УДК 62-50

© 2003 г. В. Ю. Пахотинских, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков

КОНСТРУИРОВАНИЕ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается дифференциальная игра сближения – уклонения на конечном промежутке времени [1]. Предполагается, что позиции игры стеснены некоторым ограничением, представляющим собой замкнутое множество в пространстве позиций. Первому игроку требуется обеспечить попадание фазовой точки на терминальное множество в конечный момент времени, а второму – обеспечить уклонение от терминального множества в этот момент [1]. Предлагается метод приближенного построения множества позиционного поглощения – множества всех позиций, принадлежащих ограничению, из которых разрешима задача о сближении, стоящая перед первым игроком. Выписаны соотношения, определяющие систему множеств, аппроксимирующую множество позиционного поглощения. Основной результат – обоснование сходимости аппроксимационной системы множеств к множеству позиционного поглощения и построение вычислительной процедуры конструирования аппроксимационной системы множеств.

Работа примыкает к более ранним исследованиям [1–16].

1. Постановка задачи. Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 \le \vartheta < \infty)$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь x – m-мерный фазовый вектор из евклидова пространства R^m, u – управление первого игрока, v – управление второго игрока, P и Q – компакты в евклидовых пространствах R^p и R^q соответственно.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

А. Игра происходит в ограниченной и замкнутой области Φ пространства переменных t, x $(t \in [t_0, \vartheta], x \in R^m)$.

Б. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна по совокупности (t, x, u, v) на множестве $I \times R^m \times P \times Q$ (I – отрезок времени, содержащий внутри себя $[t_0, \vartheta]$) и удовлетворяет локальному условию Липшица по x: для любого компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$ найдется $L = L(D) \in (0, \infty)$, такое, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \le L\|x^{(1)} - x^{(2)}\| \tag{1.2}$$

при любых $(t, x^{(i)}, u, v)$ $(i = 1, 2)$ из $D \times P \times Q$.

Здесь $\|f\|$ – норма вектора f в соответствующем евклидовом пространстве.

Предполагается также, что движения $x(t)$ системы (1.1) продолжимы на отрезке $[t_0, \vartheta]$.

Рассматриваемая дифференциальная игра складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении [1]. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x(t)$ системы (1.1) в момент ϑ на замкнутое множество M, содержащееся в $\Phi(\vartheta) = \{x \in R^m : (\vartheta, x) \in \Phi\}$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [1].

Было показано [1], что для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива, а именно: существует такое замкнутое множество $W^0 \subset \Phi$, называемое множеством позиционного поглощения, что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in \Phi \backslash W^0$ разрешима задача об уклонении. При этом установлено, что W^0 – есть максимальный u-стабильный мост.

Множество W^0 допускает аналитическое описание лишь в редких случаях, поэтому важен вопрос о приближенном построении множества W^0, который и рассматривается ниже. С использованием попятных конструкций вводится система множеств, аппроксимирующая W^0 и отвечающая некоторой дискретизации отрезка $[t_0, \vartheta]$. Обосновывается сходимость аппроксимирующей системы множеств к W^0 при шаге дискретизации, стремящемся к нулю.

2. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты. Поскольку W^0 – максимальный u-стабильный мост [1], свойство стабильности является ключевым в выделении W^0 в Φ. Стабильность множества W, содержащегося в Φ, означает слабую инвариантность W относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с системой (1.1) и рассматриваемых на отрезке $[t_0, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение функцию (гамильтониан) системы (1.1).

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v)\rangle, \quad l \in R^m$$

$\langle l, f\rangle$ – скалярное произведение векторов l и f из R^m.

Пусть $\Phi_\sigma(\sigma > 0)$ – σ-окрестность множества Φ в пространстве переменных t, x, такая, что $\Phi_\sigma \subset I \times R^m$.

Полагаем $G = \{f \in R^m : \|f\| \le K < \infty\}$ – такой шар в R^m, что

$$F(t, x) = \mathrm{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P,\ v \in Q\} \subset G, \quad \forall (t, x) \in \Phi_\sigma$$

Здесь $\mathrm{co}\{f\}$ – выпуклая оболочка множества f.

Пусть задано некоторое множество Ψ элементов ψ, а также семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ отображений $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$, $(t, x) \in \Phi_\sigma$, удовлетворяющее следующим условиям.

А.1. Для любых $(t, x, \psi) \in \Phi_\sigma \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто в R^m и $F_\psi(t, x) \subset G$.

А.2. Для любых $(t, x, l) \in \Phi_\sigma \times S$ выполняется равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t, x, l)$$

А.3. Существует функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), такая, что

$$d(F_\psi(t_*, x_*), F_\psi(t^*, x^*)) \le \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|)$$

$$(t_*, x_*) \quad \text{и} \quad (t^*, x^*) \quad \text{из} \quad \Phi_\sigma,\ \psi \in \Psi$$

Здесь

$$h_F(l) = \sup_{f \in F} \langle l, f\rangle \quad \text{при} \quad F \subset R^m; \quad S = \{l \in R^m : \|l\| = 1\}$$

$d(F_*, F^*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F_* и F^* в R^m.

