УДК 532.5

© 2003 г. А. М. Лукацкий

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО КЛАССА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ К ДИНАМИКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Предлагается групповой подход к анализу уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Рассматриваются обобщенные группы токов – группы линейных преобразований касательных пространств гладкого многообразия, сохраняющих заданную структуру на нем и гладко зависящих от точки. Строятся полупрямые произведения таких групп и групп, действующих на многообразии и сохраняющих структуру. Показано, что полученная бесконечномерная группа является группой Ли-Фреше второго рода. С помощью полученной конструкции дается групповая интерпретация решений типа бегущей волны в многомерной гидродинамике. Приводится общее описание решений, конструируемых из стационарного течения и векторного поля компактной группы диффеоморфизмов области течения, сохраняющих объем. Групповой подход, основанный на конструкциях групп токов и их обобщениях, позволил в единых терминах описать различные физические явления: нелинейную динамику намагниченности ферромагнетиков; определенные классы течений несжимаемой жидкости; некоторые объекты квантовой космологии.

1. Постановка задачи. Примеры группового анализа в механике были даны [1] для гамильтоновых систем с использованием аппарата локальных групп Ли, а также для определенного класса течений сжимаемой жидкости [2] с использованием конечномерных групп Ли. Говорилось [3] о необходимости обращаться к бесконечномерным группам Ли в физических приложениях.

В настоящей работе исследуется проблема нелокальной разрешимости многомерных уравнений несжимаемой идеальной или вязкой жидкости. Область течений жидкости – некоторое многообразие M, снабженное римановой метрикой. Поля скоростей жидкости образуют пространство SVect(M) бездивергентных векторных полей на M. Снабженное скобкой Пуассона (коммутатором) векторных полей $[u, v]$ пространство SVect(M) становится алеброй Ли. Ее группой Ли является беконечномерная группа SDiff(M) диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема многообразия M, которую можно рассматривать как конфигурационное пространство течений несжимаемой жидкости в M [4, 5]. Перенос частиц жидкости(адвекция) [6] задается действием кривой $g(t)$ из группы SDiff(M) на M. Поле скоростей жидкости $u(t)$ получается из касательного вектора к кривой $Tg(t)$ правым сдвигом на элемент $g(t)^{-1}$ из $g(t)$ в единицу группы SDiff(M). Это задает соответствие между лагранжевым и эйлеровым портретами течений несжимаемой жидкости. Кривая $u(t)$ в алгебре Ли SVect(M) удовлетворяет уравнениям Эйлера (идеальная жидкость) или Навье-Стокса (вязкая жидкость). В общем случае задача построения кривой $u(t)$ в агебре Ли SVect(M) с заданным начальным векторным полем $u = u(0)$, удовлетворяющей уравнениям Эйлера или Навье–Стока и продолжаемой на бесконечность во времени, для многомерной гидродинамики (размерность три и выше) не решена.

Ниже строятся бесконечномерные подалгебры в алгебре Ли бездивергентных векторных полей $g \subset$ SVect(M), обладающие тем свойством, что для начальных условий $u(0)$, задаваемых векторными полями из этих подалгебр ($u(0) \in \mathfrak{g}$), решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса $u(t)$ остаются в них же ($u(t) \in \mathfrak{g}$), причем продолжаются на бесконечность во времени.

Используются бесконечномерные группы Ли токов $G(M, K)$, т.е. группы, образованные гладкими поточечными отображениями из многообразия M в заданную конечномерную группу Ли K. Например, группа токов $G(M, SO(n))$, где $SO(n)$ – собственная ортогональная группа, представляет собой конфигурационное пространство задачи нелинейной динамики намагниченности ферромагнетиков (обобщенного твердого тела), описываемой уравнением Ландау–Лифшица [7]. В контексте этой физической постановки было предложено [8] обобщение группы токов $G(M, SO(n))$, а именно группа $O(M)$ поточечных ортогональных преобразований касательных пространств на компактном ориентированном римановом многообразии M. Ее алгеброй Ли является алгебра Ли $o(M)$ поточечных кососимметрических преобразований касательных пространств на M. Можно рассматривать также обобщенные группы токов, связанные с другими геометрическими структурами, например, с конформной.

