты велись по известным методам [40–44] в рамках полных уравнений Рейнольдса и дифференциальной модели турбулентности “ $v_t$ -90”. Результаты даны ниже:

Вариант	1	2	3	4	5
$C_x \cdot 10^4$	670	947	1033	962	1359
$C_f \cdot 10^4$	83	84	95	75	53
$C_D \cdot 10^4$	753	1031	1128	1038	1412
$\Delta C_x, \%$	0	41	54	44	103
$\Delta C_f, \%$	0	1	14	-10	-36
$\Delta C_D, \%$	0	37	50	38	88

Здесь  $\Delta C_x$  – превышения значений  $C_x$  по сравнению со значениями  $C_x$  ОГЧ (аналогично  $\Delta C_f$  и  $\Delta C_D$ ), а номер варианта отвечает номеру образующей на фиг. 12.

**3. Приложение. Формулировка задачи построения коротких оптимальных головных частей общим методом множителей Лагранжа (ММЛ).** В разд. 2 решена задача профилирования коротких головных частей, реализующих при заданном удлинении минимум коэффициента  $C_x$ . Там же численно установлено, что при допустимых ва-

рирования торца коэффициент  $C_x$  построенных головных частей растет. Покажем, к чему сводится доказательство этого факта в рамках ММЛ [10].

Области течения, в которых формулируется и решается сопряженная задача для множителей Лагранжа, изображены на фиг. 2, б. Течение в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , которая состоит из скачка  $i_0w$ , отрезка оси симметрии  $i_0i$ , торца  $id_-$ , пологого участка  $d_+f$  и  $C^-$ -характеристики  $fw$ , описывается уравнениями

$$L_k \equiv \frac{\partial a^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial b^{(k)}}{\partial y} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$$a^{(1)} = yru, \quad b^{(1)} = -yrv, \quad a^{(2)} = yp + yru^2, \quad b^{(2)} = -yruv$$

$$a^{(3)} = yrus, \quad b^{(3)} = -yrvs$$

условием непротекания

$$L \equiv a^{(1)} + x'b^{(1)} = 0 \quad (3.2)$$

на торце  $id_-$  и на участке  $d_+f$ , условием  $v = 0$  на отрезке  $i_0i$  оси  $x$  и соотношениями на отрезке  $i_0w$  головного скачка. На фиг. 2, б точки  $d_-$ ,  $d_+$  и  $d$  совпадают, однако параметры потока в них различаются. Уравнение скачка запишем в форме

$$L^w \equiv x' - \Sigma = 0 \quad (3.3)$$

При фиксированном набегающем потоке величина  $\Sigma = \text{ctg}\sigma$  определяет все параметры течения за скачком. С использованием этой величины два из четырех законов сохранения на головном скачке можно записать в форме (без индексов – параметры за скачком)

$$a^{(1)} + \Sigma b^{(1)} = a_{\infty}^{(1)} + \Sigma b_{\infty}^{(1)}, \quad a^{(2)} + \Sigma b^{(2)} = a_{\infty}^{(2)} + \Sigma b_{\infty}^{(2)} \quad (3.4)$$

Волновое сопротивление головной части с точностью до несущественных при решении вариационной задачи слагаемого и множителя равно

$$\chi = \left( \int_i^{d_-} + \int_{d_+}^f \right) y p dy \quad (3.5)$$

Распределение  $p$  на  $idf$ , а следовательно, и  $\chi$  определяются решением уравнений (3.1) при сформулированных выше условиях, включая (3.2)–(3.4), на  $idf$ , отрезке  $i_0i$  оси  $x$  и на скачке  $i_0w$ . В соответствии с этим, действуя в рамках ММЛ, для получения необходимых условий оптимальности составим функционал

$$I = \chi + \left( \int_i^{d_-} + \int_{d_+}^f \right) v L dy + \int_{i_0}^w \lambda L^w dy + \int_{\Omega} \mu_k L_k dx dy \quad (3.6)$$

Здесь и далее  $v = v(y)$ ,  $\lambda = \lambda(y)$  и  $\mu_k = \mu_k(x, y)$  – подлежащие определению из решения формулируемой далее сопряженной задачи “неопределенные” множители Лагранжа, а по повторяющимся индексам  $k = 1, 2$  и  $3$  предполагается суммирование.

В силу определений  $L$ ,  $L^w$  и  $L_k$  из равенств (3.1)–(3.3) при любых допустимых варьированиях контура  $idf$  вариации функционала  $I$ , введенного равенством (3.6), и оптимизируемого функционала  $\chi$ , определенного формулой (3.5), совпадают, т.е.  $\delta\chi = \delta I$ . Поэтому, действуя согласно правилам, учитывающим вид выражения (3.5), выпол-

нение на головном скачке равенств (3.4), особенности вычисления вклада в  $\delta I$  варьирования координат точки излома  $d$ , возможность разрывов множителей Лагранжа  $\mu_k(x, y)$  при непрерывных параметрах течения и другие моменты, описанные в [10], приведем к выражению для вариации  $\delta\chi = \delta I$ . Наряду с вариациями управлений (функций  $x = x(y) = 0$  при  $0 \leq y \leq y_d$  и  $x = x(y)$  при  $y_d \leq y \leq y_f$  и координат  $x_d$  и  $y_d$  точки излома) в выражении для  $\delta\chi$  появятся вызванные вариациями формы головной части вариации параметров течения (“фазовых переменных”) – компонент вектора скорости  $u$  и  $v$  и энтропии  $s$ , а также абсциссы  $x = x(y)$  и наклона скачка  $\sigma = \sigma(y)$  или величины  $\Sigma = \text{ctg} \sigma$ . Распоряжаясь произволами в выборе введенных при построении функционала (3.6) неопределенных множителей Лагранжа, множители перед вариациями фазовых переменных для любого (необязательно оптимального) контура головной части обратим в нули. В результате получим так называемую сопряженную задачу (СЗ) для множителей Лагранжа, а в выражении для  $\delta\chi$  останутся только вариации управлений, что позволит сформулировать необходимые условия минимума  $\chi$ .