В качестве примеров семейств отображений, удовлетворяющих условиям А.1 – А.3, укажем семейства $\{G_l : l \in S\}$ и $\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot) \in V\}$ [1, 4, 5]; здесь $G_l(t, x) = \{f \in G : \langle l, f\rangle \le H(t, x, l)\}$, $F_{v(\cdot)}(t, x) = \overline{\mathrm{co}}\,\{f(t, x, u, v(u)) : u \in P\}$; $\overline{\mathrm{co}}\,\{f\}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{f\}$, V – совокупность всех отображений $v(\cdot) : P \mapsto Q$.

Отметим, что для некоторых классов управляемых систем, в частности для систем (1.1) с правой частью

$$f(t, x, u, v) = \phi(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v \tag{2.1}$$

и ограничениями P и Q – выпуклыми многогранниками с конечным числом вершин, можно ввести семейство отображений, удовлетворяющее условиям A.1 – A.3, которое соответствует конечному множеству Ψ. В качестве такого множества Ψ можно взять набор всех вершин $v^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, J$) многогранника Q, а в качестве множеств $F_\psi(t, x)$ – множества

$$F_{v^{(j)}}(t, x) = \{f = \phi(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v^{(j)} : u \in P\}, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

Такое задание семейства $\{F_{v^{(j)}}, j = 1, 2, \ldots, J\}$, удовлетворяющее условиям A.1 – A.3, позволяет эффективно осуществлять, по крайней мере для систем второго порядка, приближенное построение множества W^0.

Приведем определение оператора стабильного поглощения в рассматриваемой задаче о сближении.

Введем обозначения: $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ – множество всех $x^* \in R^m$, в которые приходят в момент $t^* \in [t_*, \vartheta]$ решения $x(\cdot) = (x(t): t_* \le t \le t^*)$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x), \quad x(t_*) = x_*,$$

$$X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in R^m : X_\psi(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \ne \varnothing\}$$

X^* – множество из R^m.

Определенеие 1. Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении назовем отображение

$$(t_*, t^*, X^*) \mapsto 2^{R^m}(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{R^m}$$

заданное соотношением

$$\pi(t_*, t^*, X^*) = \Phi(t_*) \cap \left(\bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \right)$$

Здесь $\Delta = \{(t_*, t^*): t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta\}$.

Определение 2. Замкнутое множество $W \subset \Phi$ назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении, если

$$W(\vartheta) \subset M, \; W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*)), \; \forall (t_*, t^*) \in \Delta$$

Здесь $W(t) = \{x \in R^m : (t, x) \in W\}$.

Свойство стабильности является центральным в теории позиционных дифференциальных игр. Приведенное здесь определение 2 – более позднее определение стабильности. Однако можно показать, что u-стабильные мосты W^0, выделяемые в множестве Φ при помощи определения из [1] – одни и те же. Это дает право использовать семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ удовлетворяющие условиям A.1 – A.3, для выделения в Φ максимального u-стабильного моста W^0 – множества позиционного поглощения [1]. Отметим, что при решении задачи о сближении на основании позиционного подхода основная тяжесть ложится на построение моста W^0. Известно, что описать точно мост W^0 при помощи аналитических соотношений можно лишь для некоторых специальных классов систем (1.1). В общем же случае приходится отказаться от точного выделения стабильного моста W^0. В связи с этим актуальна задача приближенного построения W^0. Этой задаче посвящен следующий раздел.

3. Аппроксимирующая система множеств. Предполагаем, что семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяет также следующему условию.

А4. Существует число $\lambda \in (0, \infty)$, такое, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \le \lambda \|x_* - x^*\|$$

для любых $\psi \in \Psi$, (t, x_*) и (t, x^*) из Φ_σ

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств, ориентированное на приближенное вычисление множества W^0. Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы u-стабильной дискретной схемой, а именно: отрезок $[t_0, \vartheta]$ подменяется разбиением $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n = \vartheta\}$, а множества $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$ из определения 1 – множествами $x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$. Далее определения 1 и 2 соответствующим образом трансформируются в определения, предназначенные для работы с дискретным временем t_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

Итак, полагаем

$$\tilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*)$$

$$\tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in R^m : X^* \cap \tilde{X}_\psi(t_*; t_*, x_*) \ne \varnothing\}$$

$$(t_*, t^*) \in \Delta, \quad x_* \in R^m, X^* \subset R^m, \quad \psi \in \Psi$$

Определение 3. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения $\pi^\varepsilon(\varepsilon \in$ $\in (0, \sigma))$ в задаче о сближении назовем отображение $(t_*, t^*, X^*) \mapsto \Delta \times 2^{R^m}$, заданное соотношением

$$\pi^\varepsilon(t_*, t^*, X^*) = \Phi(t_*)_\varepsilon \cap \left(\bigcap_{\psi \in \Psi} \tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*)\right)$$

Обозначим

$$\omega^*(\delta) = \sup_{\substack{(t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } \Phi_\sigma \\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \le \delta}} \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|)$$
$$\omega(\delta) = \delta\omega^*((1 + K)\delta), \quad \delta > 0 \tag{3.1}$$

Из определения функций $\omega^*(\delta)$ и $\omega(\delta)$ следует, что они монотонно убывают к нулю при $\delta \downarrow 0$, причем $\lim \dfrac{\omega^*(\delta)}{\delta} = 0$.