В общем случае требуемая геометрическая структура задается некоторой G-структурой ([9], с. 332), т.е. расслоением $P \to M$ со структурной группой $G \subset GL(V)$, где $V = \mathbf{R}^n$, а $n = \dim M$, т.е. пространство V изоморфно касательному пространству к M в некоторой точке. Таким образом, G – структура общего вида получается редукцией главного расслоения $F(M) \to M$ реперов на M от структурной группы $GL(V)$ (полной линейной) к некоторой ее подгруппе G. Для заданной G-структуры P на M можно построить обобщенную группу токов R, действующую в касательном расслоении TM послойными преобразованиями $G(T_xM)$, гладко зависящими от точки базы x и сохраняющими геометрическую структуру, индуцированную G-структурой P в касательном пространстве T_xM. Таким образом, элементы группы R переводят множество реперов G-структуры в себя. Их можно представлять как гладкие сечения расслоения $G(M) \to M$, ассоциированного с главным расслоением, определяемым G-структурой. Алгебра Ли $\mathfrak{r}$ группы R состоит из гладких сечений векторного расслоения $g(M) \to M$. Здесь слоями являются алгебры Ли $g(T_xM)$ групп $G(T_xM)$, сохраняющих в касательных пространствах T_xM геометрическую структуру, определяемую G-структурой. Слои изоморфны алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

В работе строятся группы, которые являются полупрямым произведением обобщенных групп токов, ассоциированных с геометрическими структурами, и конечномерных групп Ли, состоящих из автоморфизмов этих структур. Полученные таким образом бесконечномерные группы Ли погружаются в группу SDiff(M). Проводится групповой анализ для получившихся классов течений несжимаемой жидкости, откуда получаются соответствующие решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса.

2. Необходимый аппарат из теории бесконечномерных групп Ли. Остановимся на структурных свойствах бесконечномерных групп Ли. Группа диффеоморфизмов SDiff(M) имеет структуру группы Ли–Фреше [10, 11], в то время как группа токов $G(M, K)$ обладает также более сильной структурой группы Кэмпбелла–Хаусдорфа, или группы Ли первого рода. Группа первого рода – это такая группа Ли–Фреше, которая обладает каноническими координатами первого рода, т.е. ее лиев экспоненциал задает локальную карту в единице группы [12, 13]. Обобщенная группа токов также является группой Ли первого рода [8].

Было введено [13] понятие бесконечномерной группы Ли второго рода как обладающей локальными координатами, являющимися аналогом канонических координат второго рода конечномерных групп Ли. Следовательно, группа второго рода – это такая группа Ли–Фреше G, что ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть разложена в прямую сумму топологических векторных пространств $\mathfrak{g} = V_1 + \ldots + V_k$, причем произведение k лиевых экспоненциалов, т.е. отображение $(v_1, \ldots, v_k) \to \exp(v_1)\ldots\exp(v_k)$, задает локальную карту в единице группы. Для этого класса групп построена теория Ли, аналогичная конечномерной (доказаны три теоремы Ли), чего не удалось сделать для всей группы SDiff(M).

Будем много раз использовать следующую конструкцию.

Теорема 2.1. Пусть конечномерная группа Ли K действует на многообразии M автоморфизмами G-структуры P. Тогда можно построить полупрямое произведение $B = KR$ группы K и обобщенной группы токов R поточечных автоморфизмов G-структуры, которое является группой Ли–Фреше второго рода и ILH-группой Ли.

Доказательство. Зададим действие группы K на группе R. Далее удобно будет касательный вектор $a \in T_pM$ обозначать как пару (p, a), т.е. $\pi(a) = p$, где π: $TM \to M$ – проекция касательного расслоения. Для элемента $k \in K$ положим $Tk(p, a) = (k(p), dk|_p(a))$. Теперь для $o \in R$ определим

$$k(o) = (Tk)o(Tk^{-1}) \tag{2.1}$$

Из условия теоремы имеем $k(o) \in R$ и K действует на R автоморфизмами.

Теперь можно построить полупрямое произведение B групп K и R. Введем в B операцию

$$(l, p)(k, o) = (lk, pl(o)) \tag{2.2}$$

Как известно, B с операцией (2.2) является группой. Единицей является пара (Id, Id). Обратный элемент имеет вид $(k, o)^{-1} = (k^{-1}, k^{-1}(o^{-1}))$.

Положим

$$(k, o)(p, a) = (k(p), o|_{k(p)}(dk|_p(a))) \tag{2.3}$$

Непосредственно проверяется, что отображение (2.3) задает действие группы B на касательном расслоении TM.

Рассмотрим алгебру Ли r. Пусть k – алгебра Ли группы K, она состоит из киллинговых (сохраняющих G-структуру) векторных полей на M. Введем отображение F: k $\times$ r $\to B$. Положим

$$F(q, f) = \exp(q)\exp(f), \quad q \in \mathrm{k}, \quad f \in \mathrm{r}$$

Пусть $U \subset$ k – окрестность инъективности экспоненциального отображения группы K, а $V \subset$ r – окрестность нуля, состоящая из сечений расслоения $g(M) \to M$, поточечно принадлежащих областям инъективности экспоненциального отображения в слое (exp: $g(T_xM) \to G(T_xM)$). Тогда ограничение отображения F на $U \times V$ определяет канонические координаты второго рода на B и задает локальную карту в единице группы. В произвольной точке $p = (g, s) \in B$ можно задать локальную карту $A(g, s)$ отображением