При формулировке СЗ сначала будем выписывать слагаемые выражения для  $\delta\chi$  с вариациями части фазовых переменных (обозначая прочие вариации многоточием), а затем – уравнения и условия, следующие из приравнивания нулю коэффициентов при них. Начнем с  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta s$  в  $\Omega$ . Согласно сказанному выше, имеем

$$\delta\chi = \dots + \iint_{\Omega} (R^u \delta u + R^v \delta v + R^s \delta s) dx dy$$

где

$$\begin{aligned} R^u &\equiv a_u^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - b_u^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + a_u^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - b_u^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + a_u^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial x} - b_u^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial y} = 0 \\ R^v &\equiv a_v^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - b_v^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + a_v^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - b_v^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + a_v^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial x} - b_v^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial y} = 0 \\ R^s &\equiv a_s^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - b_s^{(1)} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + a_s^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - b_s^{(2)} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + a_s^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial x} - b_s^{(3)} \frac{\partial \mu_3}{\partial y} = 0 \\ a_u^{(k)} &= \frac{\partial a^{(k)}}{\partial u}, \quad a_v^{(k)} = \frac{\partial a^{(k)}}{\partial v}, \quad a_s^{(k)} = \frac{\partial a^{(k)}}{\partial s}, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

При вычислении производных от  $a^{(k)}$  и  $b^{(k)}$  учитывались известные термодинамические равенства

$$T ds = di^\circ - \omega^\circ dp, \quad \omega^\circ = i_p^\circ, \quad a^{-2} = \rho_p^\circ = -\rho^2 \omega_p^\circ = -\rho^2 i_{pp}^\circ \quad (3.8)$$

и условие постоянства полной энтальпии (2.1). В равенствах (3.8)  $\omega^\circ = 1/\rho^\circ$  – удельный объем, “градус” приписан термодинамическим параметрам – известным функциям  $p$  и  $s$ , а индексом  $p$  обозначены частные производные по  $p$  при постоянном  $s$ . Вычислив с учетом соотношений (3.8) коэффициенты системы (3.7), приведем ее к виду

$$\begin{aligned} u \frac{d\mu_1}{dt} - a^2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + (u^2 - a^2) \frac{d\mu_2}{dt} + su \frac{d\mu_3}{dt} - sa^2 \frac{\partial \mu_3}{\partial x} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{d\mu_1}{dt} + u \frac{d\mu_2}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + (s-1) \frac{d\mu_3}{dt} &= 0 \\ (a^2 - v^2) \frac{d\mu_1}{dt} - a^2 u \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + u(a^2 - v^2) \frac{d\mu_2}{dt} - a^2 v^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + s(a^2 - v^2) \frac{d\mu_3}{dt} - sa^2 u \frac{\partial \mu_3}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Система (3.9) имеет те же характеристики, что и уравнения течения (3.1). При любых скоростях это – линии тока ( $C^0$ -характеристики), вдоль которых

$$\left(M^2 - 1 + \frac{V^2 \rho_s^\circ}{\rho T}\right) \left(\frac{d\mu_1}{dt} + u \frac{d\mu_2}{dt} + s \frac{d\mu_3}{dt}\right) - u \frac{d\mu_2}{dt} + \frac{V^2}{T} \frac{d\mu_3}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

с оператором  $d/dt$ , определенным вторым соотношением (3.9), и с  $\rho_s^\circ = (\partial \rho^\circ / \partial s)_p$ . Если плотность задана как функция не  $p$  и  $s$ , а  $p$  и  $i$ , т.е.  $\rho = \rho(p, i)$ , то, в силу равенств (3.8),

$$\rho_s^\circ = -\rho T \rho_p < 0 \quad (3.11)$$

Независимые от уравнения (3.10) уравнения системы (3.9) можно записать в форме

$$(a^2 - u^2) \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + s \frac{\partial \mu_3}{\partial x} + \frac{d\mu_2}{dt}\right) - uv \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + s \frac{\partial \mu_3}{\partial y}\right) = 0$$

$$(a^2 - V^2) \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + s \frac{\partial \mu_3}{\partial x}\right) + (u^2 - a^2) \left(v \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - u \frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) = 0$$

При  $V > a$  характеристиками этой системы являются  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристики. Вдоль них  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  удовлетворяют дифференциальным связям

$$d\mu_1 + V \frac{\cos(\vartheta \pm \alpha)}{\cos \alpha} d\mu_2 + s d\mu_3 = 0 \quad (3.12)$$

с верхним (нижним) знаком для  $C^+$  ( $C^-$ )-характеристик.