Зададим последовательность таких разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, что диаметры

$$\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i : 0 \le i \le N(n) - 1\}, \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i$$

разбиений Γ_n монотонно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Отметим, что моменты t_i разбиений Γ_n – свои для каждого разбиения Γ_n; однако, чтобы не усложнять обозначений, эту зависимость моментов t_i от номера n явно отражать не будем.

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие последовательность $\{\varepsilon_i\}$ чисел

$$\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N(n), \quad \varepsilon_0 = 0$$

Примем также, что разбиения Γ_n выбраны настолько "мелкими", что для любого Γ_n выполняются неравенства

$$\max_{0 \le i \le N(n)-1} (1+K)\Delta_i = (1+K)\Delta^{(n)} \le \sigma, \qquad \max_{0 \le i \le N(n)-1} \varepsilon_i \le \sigma \tag{3.2}$$

Поставим в соответствие каждому разбиению Γ_n последовательность $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\tilde{W}^{(n)}(t_i) \subset R^m$, $t_i \in \Gamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \vartheta$ разбиения Γ_n.

Определение 4. Полагаем

$$\tilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$$

$$\tilde{W}^{(n)}(t_i) = \pi^{\varepsilon_i}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad i = N(n)-1, \quad N(n)-2, \ldots, 1, 0$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\tilde{W}^{(n)}(t_i) \subset R^m$. Определим предел этой последовательности, когда диаметр $\Delta^{(n)}$ разбиения Γ_n стремится к нулю.

Определение 5. Полагаем Ω^0 – множество всех точек $(t_*, x_*) \in \Phi$, для каждой из которых найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*), \, x_n \in \tilde{W}^{(n)}(\tau_n)\} \tag{3.3}$$

что $(t_*, x_*) = \lim(\tau_n, x_n)$ при $n \to \infty$; здесь

$$\tau_n(t_*) = \min_{t_i \in \Gamma_n, \, t_i \ge t_*} t_i$$

Так как выполняется равенство $\tilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$, то сечение $\Omega^0(\vartheta) = \{x \in R^m : (\vartheta, x) \in \in \Omega^0\}$ множества Ω^0 определяется равенством $\Omega^0(\vartheta) = M$. Значит, $\Omega^0 \ne \varnothing$. Кроме того, из определения 5 следует $\Omega^0 \subset \Phi$.

Теорема. Справедливо равенство

$$\Omega^0 = W^0$$

Доказательство. Докажем сначала включение $\Omega^0 \subset W^0$. Для этого покажем, что Ω^0 – u-стабильный мост. В самом деле, выполняется включение $\Omega^0(\vartheta) \subset M$, следующее из равенства $\Omega^0(\vartheta) = M$.

Докажем теперь включение $\Omega^0(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$.

Зафиксируем для этого произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \vartheta$ и используем определение 5.

Рассмотрим произвольный номер n и отвечающий ему отрезок $[\tau_n, \vartheta]$. Из включения $x_n \in \tilde{W}^{(n)}(\tau_n)$ следует, что существует такая абсолютно непрерывная на $[\tau_n, \vartheta]$ вектор-функция $\tilde{x}^{(n)}(t)$, что для любого $\psi \in \Psi$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{x}}^{(n)}(t) \in F_\psi(t_i, \tilde{x}^{(n)}(t_i)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [\tau_n, \vartheta) \\ &\tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = x_n, \quad \tilde{x}^{(n)}(t_i) \in \tilde{W}^{(n)}(t_i), \quad \tau_n < t_i < \vartheta \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение функции, являющиеся непрерывными продолжениями на отрезок $[t_*, \vartheta]$ функций $\tilde{x}^{(n)}(t)$, $t \in [\tau_n, \vartheta]$:

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = \begin{cases} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n), & t_* \le t \le \tau_n \\ \tilde{x}^{(n)}(t), & \tau_n \le t \le \vartheta \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равноограниченна и равностепенно непрерывна на $[t_*, \vartheta]$, из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что это сама последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равномерно сходится на $[t_*, \vartheta]$. Полагая $x(t) = \lim \tilde{y}^{(n)}(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$ (здесь и всюду далее предел берется при $n \to \infty$), получаем

$$\begin{aligned} x(t_*) &= \lim \tilde{y}^{(n)}(t_*) = \lim \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = \lim x_n = x_* \\ x(t) &= \lim \tilde{y}^{(n)}(t) = \lim \tilde{x}^{(n)}(t), \quad t \in (t_*, \vartheta] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.3) – (3.5) следует, что вектор-функция $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x) \quad \text{почти всюду на} \quad [t_*, \vartheta] \tag{3.6}$$

и включению

$$(t, x(t)) \in \Omega^0, \quad t \in [t_*, \vartheta] \tag{3.7}$$

Включение (3.6) доказывается стандартным образом (см., например, [15]).