$$F(q, f) = g\exp(q)s\exp(f), \quad (q, f) \in U \times V$$

Переход от карты $A(g, s)$ к карте $A(j, r)$ приводит к уравнениям

$$h = g\exp(q)s\exp(f) = j\exp(p)r\exp(k), \quad h \in A(g, s) \cap A(j, r)$$

Из единственности разложения элемента в полупрямом произведении групп получаем $g\exp(q) = j\exp(p)$, $s\exp(f) = r\exp(k)$. Отсюда заключаем, что функции перехода на группе B сводятся к паре функций перехода канонических координат для конечномерной группы Ли K и обобщенной группы токов R. Таким образом, построенный атлас $\{A(g, s)\}$ определяет структуру группы Ли–Фреше на B. Операция умножения m на B из (2.2) может быть представлена в виде суперпозиции $m = (m_K, m_R(\mathrm{Id}, \mathrm{Aut}(K)))$ умножения в K, умножения в R и действия K на R автоморфизмами по формуле (2.1). Отсюда следует гладкость групповых операций в построенном атласе.

Чтобы ввести структуру ILH-группы Ли, погрузим группу R, в группу R^n, состоящую из сечений расслоения $G(M) \to M$ соболевского класса W^n, ее алгеброй Ли будет пространство $\mathfrak{r}^n$, состоящее из сечений расслоения $g(M) \to M$ класса W^n. Групповая операция в обобщенной группе токов R является гладкой в классе W^n, так как сводится к попарным умножениям координатных функций сечений в построенном атласе. Действие алгебры Ли $\mathfrak{k}$ сводится к умножениям заданных гладких функций на первые производные координатных функций сечений из $\mathfrak{r}^n$ и потому на единицу понижает соболевскую гладкость этих сечений, т.е. переводит соболевский класс W^n в W^{n-1}. Отсюда, используя построенный атлас, можно показать, что действие K на R автоморфизмами является гладким в ILH-смысле, т.е. имеет класс W^m как отображение из W^{n+m+1} в W^n. Теорема доказана.

Рассмотрим далее в качестве компактного многообразия сферическое расслоение $S(M) \to M$ над n-мерным римановым многообразием M со слоем $(n-1)$-мерной единичной сферой S^{n-1}.

Предложение 2.1. Пусть в условиях теоремы 2.1 группа Ли K транзитивна на многообразии M, а группы автоморфизмов G_x в слоях транзитивны на лучах в T_xM и, кроме того, для любого элемента $g \in G_x$ элемент $g((\det g)^{-1}\mathrm{Id}) \in G$.

Тогда естественное действие группы B на касательном расслоении TM индуцирует транзитивное действие на сферическом расслоении $S(M)$ в случае риманова многообразия M. Подгруппа $N = \{\mathrm{Id}, \lambda(x)\mathrm{Id}_X\}$, где $\lambda(x)\mathrm{Id}_X$ – поточечные гомотетии линейных пространств T_xM, является нормальным делителем неэффективности этого действия, а действие на $S(M)$ факторгруппы $Q = B/N$ – эффективно.

Доказательство. В случае действия на многообразии с римановой метрикой по действию на TM определяется действие на $S(M)$ по формуле

$$(k, o)(p, a) = (k(p), o(dk(a))/\det(o(dk(a))))$$

причем из принадлежности точки (p, a) сферическому расслоению имеем $|a| = 1$.

Подгруппа N оставляет неподвижными точки $S(M)$. В произвольном классе смежности $(u, f)N$ лежит единственный элемент вида (u, ϕ), такой, что ϕ – поточечное унимодулярное преобразование, а именно это элемент $\phi = f/\det f$. Отсюда следует, что фактор-группа $Q = B/N$ эффективно действует на $S(M)$.

Пример 2.1. $M = T^2$ (двумерный тор) со стандартной метрикой. $K = T^2$. В этом случае $S(M) \cong T^3$. В стандартных координатах (x, y, z) на T^3, взятых по модулю 2π, алгебру Ли $\mathfrak{b}$ группы B образуют векторные поля вида

$$u = a\partial x + b\partial y + f(x, y)\partial z, \quad , \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Пример 2.2. $M = S^n$ (n-мерная сфера) с конформной структурой. В качестве K возьмем группу $SO(1, n+1)$ конформных преобразований S^n (при $n = 2$ это группа Лоренца).

3. Приложения к динамике идеальной несжимаемой жидкости. Далее будет важен случай, когда K – группа изометрий римановой метрики на многообразии M, а R – группа $O(M)$ поточечных ортогональных преобразований. В этом случае в качестве области течений жидкости будет рассматриваться многообразие $S(M)$, т.е. сферическое расслоение $S(M) \to M$. Многообразие $S(M)$ имеет размерность на единицу больше, чем M; так например, если M – поверхность, то $S(M)$ – трехмерное многообразие. $S(M)$ является подмногообразием касательного расслоения TM, инвариантным относительно естественного действия групп K и R на TM. Группа $B = KR$ вкладывается в группу $\mathrm{SDiff}(S(M))$ диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема $S(M)$, а значит, и в конфигурационное пространство несжимаемой жидкости в $S(M)$.