На образующей тела  $idf$  вариации  $s$ , отвечающие линии тока, прошедшей через прямой скачок, равны нулю. Поэтому здесь при ином, чем выше, смысле вариаций (в интеграле по  $\Omega$  вариации – разности значений при фиксированных  $x$  и  $y$ , а здесь и на скачке – при фиксированном  $y$  и смещенными вместе с образующей или со скачком абсциссами соответствующих точек [10]) получим

$$\delta\chi = \dots + \left( \int_i^{d_-} + \int_{d_+}^f \right) (B^u \delta^\circ u + B^v \delta^\circ v) dy = 0$$

где

$$B^u \equiv -a^{(1)} + \mu_k (a_u^{(k)} + b_u^{(k)} \operatorname{ctg} \vartheta) + v (a_u^{(1)} + b_u^{(1)} \operatorname{ctg} \vartheta) = 0$$

$$B^v \equiv b^{(1)} + \mu_k (a_v^{(k)} + b_v^{(k)} \operatorname{ctg} \vartheta) + v (a_v^{(1)} + b_v^{(1)} \operatorname{ctg} \vartheta) = 0$$

Отсюда следуют уравнение для определения множителя  $v(y)$  и граничное условие, связывающее  $\mu_k$  на образующей головной части. Так как на торце  $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$ , для торца и для пологого участка запишем их отдельно:

$$v = -\mu_1 - s\mu_3, \quad \mu_2 = -1 \quad \text{на } id_-, \quad v = u - \mu_1 - s\mu_3, \quad \mu_2 = -1 \quad \text{на } d_+f \quad (3.13)$$

На замыкающей  $C^-$ -характеристике  $fw$  вариации имеют тот же смысл, что и в области  $\Omega$  при отсутствии вариаций  $x$ . В результате будем иметь

$$\delta\chi = \dots + \int_f^w (C^u \delta u + C^v \delta v + C^s \delta s) dy$$

где

$$C^r \equiv \mu_k \{ a_r^{(k)} + b_r^{(k)} \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha) \} = 0, \quad r = u, v, s \quad (3.14)$$

Так как  $fw$  –  $C^-$ -характеристика, то из трех уравнений (3.14) только два независимых, связывающих на  $fw$  множители  $\mu_k$ . Они имеют вид

$$\mu_1 + \xi_+ \mu_2 + s \mu_3 = 0, \quad \mu_3 + \eta_- \mu_2 = 0 \quad (3.15)$$

где использованы обозначения

$$\xi_{\pm} = V \frac{\cos(\vartheta \pm \alpha)}{\cos \alpha}, \quad \eta_{\pm} = \frac{\rho_s^{\circ} V}{\rho} \sin \vartheta \operatorname{tg} \alpha + \frac{T \sin(\vartheta \pm \alpha)}{V \sin \alpha}$$

с производной  $\rho_s^{\circ}$ , которую удобно находить по формуле (3.11).

Согласно последнему условию (3.13),  $\mu_{2f} = -1$ . Отсюда и из уравнений (3.15) найдутся  $\mu_{1f}$  и  $\mu_{3f}$ , а затем  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  на  $fw$  определятся из совместного решения конечных уравнений (3.15) и дифференциального уравнения (3.12) со знаком “минус”.

На отрезке  $i_0 i$  оси симметрии вариации  $\delta v = \delta s = 0$ . Поэтому

$$\delta \chi = \dots + \int_{i_0}^i A'' \delta u dx$$

где

$$A'' \equiv \mu_k b_u^{(k)} = 0 \quad (3.16)$$

Входящие сюда  $b_u^{(k)}$  имеют порядок  $yu$ . Поэтому, если при приближении к оси  $x$  множители  $\mu_k$  ограничены или растут медленнее, чем  $1/(yu)$ , то условие (3.16) выполняется автоматически. Следующее из него ограничение на  $\mu_k$  можно записать в форме

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\mu_k y u) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

За головным скачком вариации всех параметров выражаются через  $\delta^{\circ} \Sigma$ . Кроме того, есть вариация абсциссы скачка  $\delta^{\circ} x$ . В итоге вклад отрезка  $i_0 w$  скачка в вариацию  $\delta \chi$  и вытекающие из него уравнение и условия принимают вид

$$\delta \chi = \dots - \lambda_{i_0} \Delta x_{i_0} + \lambda_w \{ \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha) - \Sigma \}_w \Delta y_w + \int_w^{i_0} (W^{\Sigma} \delta^{\circ} \Sigma + W^x \delta^{\circ} x) dx$$

$$W^{\Sigma} \equiv \lambda - (\mu_1 + s \mu_3) b^{(1)} - \mu_2 b^{(2)} + \mu_3 a_{\infty}^{(1)} \varphi_{\Sigma} = 0 \quad \left( \varphi_{\Sigma} = v \frac{u - u_{\infty}}{T} \right) \quad (3.18)$$

$$W^x \equiv \frac{d\lambda}{dy} - \mu_k \frac{db^{(k)}}{dy} = 0, \quad \lambda_w = 0 \quad (3.19)$$

Здесь  $\varphi_{\Sigma} = ds/d\Sigma$ ,  $d/dy$  – производная по  $y$  вдоль ударной волны, множитель  $\lambda(y)$  – непрерывная функция  $y$ , а выражение для  $\varphi_{\Sigma}$  взято из [10] (с. 435).

Условие (3.18) выполняется на всем отрезке  $i_0 w$  скачка, в том числе в точке  $i_0$ . Так как  $a_{\infty}^{(1)} \varphi_{\Sigma} \sim yu$ , в ней, согласно условиям (3.17) и (3.18),  $\lambda_{i_0} = 0$ . В итоге в правой части последнего выражения для  $\delta \chi$  исчезают все слагаемые.