Докажем включение (3.7). Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \vartheta]$. Для этого момента имеет место равенство $x(t) = \lim \tilde{y}^{(n)}(t)$. По построению функции $\tilde{y}^{(n)}(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, выполняется включение

$$\tilde{y}^{(n)}(t_n(t)) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t)) \in \tilde{W}^{(n)}(t_n(t))$$

где момент $t_n(t)$ определен выше.

Полагаем

$$\eta_n = t_n(t) \quad \text{и} \quad y_n = \tilde{x}^{(n)}(\eta_n) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t))$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|(t, x(t)) - (\eta_n, y_n)\| \le \|(t, x(t)) - (t, \tilde{y}^{(n)}(t))\| + \\ &+ \|(t, \tilde{y}^{(n)}(t)) - (t_n(t), \tilde{y}^{(n)}(t_n(t)))\| \le \|x(t) - \tilde{y}^{(n)}(t)\| + (1 + K)\Delta^{(n)} \end{aligned}$$

Принимая во внимание это неравенство и предельные соотношения

$$x(t) = \lim \tilde{y}^{(n)}(t), \quad \lim \Delta^{(n)} = 0$$

получаем

$$(t, x(t)) = \lim(\eta_n, y_n), \quad \eta_n = t_n(t), \quad y_n \in \tilde{W}^{(n)}(\eta_n)$$

Тем самым включение (3.7) доказано.

Итак, для любой точки $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \vartheta$ и любого $\psi \in \Psi$ найдется решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$ дифференциального включения (3.6), удовлетворяющее включению (3.7). Из включений (3.6) и (3.7) следует $\Omega^0(t_*) \in \pi(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$. Значит, Ω^0 – u-стабильный мост в рассматриваемой задаче о сближении, и $\Omega^0 \subset W^0$.

Докажем обратное включение $W^0 \subset \Omega^0$.

Рассмотрим разбиение Γ_n отрезка $[t_0, \vartheta]$ и все непустые сечения $W^0(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, моста W^0. Обозначим

$$T_n = \{t_i \in \Gamma_n : W^0(t_i) \neq \varnothing\}$$

Множество T_n непусто, так как $W^0(t_N) = M \neq \varnothing$. Кроме того, множество T_n обладает свойством: если $t_i \in T_n$, то $t_{i+1} \in T_n$.

Согласно определениям 1, 2, справедливы включения

$$W^0(t_i) \subset \Phi(t_i) \cap X_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, W^0(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n, \quad \forall \psi \in \Psi \tag{3.8}$$

Выберем произвольный момент $t_i \in T_n$, $t_i < \vartheta$ и рассмотрим множества $W^0(t_i)$ и $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$; числа $\omega(\Delta_i)$ определены выше.

Справедливо включение

$$W^0(t_i) \subset \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i, t_{i+1}, W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}), \quad t_i \in T_n \tag{3.9}$$

Покажем это. Пусть $x(t_i) \in W^0(t_i)$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t)$, $t \geq t_i$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x), \quad t \geq t_i$$

с начальным значением $x(t_i)$.

Так как $(t_i, x(t_i)) \in W^0 \subset \operatorname{int}\Phi_\sigma$, то при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, достаточно близких к t_i, верно включение $(t, x(t)) \in \operatorname{int}\Phi_\sigma$.

Покажем, что при сделанных относительно Γ_n предположениях верно включение $(t, x(t)) \in \operatorname{int}\Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Допустим противное: существует момент $t^\circ \in [t_i, t_{i+1})$, в который точка $(t, x(t))$ выходит на границу $\partial\Phi_\sigma$ множества Φ_σ. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что t° – момент первого выхода точки $(t, x(t))$, $t \geq t_i$ на границу $\partial\Phi_\sigma$, т.е.

$$(t, x(t)) \in \operatorname{int}\Phi_\sigma \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t^\circ) \quad \text{и} \quad (t^\circ, x(t^\circ)) \in \partial\Phi_\sigma$$

Отсюда следует, что почти всюду на $[t_i, t^\circ]$ выполняется равенство $\dot{x}(t) = f(t)$, где $\|f(t)\| \leq K$. Тогда точка $(t^\circ, x(t^\circ))$ удовлетворяет неравенству

$$\|(t^\circ, x(t^\circ)) - (t_i, x(t_i))\| \leq (t^\circ - t_i) + K(t^\circ - t_i) < (1 + K)\Delta_i < \sigma$$