Установим связь этой конструкции с уравнениями Эйлера идеальной несжимаемой жидкости

$$\partial\upsilon/\partial t + \nabla_\upsilon \upsilon = \nabla p \tag{3.1}$$

Также будет удобно представление уравнений Эйлера в форме

$$\partial v/\partial t = -\operatorname{ad} v^*(v) \tag{3.2}$$

Пусть N – риманово многообразие, представляющее собой область течений жидкости. Тогда $\operatorname{ad} v^*$ – оператор коприсоединенного представления в алгебре Ли $\mathrm{SVect}(N)$ бездивергентных векторных полей на N, где операция сопряжения берется в смысле скалярного произведения в пространстве бездивергентных векторных полей, [4]

$$\langle u, v\rangle = \int_M \langle u(x), v(x)\rangle dx \tag{3.3}$$

т.е. $\langle \operatorname{ad} v^*(u), w\rangle = \langle u, \operatorname{ad} v(w)\rangle = \langle u, [v, w]\rangle$.

Риманова метрика (3.3) определена в $\mathrm{SVect}(N)$, которое является касательным пространством к единице группы диффеоморфизмов $\mathrm{SDiff}(N)$, сохраняющих элемент объема N. Она продолжается до правоинвариантной метрики – кинетической энергии на группе $\mathrm{SDiff}(N)$, [4].

Разберем в этих терминах пример 2.1. Пусть $\mathfrak{b}$ – алгебра Ли группы B. Исследуем векторные поля алгебры Ли $\mathfrak{b}$ как поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости на T^3. Для векторного поля $u = (a, b, f)$ на T^3 уравнения Эйлера приводят к системе

$$\partial a/\partial t = 0, \quad \partial b/\partial t = 0, \quad \partial f/\partial t + a\partial f/\partial x + b\partial f/\partial y = 0$$

Отсюда можно получить решение уравнений Эйлера

$$u^t = (a, b, f(x - at, y - bt))$$

Можно построить обобщение подгруппы B, также приводящее к решениям трехмерной гидродинамики, продолжаемым на бесконечность во времени. Рассмотрим векторные поля на T^3 вида $w = v + f(x, y)\partial z$, где $v = a(x, y)\partial x + b(x, y)\partial y$, т.е. a и b уже не постоянные, а функции на T^2, причем v – бездивергентное поле на T^2. Очевидно, что такие векторные поля образуют алгебру Ли, обозначим ее через s, а соответствующую группу диффеоморфизмов через S. Для векторного поля w уравнения Эйлера приводят к системе

$$\partial v/\partial t + \langle \nabla v, v\rangle = \nabla p, \quad \partial f/\partial t + a\partial f/\partial x + b\partial f/\partial y = 0$$

Уравнения векторного поля v являются уравнениями Эйлера на T^2. В двумерной гидродинамике уравнения Эйлера имеют решения, продолжаемые по времени на бесконечность. Обозначим через v^t это решение, а через g^t – соответствующее течение идеальной несжимаемой жидкости на T^2. Тогда непосредственно проверяется, что векторное поле $w^t = (v^t, f(g^{-t}(x, y))$ будет решением исходных уравнений Эйлера на T^3 с начальным условием $w^0 = (v^0, f(x, y))$.

Предложение 3.1. Решения уравнений Эйлера с начальными условиями $u = u^0 \in s$ дают кривые $u^t \in s$, продолжаемые во времени на бесконечность. Соответствующие течения U^t идеальной несжимаемой жидкости лежат в группе S.

Сформулируем теперь общее утверждение, дающее интегрируемые решения уравнений Эйлера в многомерной гидродинамике. Напомним, что стационарным векторным полем v называется решение уравнений Эйлера $v^t = v$, постоянное во времени ([14], с. 69). Предварительно докажем

Предложение 3.2. Пусть на ориентированном компактном римановом многообразии M задано векторное поле u из алгебры Ли $\mathfrak{k}$ компактной группы Ли K автоморфизмов римановой метрики. Тогда векторное поле u стационарно.