Из последнего условия (3.19) и записанного в точке  $w$  условия (3.18) получается такая связь между множителями Лагранжа в этой точке:

$$(\mu_1 + s\mu_3)_w b_w^{(1)} - \mu_{2w} b_w^{(2)} + \mu_{3w} a_\infty^{(1)} \Phi_{\Sigma w} = 0 \quad (3.20)$$

С другой стороны, как объяснено ранее, значения  $\mu_{kw}$  в указанной точке уже определены и в общем случае условию (3.20) не удовлетворяют. Следовательно  $C^+$ -характеристика  $dw$ , проходящая в точку  $w$ , будет линией разрыва множителей  $\mu_k$ . Этого не будет, только если их предельные значения, найденные из соотношений, которые выполняются на  $C^-$ -характеристике  $wf$ , удовлетворяют условию (3.20). Можно показать, что последнее имеет место, если в точке  $w$  равен нулю коэффициент отражения  $\Lambda_w$  или, что то же, выполняется условие (1.4). В связи с этим допустим существование линий разрыва  $\mu_k$  при непрерывных параметрах течения. Тогда их вклад в вариацию  $\delta\chi$  и следующие из него условия на таких разрывах примут вид

$$\delta\chi = \dots + \int (D^u \delta u + D^v \delta v + D^s \delta s) dy \quad (3.21)$$

$$D^r \equiv [\mu_k] (a_r^{(k)} + x' b_r^{(k)}) = 0, \quad k = u, v, s$$

Интеграл берется по всем линиям разрыва, принадлежащим области  $\Omega$ ,  $x' = dx/dy$  вдоль таких линий, а  $[\mu_k]$  – разность значений  $\mu_k$  на разрыве.

Система однородных относительно  $[\mu_k]$  уравнений (3.21) имеет ненулевые решения лишь при  $x'$ , определяющих  $C^0$ - и  $C^\pm$ -характеристики. При этом из трех равенств (3.21) получаются только два условия, налагаемые на разрывы  $\mu_k$ . На  $C^0$ -характеристиках имеем

$$x' = \operatorname{ctg} \vartheta, \quad [\mu_2] = 0, \quad [\mu_1] + s[\mu_3] = 0 \quad (3.22)$$

в то время как на разрывных  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристиках

$$x' = \operatorname{ctg}(\vartheta \pm \alpha), \quad [\mu_1] + \xi_\mp [\mu_2] + s[\mu_3] = 0, \quad [\mu_3] \mp \eta_\pm [\mu_2] = 0 \quad (3.23)$$

Верхние (нижние) знаки отвечают  $C^+$  ( $C^-$ )-характеристикам.

С обеих сторон разрывной  $C^0$ -характеристики выполняется дифференциальное уравнение (3.10). Если линия тока – не тангенциальный разрыв, т.е. на ней параметры непрерывны, то, учтя постоянство  $s$  вдоль линии тока, найдем

$$\left( M^2 - 1 + \frac{V^2 \rho_s^\circ}{\rho T} \right) \left( \frac{d[\mu_1 + s\mu_3]}{dt} + u \frac{d[\mu_2]}{dt} \right) - u \frac{d[\mu_2]}{dt} + \frac{V^2}{T} \frac{d[\mu_3]}{dt} = 0$$

Вместе с условиями (3.22) это дает, что вдоль разрывной  $C^0$ -характеристики

$$[\mu_2] = 0, \quad [\mu_1] = \operatorname{const}, \quad [\mu_3] = \operatorname{const} \quad \text{на } C^0 \quad (3.24)$$

Таким же способом из уравнений (3.12) получим

$$d[\mu_1] + \xi_\pm d[\mu_2] + s d[\mu_3] = 0$$

Отсюда, из соотношений (3.23), равенства

$$d\rho = \rho_s^\circ ds + \rho_p^\circ dp = \rho_s^\circ ds - \rho V a^{-2} dV$$

и выполняющихся на  $C^\pm$ -характеристиках условий совместности найдем

$$[\mu_2]^2 \gamma \rho V^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}, \quad [\mu_1] = -\xi_\mp [\mu_2] - s[\mu_3], \quad [\mu_3] = \pm \eta_\pm [\mu_2] \quad (3.25)$$

где, как и всюду, верхние (нижние) знаки отвечают  $C^+$  ( $C^-$ )-характеристикам.

Условия (3.15) на  $C^-$ -характеристике  $fw$  отличаются от условий (3.23) на разрывных  $C^-$ -характеристиках лишь обозначениями ( $\mu_k$  вместо  $[\mu_k]$ ). Поэтому на  $fw$  множители  $\mu_k$  определяются конечными соотношениями

$$\mu_2^2 \rho V^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{tg} \alpha = \text{const}, \quad \mu_1 = -\xi_+ \mu_2 - s \mu_3, \quad \mu_3 = -\eta_- \mu_2 \quad (3.26)$$

и следствием выполняющегося на  $d_+f$  условия (3.13)  $\mu_{2f} = -1$ . Эти соотношения понадобятся в дальнейшем, а пока вернемся к разрывам множителей  $\mu_k$ .

Допустим, что на замыкающую  $C^-$ -характеристику  $fw$  по характеристике другого семейства ( $C^0$  или  $C^+$ ) пришел разрыв  $\mu_k$ . Тогда в дополнение к равенствам (3.22) или (3.23), в силу выполняющихся на  $fw$  условий (3.15), в точке пересечения выполняются два дополнительных условия

$$[\mu_1] + \xi_+ [\mu_2] + s [\mu_3] = 0, \quad [\mu_3] + \eta_- [\mu_2] = 0$$

Отсюда и из соответствующих равенств (3.22) или (3.23) следует, что в указанной точке замыкающей  $C^-$ -характеристики  $fw$

$$[\mu_1] = [\mu_2] = [\mu_3] = 0$$

Так как, согласно соотношениям (3.24) и (3.25), разрывы вдоль характеристик не исчезают, то вопреки сделанному допущению решение СЗ не может иметь разрывных  $C^0$ - и  $C^+$ -характеристик, проходящих на  $fw$ .