Отсюда и из включения $(t_i, x(t_i)) \in \Phi$ следует включение $(t^\circ, x(t^\circ)) \in \operatorname{int}\Phi_\sigma$, противоречащее определению момента t°. Вместе с тем установлено, что $(t, x(t)) \in \operatorname{int}\Phi_\sigma \subset \Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Для выбранной точки $x(t_i) \in W^0(t_i)$ рассмотрим множество $X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$. Каждая точка $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$ есть значение в момент t_{i+1} некоторого решения $x(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ с начальным значением $x(t_i)$. Справедливо равенство

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

где $f(t)$ – интегрируемая по Лебегу функция, удовлетворяющая включению $f(t) \in F_\psi(t, x(t))$ почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$.

Принимая во внимание включения

$$(t_i, x(t_i)) \in \Phi_\sigma, \quad (t, x(t)) \in \Phi_\sigma, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

а также определение функции $\omega^*(\Delta)$, получаем

$$d(F_\psi(t, x(t)), F_\psi(t_i, x(t_i))) \le \omega^*(|t - t_i| + \|x(t) - x(t_i)\|) \le \omega^*((1 + J)\Delta_i), \; t \in [t_i, t_{i+1}] \tag{3.10}$$

Значит, справедливо включение

$$f(t) \in F_\psi(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1 + K)\Delta_i)}$$

из которого следует включение

$$\frac{1}{\Delta_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \in F_\psi(t_i; x(t_i))_{\omega^*((1 + K)\Delta_i)} \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует включение

$$x(t_{i+1}) \in \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)} \tag{3.12}$$

Учитывая, что соотношение (3.12) получено для произвольной точки $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$, заключаем, что

$$X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \subset \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}$$

Из включения $x(t_i) \in W^0(t_i)$ следует, что

$$W^0(t_{i+1}) \cap X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \ne \varnothing$$

и, значит,

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \ne \varnothing \tag{3.13}$$

Поскольку момент $t_i \in T_n$ и точка $x(t_i) \in W^0(t_i)$ выбраны произвольно, из (3.13) следует включение (3.9).

Далее, зададим систему $\{\hat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in T_n\}$ множеств $\hat{W}^{(n)}(t_i)$ равенствами $\hat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i}$ (числа ε_i определены выше в разд. 2). По определению множеств $\hat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$, выполняются включения $W^0(t_i) \subset \hat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$.

Для любого $\psi \in \Psi$ справедливы включения

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i, t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n \tag{3.14}$$

Докажем это. Пусть $x(t_i) \in \hat{W}^{(n)}(t_i)$ и $x^*(t_i)$ – ближайшая к точке $x(t_i)$ точка на $W^0(t_i)$. Справедливо неравенство $\|x(t_i) - x^*(t_i)\| \le \varepsilon_i$.

Из включений $x^*(t_i) \in W^0(t_i)$ и (3.9) следует соотношение

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x^*(t_i)) \ne \varnothing \tag{3.15}$$

Тогда существует точка

$$x^*(t_{i+1}) = x^*(t_i) + \Delta_i f^*(t_i), \quad f^*(t_i) \in F_\psi(t_i, x^*(t_i)) \tag{3.16}$$

содержащаяся в $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$.

Так как $(t_i, x^*(t_i)) \in W^0 \subset \Phi_\sigma$ и $(t_i, x(t_i)) \in W^0_{\varepsilon_i} \subset W^0_\sigma \subset \Phi_\sigma$ то, согласно условию А.4, выполняется неравенство

$$d(F_\psi(t_i, x(t_i)), F_\psi(t_i, x^*(t_i))) \le \lambda \| x(t_i) - x^*(t_i) \|$$

Принимая во внимание это неравенство, выберем вектор $f(t_i) \in F_\psi(t_i, x(t_i))$, удовлетворяющий неравенству

$$\| f(t_i) - f^*(t_i) \| \le \lambda \| x(t_i) - x^*(t_i) \| \le \varepsilon_i$$

Тогда оказывается, что точка $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta_i f(t_i)$ отстоит от точки (3.15) не более, чем на величину

$$\| x(t_i) - x^*(t_i) \| + \Delta_i \| f(t_i) - f^*(t_i) \| \le (1 + \lambda \Delta_i)\varepsilon_i$$

Значит, $x(t_{i+1}) \in \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})$.

Таким образом, показано, что для любого $\psi \in \Psi$ и любых $t_i \in T_n$ и $x(t_i) \in \hat{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется соотношение

$$\tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \cap \hat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \ne \varnothing$$

Отсюда следует включение (3.14).