Доказательство. Воспользуемся формой (3.2) уравнений Эйлера. Так как u – векторное поле компактной группы, сохраняющей риманову метрику на M, то оператор $\mathrm{ad}u$ кососимметричен в пространстве $\mathrm{SVect}(M)$ бездивергентных векторных полей на M со скалярным произведением – кинетической энергией. Если обозначить через k алгебру Ли группы K и через P ортогональное дополнение к k, то легко показать, что $\mathrm{ad}u(P) \subset P$. Очевидно, что $\mathrm{ad}u(\mathrm{k}) \subset \mathrm{k}$. Тогда и $(\mathrm{ad}u)^*(\mathrm{k}) \subset \mathrm{k}$. Покажем, что $(\mathrm{ad}u)^*(u) = 0$. Возьмем $v \in \mathrm{k}$. Имеем $\langle(\mathrm{ad}u)^*(u), v\rangle = \langle u, \mathrm{ad}u(v)\rangle = -\langle u, \mathrm{ad}\,v(u)\rangle$.

Но так как $v \in \mathrm{k}$, то оператор $\mathrm{ad}\,v$ кососимметричен, откуда $\langle u, \mathrm{ad}\,v(u)\rangle = 0$. Так как $(\mathrm{ad}u)^*(u) \subset \mathrm{k}$, то $(\mathrm{ad}u)^*(u) = 0$, и векторное поле u является стационарным.

Для дальнейшего понадобится стандартное действие диффеоморфизма g на векторное поле v или функцию f, которое будем обозначать звездочкой в нижнем индексе:

$$g_* v(x) = dg|_{g^{-1}x} v|_{g^{-1}x}, \quad g_* f(x) = f(g^{-1}x)$$

Теорема 3.1. Пусть на компактном ориентированном римановом многообразии М имеются два бездивергентных векторных поля u, v, удовлетворяющих условиям

1) u – векторное поле из алгебры Ли компактной группы Ли автоморфизмов римановой метрики на M,

2) векторное поле v стационарно,

3) $\nabla_u v = 0$ либо условие 3' $\nabla_v u = 0$.

Тогда решением уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости с начальным условием $u + v$ будет векторное поле

$w^t = u + g_*^{-t}(v)$ при условии 3 либо $u + g_*^t(v)$ при условии 3'.

Здесь g^t – поток векторного поля u.

Доказательство. Из предложения 3.2 векторное поле u стационарно, а значит, $\nabla_u u = \nabla q$ (градиентное векторное поле). Из стационарности векторного поля v следует, что $\nabla_v v = \nabla f$. Используя условие 3, вычислим

$$\partial t(w^t)_{t=\tau} = \partial t g_*^{-t}(v)_{t=\tau} = [u, g_*^{-\tau}(\tau)] = \nabla_u g_*^{-\tau}(v) - \nabla_* u \quad (\nabla_* = \nabla_{g_*^{-\tau}(v)})$$

Заметим, что $g_*(u) = u$.

Если теперь поднять векторное поле u и действие диффеоморфизма g_* на касательное расслоение TM, то там сохранится аналогичное тождество. Так как g_* сохраняет риманову структуру, то имеем $\nabla_u g_*^{-\tau}(v) = g_*^{-\tau}\nabla_u(v) = 0$ согласно условию 3.

Вычислим $\nabla_{w^t} w^t$. Из условий теоремы и предыдущих выкладок имеем

$$\nabla_{w^t} w^t = \nabla_u u + \nabla_u g_*^{-\tau}(v) + \nabla_* u + \nabla_* g_*^{-\tau}(v) = \nabla_u u + \nabla_* u + \nabla_* g_*^{-\tau}(v)$$

Так как $g^{-\tau}$ сохраняет метрический тензор, то

$$\nabla_* g_*^{-\tau}(v) = g_*^{-\tau}\nabla_v v = g_*^{-\tau}\nabla f = \nabla g_*^{-\tau} f$$

Таким образом, имеем

$$\partial t(w^t) = \nabla_{w^t} w^t = \nabla g_*^{-\tau} f + \nabla_u u = \nabla g_*^{-\tau} f + \nabla q$$

Отсюда следует, что w^t удовлетворяет уравнениям Эйлера. Теорема с условием 3 доказана. Вариант с условием 3' доказывается аналогично.

Пример 3.1. Рассмотрим векторные поля на T^3, $v = q + h$, где $q = a\partial x + b\partial y + c\partial z$, h – стационарное бездивергентное векторное поле, a, b, c – постоянные. Имеем $\nabla_h q = 0$, т.е. выполняется условие 3' теоремы 3.1, и получаем, что решение уравнений Эйлера с начальными данными v имеет вид

$$v^t = (a, b, c) + h(x - at, y - bt, z - ct)$$

Пусть, в частности, a, b, c – постоянные, а h – (A, B, C) – поле на трехмерном торе ([4], [14], с. 72, [15]), т.е.

$$h = (A\sin z + C\cos y,\ B\sin x + A\cos z,\ C\sin y + B\cos x) \tag{3.5}$$

Тогда в качестве решения уравнений Эйлера (3.4), (3.5) имеем "дрейфующее" по трехмерному тору (A, B, C) – поле. Отсюда следует, что (A, B, C) – поле не обладает устойчивостью по Ляпунову как решение уравнений Эйлера. А именно, справедливо

Следствие 3.1. ϵ – вариация (A, B, C) – поля h в норме L^2 (и в соболевской норме W^n для любого $n \geq 1$) приводит за достаточно большое время t к вариации $\sqrt{2}\|h\|$ соответствующего решения уравнений Эйлера в L^2 норме.