По линиям тока разрывы на  $fw$  могли бы прийти от участка  $i_0w$  ударной волны. Следовательно, на  $i_0w$  не может быть точек, порождающих такие разрывы. Разрывные  $C^+$ -характеристики могли бы прийти на  $fw$ , точнее, на ее часть  $fc$  от образующей  $d_+f$ . От  $d_+f$ , в силу второго условия (3.13), могла бы отразиться разрывная  $C^-$ -характеристика. Такие характеристики приходят на  $d_+f$ , в частности, с отрезка  $\bar{i}w$  головного скачка. Поэтому точки скачка, из которых допускается выход разрывных  $C^-$ -характеристик, могут располагаться только на отрезке  $s\bar{i}$ . Напомним (фиг. 2, б), что  $s$  – точка прихода на головной скачок звуковой линии (ЗЛ)  $dts$ . Под ЗЛ поток дозвуковой, в нем нет ни “разрывных”, ни “безразрывных”  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристик, а возможны лишь разрывные  $C^0$ -характеристики, запрещенные в рассматриваемой СЗ. Таким образом, под ЗЛ множители  $\mu_k$  непрерывны, а при приближении к  $dts$  снизу, как правило, конечны. Если же в некоторых точках ЗЛ  $\mu_k$  неограниченно растут, то естественно предположить, что их рост при подходе к таким точкам по разным “дозвуковым направлениям” для каждого  $\mu_k$  происходит без смены знака. Непрерывность величин или (при их неограниченном росте) знаков  $\mu_k$  назовем “условием отражения”. Таким образом, если на ЗЛ придет разрывная  $C^+$ -характеристика, она должна отразиться разрывной  $C^-$ -характеристикой (и наоборот), обеспечивая выполнение условия отражения в точке отражения.

Исследуем, как разрывы  $\mu_k$  отражаются от ЗЛ. При приближении к ЗЛ  $\alpha \rightarrow \pi/2$ ,  $\cos \alpha \rightarrow 0$ , и, в силу формул (3.25), имеем

$$[\mu_2]^\pm \approx C_\pm \varepsilon, \quad [\mu_1]^\pm \approx \mp \frac{C_\pm (s \rho_s^\circ + \rho)}{\rho \varepsilon} V \sin \vartheta, \quad [\mu_3]^\pm \approx \pm \frac{C_\pm \rho_s^\circ}{\rho \varepsilon} V \sin \vartheta, \quad \varepsilon = \sqrt{\cos \alpha} \quad (3.27)$$

Индексы плюс (минус) метят скачки  $\mu_k$  на разрывных  $C^+$  ( $C^-$ )-характеристиках, а  $C_+$  и  $C_-$  – постоянные, определяющие величину скачков на проходящем и отраженном разрывах. Если на ЗЛ приходит разрывная  $C^+$ -характеристика, то постоянная  $C_+$  известна, а  $C_-$  определяется условием отсутствия разрывных  $C^\pm$ -характеристик в дозвуковой области течения. Согласно соотношениям (3.27), при приближении к ЗЛ величина разрывов множителя  $\mu_2$  стремится к нулю, а  $\mu_1$  и  $\mu_3$  – к бесконечности. В точках отражения для выполнения сформулированного выше условия отражения

необходимо, чтобы при выбранном правиле вычисления  $[\mu_k]^\pm$  (например, как разностей справа и слева от разрывных характеристик при движении по ним к ЗЛ) выполнялось равенство

$$C_- = C_+ \quad (3.28)$$

На контур  $d_+f$  разрывные  $C^-$ -характеристики могли бы приходить не только с участка  $i^-w$  головного скачка, но и с отрезка  $dt$  ЗЛ. Это, однако, запрещено. Поэтому, если наряду с разрывной  $C^+$ -характеристикой  $d_+w$  в пучке волн разрежения в силу условий СЗ должны быть и другие разрывные  $C^+$ -характеристики, то единственная возможность – это касающаяся ЗЛ характеристика  $dt$ . Иные разрывные характеристики пучка в результате отражения либо от отрезка  $dt$  ЗЛ, либо, в силу условия (3.18) с непрерывным множителем Лагранжа  $\lambda(y)$  на скачке, – от его участка  $i^+w$  породили бы идущие к  $d_+f$  разрывные  $C^-$ -характеристики. Характеристика  $dt$  в этом отношении является особой: в точке  $t$  она “передает” по формулам (3.27) и (3.28) разрыв  $\mu_k$  идущему к скачку отрезку  $ti^-$   $C^-$ -характеристики. В точке  $i^-$  разрывная  $C^-$ -характеристика отразится разрывной  $C^+$ -характеристикой. Та отразится от ЗЛ и т.д. со сгущением разрывных  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристик к точке  $s$ .