Справедливо также включение

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) \in \tilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in T_n \tag{3.17}$$

Докажем это методом математической индукции. В самом деле, выполняются соотношения

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i} \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i}, \quad t_i \in T_n \tag{3.18}$$

$$\hat{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = W^0(t_{N(n)})_{\varepsilon_{N(n)}} = M_{\varepsilon_{N(n)}} = \tilde{W}(t_{N(n)}) \tag{3.19}$$

Следовательно, для $i = N(n)$ включение $\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется.

Докажем, что включение (3.17) выполняется при всех остальных i, для которых $t_i \in T_n$.

Для этого предположим, что $t_i \in T_n$, $i \le N(n) - 1$, и для момента $t_{i+1} \in T_n$ имеет место включение

$$\hat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1}) \tag{3.20}$$

Докажем, что $\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_i)$. В самом деле, из соотношений (3.14) и (3.18) следует, что

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad \psi \in \Psi$$

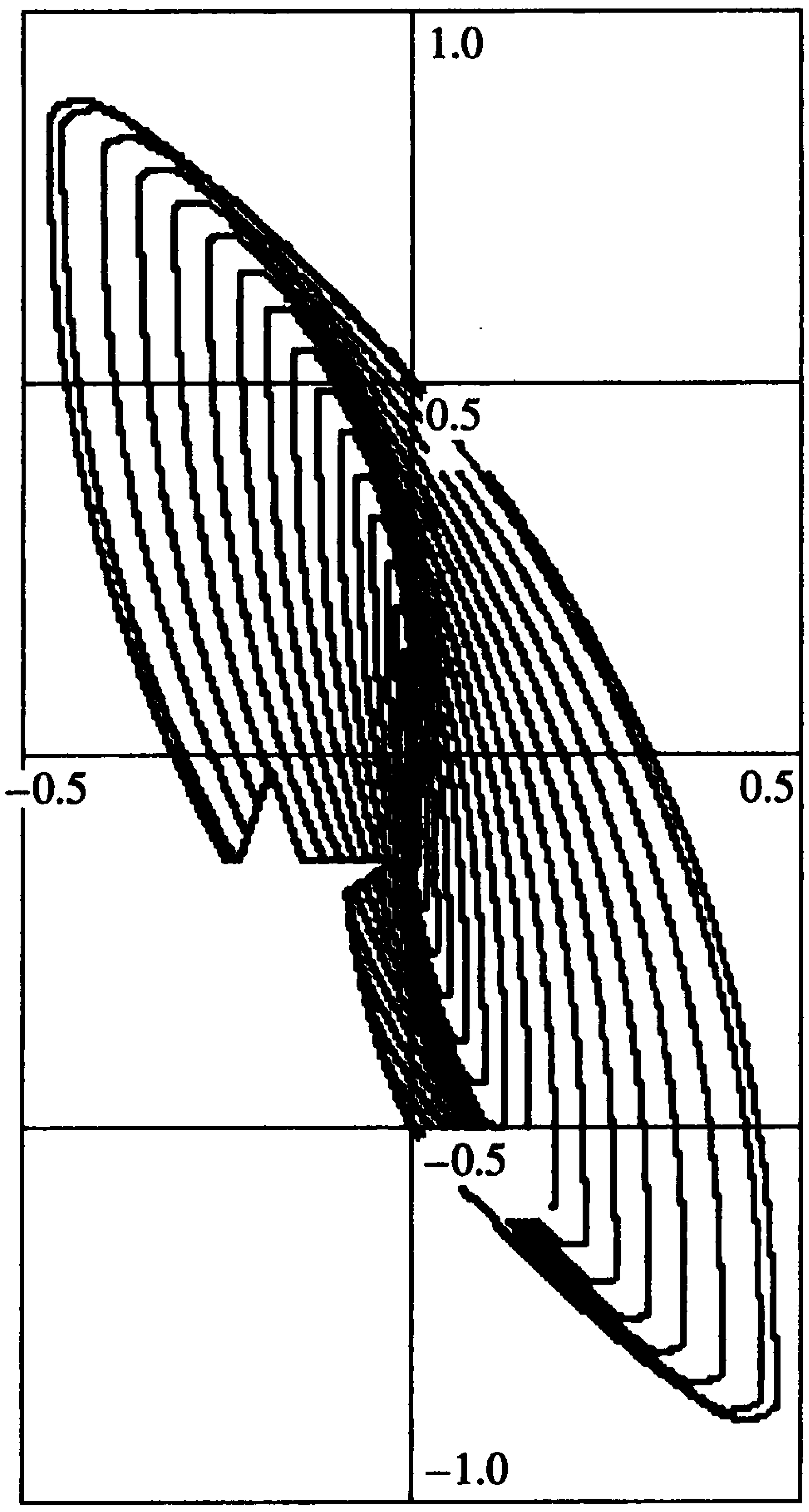
а из (3.20) следует

$$\Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad \psi \in \Psi$$

Таким образом, получаем, что $\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_i)$. Соотношения (3.17) доказаны.

Применим соотношения (3.17) к доказательству включения $W^0 \subset \Omega^0$.