Доказательство. Возьмем $a = b = c = \epsilon/\sqrt{6\pi}$. Тогда векторное поле $v^t = (a, b, c) + h$ будет ϵ – вариацией h. За время $T = \pi\sqrt{6\pi}/2\epsilon$ решение уравнений Эйлера с начальными данными v имеет вид

$$v_T = (a, b, c) + (-A\cos(z) + C\sin(y),\ -B\cos(x) + A\sin(z),\ -C\cos(y) + B\sin(x))$$

Это дает требуемую вариацию решения уравнений Эйлера.

Свяжем теперь полученный класс решений уравнений Эйлера с построенными выше группами второго рода.

Теорема 3.2. Пусть на двумерном компактном римановом многообразии M с $O(2)$ – структурой задано киллингово векторное поле u, а векторное поле v принадлежит алгебре Ли г обобщенной группы токов R поточечных автоморфизмов $O(2)$ – структуры.

Тогда на сферическом расслоении $S(M)$ для пары (u, v), где под u понимается его естественное поднятие на $S(M)$, выполняются условия теоремы 3.1 в варианте условия 3'.

Доказательство. Необходимо проверить выполнение условия $\nabla_v u = 0$ и стационарность векторного поля v. Фиксируем точку $x \in M$. Так как сферическое расслоение $\pi : S(M) \to M$ локально тривиально, то можно выбрать окрестность $U(x) \subset M$, над которой оно устроено как прямое произведение. Пусть $V = \pi^{-1}(U)$. Имеем $V = U \times S^1$ – прямое произведение римановых многообразий. Зададим локальную систему координат $p = (p^1, p^2)$ в окрестности U. Выберем на метризованном многообразии S^1 стандартную координату ϕ, взятую по модулю 2π. Имеем

$$u = \sum_i u_i(p)\partial p^i, \quad v = v\partial\phi$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_v u = \sum_j v_i(p, \phi)u_j(p)\nabla_{\partial\phi}\partial p^j$$

Так как на V задана метрика прямого произведения, то $\nabla_{\partial\phi}\partial p^j = 0$, откуда следует, что $\nabla_v u = 0$. Вычислим далее $\nabla_v v$. При фиксированном p обозначим через $b(p) = v(p, \phi)\partial\phi$ векторное поле на S^1. Непосредственно проверяется, что $\nabla_v v(p, \phi) = \nabla_b b$, где справа стоит ковариантная производная векторного поля b вдоль себя на S^1. Векторное поле b является ортогональным для стандартной метрики на S^1, откуда следует, что $b(\phi) = \text{const}$, и получаем, что $\nabla_b b = 0$. Значит, векторное поле υ стационарно, и условия теоремы 3.1 выполняются.

4. Случай вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое уравнениями Навье–Стокса ([16, 17])

$$\partial\upsilon/\partial t + \nabla_\upsilon \upsilon - \nu\Delta\upsilon = \nabla p \tag{4.1}$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на векторных полях. Здесь также получаются интегрируемые на бесконечности решения.

Рассмотрим векторные поля на трехмерном торе из предложения 3.1. Пусть $u = (a, b, f(x, y))$ на T^3, $a, b \in \mathbf{R}$, является начальным полем скоростей вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье–Стокса для поля скоростей вида u приводят к системе

$$\partial a/\partial t = 0, \quad \partial b/\partial t = 0, \quad \partial f/\partial t + a\partial f/x + b\partial f/\partial y - \nu\Delta f = 0$$

где Δf – оператор Лапласа. Для дальнейшего удобно будет разложить функцию f в ряд Фурье

$$f = \sum_{(k, l)} f_{k, l}(x, y)$$

$$f_{k, l}(x, y) = (a_{(k, l)}\cos(kx + ly) + b_{(k, l)}\sin(kx + ly))$$

Обозначим

$$\lambda_{(k, l)} = -k^2 - l^2$$

Введем далее зависящую от времени функцию

$$f_t(x, y) = \sum_{k, l}\exp(\nu\lambda_{(k, l)}t) f_{k, l}(x, y) \tag{4.2}$$

Предложение 4.1. Решением уравнений Навье–Стокса на T^3 с начальными условиями $u = (a, b, f(x, y))$, $a, b \in \mathbf{R}$ является кривая $u^t = (a, b, f_t(x - at, y - bt))$.

Доказательство. Применением метод вариации постоянных к решению уравнений Эйлера с такими же начальными данными u. В качестве варьируемых постоянных используем коэффициенты разложения в ряд Фурье функции f.