Для описания отражения от головного скачка разрывных  $C^-$ -характеристик, которые, согласно сказанному ранее, приходят на отрезок скачка  $si^-$ , воспользуемся выполняющимся на  $i_0w$  условием (3.18) и непрерывностью входящего в него множителя  $\lambda(y)$ . Аналогично случаю отражения от ЗЛ определим  $[\mu_k]^\pm$  как разности справа и слева от разрывных  $C^\pm$ -характеристик при движении по ним к точке встречи с головным скачком. Прделав необходимые выкладки, получим

$$[\mu_1]^+ = k_1[\mu_1]^-, \quad [\mu_2]^+ = k_2[\mu_2]^-, \quad [\mu_3]^+ = k_3[\mu_3]^-, \quad k_1 = k_2 \frac{\Phi_1^+}{\Phi_1^-}, \quad k_2 = \frac{\Phi_2^-}{\Phi_2^+}, \quad k_3 = k_2 \frac{\Phi^+}{\Phi^-}$$

$$\Phi_1^\pm = sTa^{-2} \Phi^\pm \sin \alpha + \cos(\vartheta \mp \alpha), \quad \Phi_2^\pm = \rho_\infty u_\infty (u - u_\infty) \Phi^\pm - \rho V^2 \sin \vartheta \sin^2 \alpha \quad (3.29)$$

$$\Phi^\pm = \mp \{ a^2 \rho_p \sin \vartheta - \cos \alpha \sin(\vartheta \pm \alpha) \}, \quad \rho_p = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_i = \frac{\kappa}{a^2}, \quad sTa^{-2} = \frac{\ln(p\rho^{-\kappa})}{\kappa(\kappa - 1)}$$

Выражения для  $\rho_p$  и  $sTa^{-2}$  записаны для совершенного газа.

Если множители Лагранжа удовлетворяют полученным выше уравнениям и условиям сопряженной задачи, то в выражении для  $\delta\chi$  остаются только вариации  $x$  на  $id_-$  и  $d_+f$  и приращения координат точки  $d$ , что позволяет получить необходимые условия минимума  $\chi$ . Вместе с выражением для  $\delta\chi$  они имеют вид

$$\delta\chi = Y\Delta y_d + X\Delta x_d + \left( \int_i^{d_-} + \int_{d_+}^f \right) B^x \delta^\circ x dy$$

$$Y \equiv \left\{ p_- - p_+ - (v\rho u)_+ + \int_{d_-}^{d_+} (\mu_1 + s\mu_3) d(\rho u) + \mu_2 d(p + \rho u^2) \right\}_d = 0 \quad (3.30)$$

$$v = u - \mu_1 - s\mu_3$$

$$X \equiv \left\{ (v\rho v)_+ - (v\rho v)_- - \int_{d_-}^{d_+} (\mu_1 + s\mu_3) d(\rho v) + \mu_2 d(\rho u v) \right\}_d \geq 0 \quad (3.31)$$

$$B^x \equiv -\nu(\mu_1 + s\mu_3)' \geq 0 \quad \text{на } id_- \quad (3.32)$$

$$B^x \equiv -\nu(\mu_1 + s\mu_3)' = 0 \quad \text{на } d_+f \quad (3.33)$$

Равенство (3.30) определяет оптимальный размер торца. В описанной в разд. 2 процедуре построения коротких оптимальных тел его заменял эквивалентный численный поиск минимума  $S_x$  при фиксированном  $l$ . Неравенства (3.31) и (3.32), отвечающие допустимым варьированиям абсцисс точек излома ( $\Delta x_d \geq 0$ ) и торца ( $\delta x \geq 0$  при  $0 \leq y \leq y_d$ ), – условия того, что торец – участок краевого экстремума. Наконец, равенство (3.33), или

$$\mu_1 + s\mu_3 = \text{const} \quad (3.34)$$

– необходимое условие экстремума, определяющее форму участка  $d_+f$ . Отсюда, и из соотношений (3.10) и (3.13), следует, что на  $d_+f$  все  $\mu_k = \text{const}$ ,  $\mu_2 = -1$ , а  $\mu_1$  и  $\mu_3$  определяются равенствами (3.26), записанными в точке  $f$ . Течение над участком  $d_+f$  сверхзвуковое. Поэтому изменение его формы не влияет на обтекание торца (образующая  $d_+f$  реализует минимум  $\chi$  при фиксированном торце). В методе неопределенного контрольного контура это привело к равенству (1.3), определяющему параметры на отрезке  $fc$  характеристики  $fw$ . На оптимальном контуре  $d_+f$  множители  $\mu_k = \text{const}$  известны. По ним из решения задачи Коши с данными на  $d_+f$  найдем  $\mu_k$  в треугольнике  $d_+fc$ , включая характеристику  $fc$ . Покажем, что (3.34) и условия СЗ в треугольнике  $d_+fc$  приводят к условию (1.3).

Допустим, что решение задачи Коши в треугольнике  $d_+fc$  с  $\mu_k = \text{const}$  на контуре  $d_+f$  имеет вид

$$\mu_1 = \mu_1(\psi), \quad \mu_2 = -1, \quad \mu_3 = \mu_3(\psi) \quad (3.35)$$

В треугольнике  $d_+fc$  исходная система уравнений (3.9) для  $\mu_k$  эквивалентна характеристическим соотношениям (3.10) и (3.12). Удовлетворяя уравнению (3.10), функции (3.35) сводят два уравнения (3.12) к одному (точка – производная по  $\psi$ )

$$\dot{\mu}_1 + s\dot{\mu}_3 = 0 \quad (3.36)$$

В треугольнике  $d_+fc$  энтропия  $s = s(\psi)$ , и уравнение (3.36) не противоречит решению в форме (3.35). В то же время  $\mu_1$  и  $\mu_3$  удовлетворяют на отрезке  $fc$  связям (3.15) с  $\mu_2 = -1$ . Можно показать, что подстановка найденных из них  $\mu_1$  и  $\mu_3$  в уравнение (3.36) приводит к условию совместности для  $S^-$ -характеристики уравнений течения. Следовательно, получающиеся из соотношений (3.15) с  $\mu_2 = -1$  функции  $\mu_1(\psi)$  и  $\mu_3(\psi)$  дают решение сформулированной задачи Коши в треугольнике  $d_+fc$ , включая  $S^+$ -характеристику  $d_+c$ , а на отрезке  $fc$  выполняется получающееся из (3.26) и (3.35) равенство (1.3). Так как для образующей  $d_+f$ , удовлетворяющей необходимым условиям экстремума, причем при любой (необязательно оптимальной) ординате точки  $d$ , множители  $\mu_k$  известны во всем треугольнике  $d^+cf$ , решение СЗ остается найти только в части области  $\Omega$ , лежащей слева от характеристики  $d_+c$ . При этом на  $S^+$ -характеристике  $d_+c$  выполняются равенства (3.35), в которых  $\mu_1(\psi)$  и  $\mu_3(\psi)$  определены на отрезке  $fc$ .