В случае, когда $t_* = \vartheta$, выполняются равенства $W^0(t_*) = M$, $\Omega^0(t_*) = M$ и, значит, $W^0(t_*) = \Omega^0(t_*)$.



Фиг. 1

Пусть $t_* < \vartheta$. Выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in W^0$. Верны неравенства

$$t_* \le t_n(t_*) \le t_* + \Delta^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как $(t_*, x_*) \in W^0$, то для любого $\psi \in \Psi$ существует решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in W^0$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Отсюда следует включение

$$x(t_n(t_*)) \in W^0(t_n(t_*)) \subset \hat{W}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_n(t_*))$$

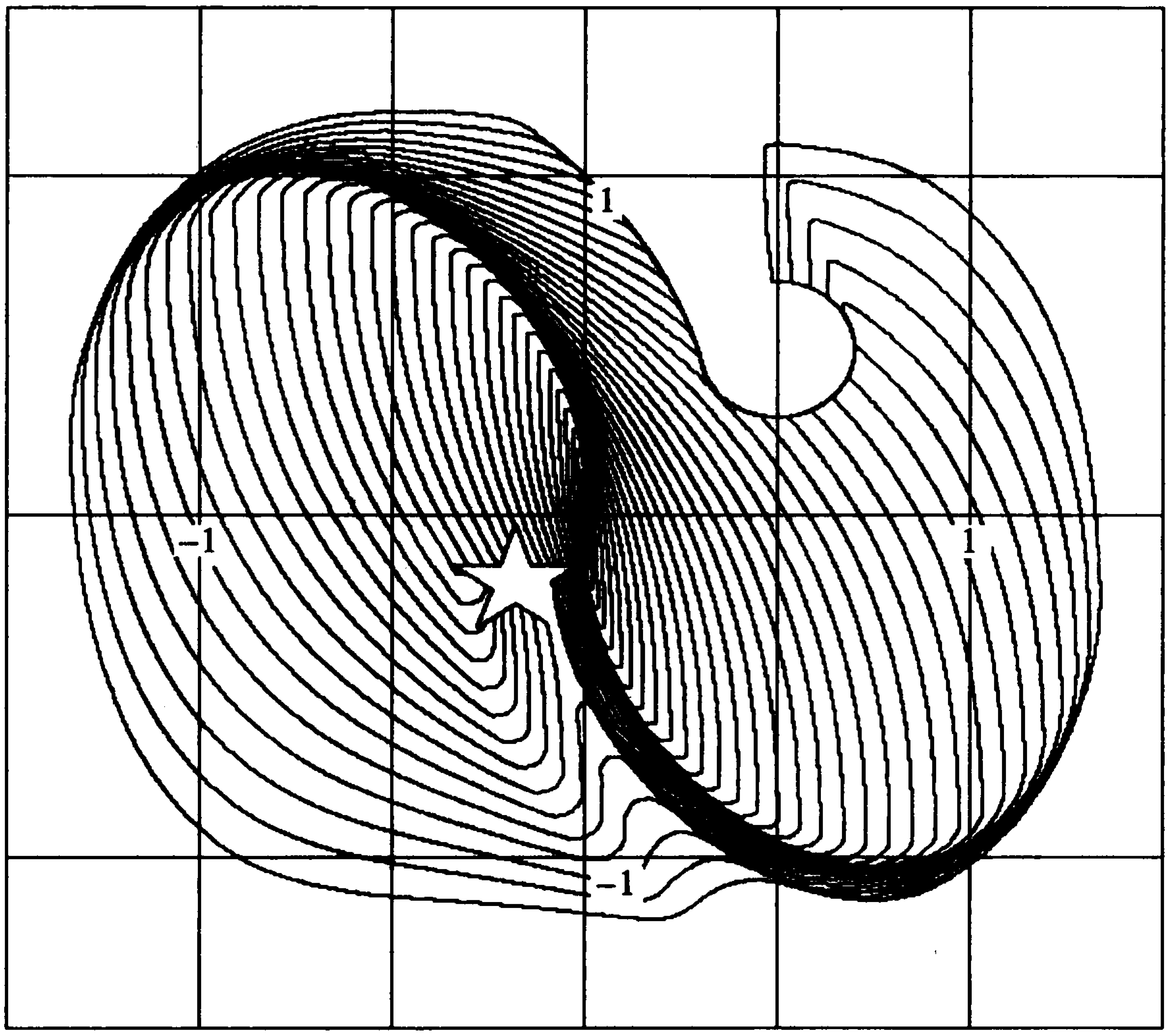
Значит, при каждом n найдется такая точка $x(t_n(t_*)) \in \tilde{W}^{(n)}(t_n(t_*))$, что

$$\|x(t_n(t_*)) - x_*\| \le K(t_n(t_*) - t_*)$$

Принимая во внимание равенство $\lim(t_n(t_*) - t_*) = 0$, получаем, что последовательность $\{(t_n(t_*)), x(t_n(t_*)))\}$ точек из W^0 удовлетворяет соотношению $(t_*, x_*) = \lim(t_n(t_*), x(t_n(t_*)))$ и, значит, $(t_*, x_*) \in \Omega^0$.