Так как $\lambda_{(k, l)}$ – собственное число оператора Лапласа на простых гармониках $(\cos(kx + ly), \sin(kx + ly))$, то получим уравнения для определения коэффициентов разложения в ряд Фурье

$$\partial a_{(k, l)}/\partial t = \nu\lambda_{(k, l)}a_{(k, l)}, \quad \partial b_{(k, l)}/\partial t = \nu\lambda_{(k, l)}b_{(k, l)}$$

откуда следует справедливость предложения.

Таким образом, для уравнений Навье–Стокса как и для уравнений Эйлера, решения на трехмерном торе с начальными условиями $u \in b$ дают кривые $u^t \in b$, продолжаемые во времени на бесконечность. Соответствующие течения U^t вязкой несжимаемой жидкости лежат в группе B. Таким образом, бесконечномерная группа Ли B является инвариантной для эволюционных уравнений как идеальной, так и вязкой несжимаемой жидкости.

Дадим аналог теоремы 3.1 для вязкой жидкости.

Теорема 4.1. Пусть на компактном ориентированном римановом многообразии M заданы два бездивергентных векторных поля u и υ, которые удовлетворяют условиям 1, 2 и 3 (либо условию 3') теоремы 3.1 и, кроме того, являются собственными для оператора Лапласа–Бельтрами с собственными числами λ и μ соответственно.

Тогда решением уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости с начальными данными $u + v$ будет векторное поле

$$w^t = \exp(\nu\lambda t)u + \exp(\nu\mu t)g_*^{-\phi(t)}(v) \text{ при условии 3}$$

либо

$$\exp(\nu\lambda t)u + \exp(\nu\mu t)g_*^{\phi(t)}(v) \text{ при условии 3'}$$

где, если $\lambda \neq 0$, то $\phi(t) = (\exp(\nu\lambda t) - 1)/(\nu\lambda)$ при $t \neq 0$ и $\phi(0) = 0$, если же $\lambda = 0$, то $\phi(t) = t$.

Доказательство. Здесь также применим метод вариации постоянных. Пусть для определенности выполняется условие 3. Будем искать решение в виде

$$w^t = a(t)u + b(t)g_*^{-\phi(t)}(v)$$

Если учесть, что действие диффеоморфизмов, сохраняющих риманову метрику, на векторных полях перестановочно с действием оператора Лапласа–Бельтрами, то получим уравнения относительно a и b

$$\partial a/\partial t = \nu\lambda a, \quad \partial b/\partial t = \nu\mu b$$

с начальными условиями $a(0) = b(0) = 1$, которые нужно дополнить уравнением относительно ϕ. Подставив выражение для w^t в уравнения Навье–Стокса, получаем

$$\partial t(g_*^{-\phi(t)}(v))_{t=\tau} = [\exp(\nu\lambda\tau)u, g_*^{-\phi(t)}(v)]$$

Используя известное выражение скобки Ли векторных полей через производную по действию кривой диффеоморфизмов из потока одного векторного поля на другое ([9], с. 101–105) с учетом произведенной замены времени t, получаем на $\phi(t)$ следующее уравнение:

$$\partial\phi/\partial t = \exp(\nu\lambda t)$$

с начальным условием $\phi(0) = 0$. Решая полученные уравнения относительно a, b, ϕ, завершаем доказательство теоремы.

5. Связь конструкций с теорией поля. Вернемся к примеру 2.2. Подробнее рассмотрим случай $n = 2$. Группа конформных преобразований касательного пространства в точке $CON(T_xS^2) \cong CON(R^2)$ коммутативна. Отсюда следует, что действие (2.1) группы K на $R = CON(S^2)$ сводится к сдвигам гладких функций на S^2 конформными преобразованиями S^2. А именно, конформное преобразование плоскости $t \in CON(R^2)$ можно задать парой чисел $t = (\phi, \lambda)$, где ϕ – угол поворота плоскости по часовой стрелке, а λ – величина гомотетии. Отсюда следует, что элемент $f \in CON(S^2)$ можно задать парой гладких функций $(\phi(x), \lambda(x))$, дающих в точке $x \in S^2$ эти параметры для действия в $T_x(S^2)$. Тогда действие элемента $k \in SO(1, 3)$ на $CON(S^2)$ имеет вид

$$k(\phi(x), \lambda(x)) = (\phi(k^{-1}x), \lambda(k^{-1}x))$$

Нормальный делитель N неэффективности действия группы $B = SO(1, 3)R$ на $S(S^2)$ состоит из элементов вида $(0, \lambda(x))$. После факторизации по N элемент в группе $Q = B/N$ можно задать парой $(k, \phi(x))$, и получаем в качестве Q полупрямое произведение $SO(1, 3)C^\infty(S^2)$ группы $SO(1, 3)$ на пространство гладких функций на сфере $C^\infty(S^2)$, где конформные преобразования действуют на пространстве функций трансляциями. Это известная в теории поля группа Бонди–Мецнера–Закса (BMS) [18].