Обтекание построенной по методу, изложенному в разд. 2, короткой головной части известно, причем по построению ее пологий участок  $d_+f$  удовлетворяет необходимому условию экстремума. Более того, необходимому условию экстремума удовлетворяет и ордината точки  $d$ . Таким образом, решение СЗ нужно только для проверки неравенств (3.31) и (3.32) – необходимых условий минимума  $\chi$ , которые должны выполняться на предполагаемом участке краевого экстремума – торце  $id$ .

Решение СЗ ведется справа налево, т.е. начинается в сверхзвуковой области, где можно воспользоваться методом характеристик. При этом  $\mu_k$  известны на характеристиках  $d_+c$  и  $ws$  и удовлетворяют конечному соотношению (3.18) на скачке  $i_0w$  с непрерывным множителем  $\lambda(y)$ , который определяется на  $i_0w$  одновременно с  $\mu_k$  решением задачи (3.19) с начальным условием в точке  $w$ . Проводя это решение мысленно, можно убедиться, что для построенной головной части перечисленные условия однозначно определяют конечные  $\mu_k$  до линии  $dti^-$ , которая состоит из гладко стыкующихся в точке  $t$  отрезков  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристик  $dt$  и  $ti^-$ .

Под  $dti^-$  СЗ становится эллиптико-гиперболической (смешанной), а отрезки  $dt$  и  $ti^-$  – могут оказаться линиями разрыва  $\mu_k$  со всеми описанными выше вытекающими из этого следствиями. По найденным над  $dti^-$  конечным  $\mu_k$  их значения под этой линией (с  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , обращающимися в точке  $t$  в бесконечность) получатся добавлением  $[\mu_k]$ . Последние, согласно соотношениям (3.25), (3.27) и (3.28), с точностью до заранее неизвестной постоянной  $C$  определяются формулами

$$[\mu_1] = \pm C \frac{\cos(\vartheta \mp \alpha) + sTa^{-2}\Phi^\pm \sin \alpha}{\sqrt{\rho}(M^2 - 1)^{1/4} \sin \vartheta \sin \alpha}, \quad [\mu_2] = \mp C \frac{(M^2 - 1)^{1/4}}{V\sqrt{\rho} \sin \vartheta}$$

$$[\mu_3] = \mp C \frac{Ta^{-2}\Phi^\pm}{\sqrt{\rho}(M^2 - 1)^{1/4} \sin \vartheta}$$

Здесь  $\Phi^\pm$  – те же, что в (3.29), а верхние (нижние) знаки перед  $C$  и  $\alpha$  и в индексе относятся к отрезку  $dt(ti^-)$   $C^+(C^-)$ -характеристики.

**4. Заключение.** В приближении уравнений Эйлера решена задача построения осесимметричных головных частей заданного удлинения  $l$  – отношения их длин к радиусу основания, оптимальных или близких к оптимальным по волновому сопротивлению. При любых удлинениях они имеют передний торец – участок краевого экстремума, появляющийся из-за ограничения максимально допустимой длины, и пологий участок, примыкающий к торцу с изломом. Проверка того, что торец – участок краевого экстремума, получено с помощью расчетов обтекания построенных тел и тел, получающихся при допустимых деформациях торца. Альтернативный способ доказательства, не предполагающий конкретных видов варьирования торца, может опираться на решение сопряженной задачи в рамках общего метода множителей Лагранжа. Приведенная в разд. 3 формулировка этой задачи представляет и самостоятельный интерес, в частности, из-за неизвестных ранее особенностей отражения разрывов множителей Лагранжа от звуковой линии с обращением части из них в бесконечность.

В исследованном диапазоне чисел Маха и удлинений ( $1.2 \leq M_\infty \leq 10$ ,  $0.25 \leq l \leq 20$ ) коэффициенты волнового сопротивления  $C_x^N$  головных частей, построенных в приближении формулы Ньютона и также затупленных, больше коэффициентов сопротивления  $C_x$  оптимальных головных частей (ОГЧ), построенных в приближении уравнений Эйлера. Однако при  $M_\infty \geq 3.0$  значения  $C_x^N$  превышают значения  $C_x$  для головных частей, оптимальных в приближении уравнений Эйлера, лишь на 0.8–9.4%. Рассчитанные в рамках уравнений Эйлера уменьшения их коэффициентов сопротивления  $C_x$  по сравнению со значениями  $C_x$  для конусов получаются заметно большими аналогичных величин, определенных по формуле Ньютона. Это подтверждает удивительную работоспособность формулы Ньютона в задачах построения оптимальных конфигураций, но не при расчете их аэродинамических характеристик.