Итак, доказано

Предложение 5.1. Группа BMS является группой Ли–Фреше второго рода и может быть реализована как подгруппа группы диффеоморфизмов

$$\mathrm{Diff}(S(S^2)) \cong \mathrm{Diff}(RP^3)$$

Рассмотрим в группе BMS подгруппу $L = SO(3)O(S^2)$, представляющую собой полупрямое произведение трехмерной собственной ортогональной группы $SO(3)$ и группы $O(S^2)$ поточечных ортогональных преобразований на TS^2. Группа L также действует на $S(S^2)$. Алгебру Ли 1 группы L образуют векторные поля этого действия, которые имеют вид $u = h + r$, где h – векторное поле действия ортогональной группы на S^2, а r – векторное поле поточенных $o(2)$ – автоморфизмов римановой метрики на S^2. Согласно теореме 3.2, такие векторные поля задают решения уравнений Эйлера на $S(S^2)$ вида $h + g^t_*(v)$, где g^t – поток ортогонального векторного поля h на S^2. Заметим, что $L \subset B = SO(3)CON(S^2)$, причем $N \cap L = \mathrm{Id}$, т.е. действие группы L на $S(S^2)$ эффективно. Поэтому группу L можно рассматривать как $L = SO(3)C^\infty(S^2)$, т.е. как полупрямое произведение собственной ортогональной группы $SO(3)$ на пространство гладких функций на двумерной сфере $C^\infty(S^2)$, где ортогональные преобразования действуют на функции трансляциями.

Отсюда следует

Предложение 5.2. В группе BMS можно выделить подгруппу $L \subset \mathrm{BMS}$, $L = SO(3)C^\infty(S^2)$. Векторные поля алгебры Ли l, группы L задают нестационарные решения уравнений Эйлера на трехмерном многообразии $S(S^2)$, продолжаемые во времени на бесконечность и остающиеся в алгебре Ли l. Соответствующие течения идеальной несжимаемой жидкости представляются кривыми в группе L, а значит, и в группе BMS.

По поводу физической интерпретации объектов, возникающих из расслоений над двумерной сферой с конформной структурой и представляемых группой BMS, см. [19].

Автор благодарит А.Л. Оницика за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00709).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365.
2. *Овсянников Л.В.* О периодических движениях газа // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 567–577.
3. *Козлов В.В.* О работах Э. Картана // Картан Э. Избранные труды. М.: МЦНМО, 1998. С. 6–7.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.
5. *Ebin D.G., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an icompressible fluid // Ann. Math. 1970. V. 92. № 1. P. 102–163.
6. *Денисова Н.В., Козлов В.В.* Стационарные движения сплошной среды, резонансы и лагранжева турбулентность // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 939–947.
7. *Алексовский В.А., Лукацкий А.М.* Нелинейная динамика намагниченности ферромагнетиков и движении обобщенного твердого тела с группой токов // Теорет. и мат. физика, 1990. Т. 85. № 1. С. 115–123.
8. *Лукацкий А.М.* Об одном обобщении конструкции групп токов // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та. 1998. С. 137–141.
9. *Sternberg S.* Lectures on Differential Geometry. Englewood Gliffs: Prentice Hall, 1964 = *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.
10. *Leslie J.* On a differential structure for the group of diffeomorphisms // Topology. 1967. V. 6. № 2. P. 263–271.

11. *Omori H.* Infinite dimensional Lie transformation groups // Lect. Notes Math. Berlin: Springer, 1974. V. 427. 149 p.
12. *Robart T.* Groupes de Lie de dimension infinie. Seconde et troisieme theoremes de Lie. I. Groupes de premier espese // C.R. ser. I. 1996. T. 322. № 11. P. 1071–1074.
13. *Kamran N., Robart T.* Abstract structure for Lie pseudogroups // C.R. ser. I. 1997. T. 324. № 12. P. 1395–1399.
14. *Arnold V.I., Khesin B.A.* Topological methods in Hydrodynamics. N.Y.: Springer, 1997. 376 p.
15. *Etnyre J., Christ R.* Contact topology and hydrodynamics III. Knotted orbits // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 12. P. 5781–5794.
16. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 203 с.
17. *Temam R.* Navier-Stokes equatios. Amsterdam: North-Holland, 1979 = *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
18. *McCarthy P.J.* The Bondi-Metzner-Sachs group in nuclear topology. Proc. Royal Soc. London. 1975. ser. A: V. 343. № 1635. P. 489–523.
19. *Hawking S., Penrose R.* The Nature of Space and Time. Pricenton N.J.: Nniv. Press, 1996 = *Хокинг С., Пенроуз Р.* Природа пространства и времени. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 160 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.2001