Построенные ОГЧ имеют меньшие значения  $C_x$  по сравнению и с оптимальными затупленными (однопараметрическими), и с остроконечными (двухпараметрическими) степенными головными частями. Первые ранее строились для  $M_\infty \geq 2$  и  $l \geq 1$ . Вторые удается построить лишь для достаточно больших  $l$ : при  $M_\infty \geq 3$  – для  $l \geq 4$ , а при  $M_\infty = 1.5$  и  $2$  – для  $l \geq 6$ . Для указанных  $M_\infty$  и  $l$  превышение значений  $C_x^{m1}$  затупленных степенных головных частей из [36] над значениями  $C_x$  для ОГЧ в зависимости от  $M_\infty \geq 2$  составляет от 20% до десятых процента. Построенные в [37] для  $M_\infty = 1.5$  и  $M_\infty = 2$  при  $6 \leq l \leq 10$ , а для  $M_\infty = 3$  и  $M_\infty = 4$  при  $4 \leq l \leq 10$  остроконечные головные части имеют значения  $C_x^{m2}$ , превышающие значения  $C_x$  для ОГЧ не более чем на 3.3%.

Расчет в приближении уравнений Рейнольдса и дифференциальной модели турбулентности “ $v_i-90$ ”, обтекания ОГЧ и затупленных головных частей с плавными обводами для  $M_\infty = 1.2$ ,  $Re = 7 \cdot 10^6$  и  $l = 4$  продемонстрировал заметное преимущество ОГЧ и по волновому, и по полному сопротивлению.

Авторы благодарят И.А. Браилко, по программе которого проведены расчеты вязкого обтекания, С.А. Таковицкого – за результаты расчета остроконечных степенных головных частей и Ю.Д. Шмыглевского – за замечания по тексту рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00422) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (00-15-99039 и НШ-2124.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. с латин. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
2. *Newton I.* Mathematical principles natural philosophy (Philosophiae naturalis principia mathematica). Пер. с латин. Э. Мотта. 1793; пересмотренное издание Ф. Кэджори (Cajori F.). Berkeley, California: Univ. California Press, 1947. 680 p.
3. *Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H.* Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds // NASA Report. 1957. № 1306. 12 p.
4. *Эггерс А.* Нетонкие тела вращения минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под. ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 260–274.
5. *Крайко А.Н.* Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 394–402.
6. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // Изв АН СССР. ОТН. 1957. № 7. С. 89–93.
7. *Гонор А.Л.* Определение формы тел минимального сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1073–1078.
8. *Крайко А.Н.* Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 381–393.
9. *Chernyi G.G., Gonor A.L.* Nonslender shapes of minimum pressure drag // Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. A. Miele. N. Y.; L.: Acad. Press, 1965. P. 373–385 = Формы нетонких тел минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под. ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 379–395.
10. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.

11. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: ЯНУС-К, 2001. 132 с.
12. Черный Г.Г. Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова. 1950. № 197. 11 с. = Газовая динамика. Избранное. Т. 1/ Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 443–462.
13. Шмыглевский Ю.Д. О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 269–273.
14. Шмыглевский Ю.Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 923–926.
15. Guderley K.G., Armitage J.V., Valentine E.M. Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonic flow // IAS Paper. 1962. № 116. 20 p.
16. Шмыглевский Ю.Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
17. Крайко А.Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 84 с.
18. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
19. Борисов В.М. Об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 4. С. 788–793.
20. Шипилин А.В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 9–18.
21. Шипилин А.В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // Сборник теоретических работ по гидромеханике. М.: ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
22. Крайко А.Н., Шеломовский В.В. Головные части тел вращения с протоком, близкие к телам минимального волнового сопротивления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 138–145.
23. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е. К построению оптимального контура головной части тела в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 419–434 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 463–480.
24. Гонор А.Л., Крайко А.Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
25. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики, постановки, методы решения, соотношение точных и приближенных подходов // Проблемы современной механики / Под ред. Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 90–100.
26. Крайко А.Н., Пьянков К.С. Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околозвуковом потоке идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890–1904 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2001. С. 250–264.
27. Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Профилирование сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 145–157.
28. Крайко А.Н., Мышенков Е.В., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Влияние неидеальности газа на характеристики сопел Лаваля с внезапным сужением // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 191–204.
29. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
30. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.

31. Родионов А.В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
32. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
33. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2001. С. 201–210.
34. Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И. К численному построению фронтов ударных волн // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 3. С. 716–723 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2001. С. 169–175.
35. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
36. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
37. Таковицкий С.А. Остроконечные двухпараметрические степенные головные части минимального волнового сопротивления // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 829–835.
38. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е. О роли ограничения на длину при построении тел минимального сопротивления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 822–837 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 493–511.
39. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е. О построении симметричных профилей, оптимальных в сверх- и гиперзвуковом потоке при произвольных изопериметрических условиях // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 931–946.
40. Козлов В.Е., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38–44.
41. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2001. С. 440–454.
42. Копченков В.И., Ломков К.Э., Топеха Е.А. Методы и результаты расчета течений вязкого газа в каналах и струях // Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Изд-во АН СССР, 1991. С. 200.
43. Gouskov O.V., Kopychenov V.I., Nikiforov D.A. Flow numerical simulation in the propulsion elements of aviation space system within full Navier-Stokes equations // Proc. 7th Intern. Conf. Methods of Aerophysical Research. Pt 1. Novosibirsk, 1994. P. 104–109.
44. Браилко И.А., Клестов Ю.М. Математическое моделирование и экспериментальное исследование газодинамических характеристик “плоского” сопла // Аннот. докл. 8-го Всерос. съезда по теорет. и прикл. механике. Пермь: Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 2001. С. 119.
45. Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н. Учет трения при выборе оптимальных форм носовых частей тел вращения в звуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 3. С. 110–114.
46. Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н., Михайлов П.Д. Оптимальные формы носовых частей тел вращения в трансзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 6. С. 103–105.