Показано, что $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$.

Из соотношений $W^0(\vartheta) \subset \Omega^0(\vartheta)$ и $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$ следует включение $W^0 \subset \Omega^0$. Из включений $\Omega^0 \subset W^0$ и $W^0 \subset \Omega^0$ следует равенство $\Omega^0 = W^0$. Теорема доказана.

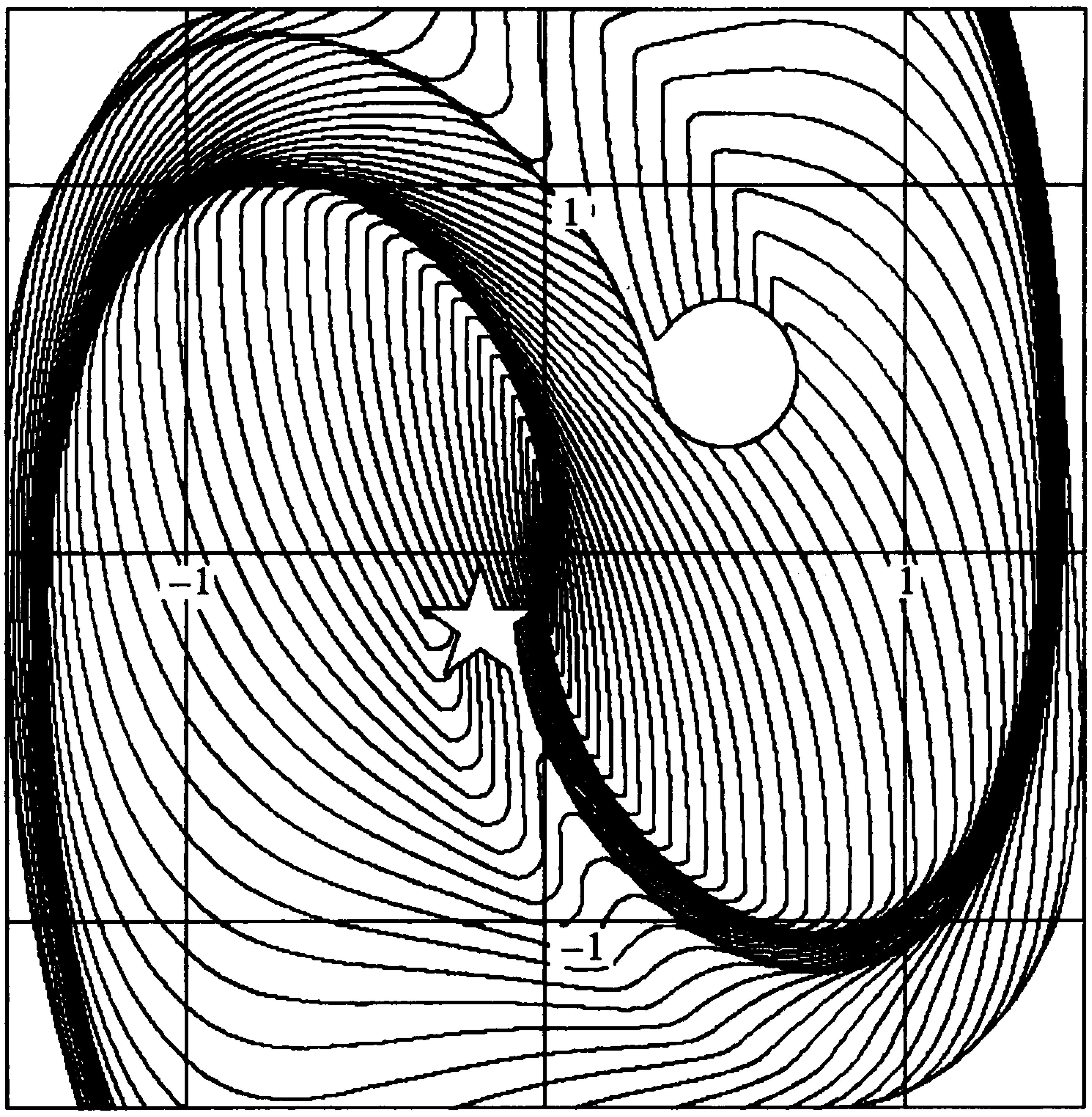


Фиг. 2

4. Численное моделирование для управляемых динамических систем второго порядка. Рассматривается класс управляемых динамических систем второго порядка, в которых управляющее воздействие второго игрока отсутствует. Для этих систем множество позиционного поглощения W^0, отвечающее отрезку времени $[t_0, \vartheta]$, представляет собой множество всех начальных позиций (t_*, x_*), из которых разрешима задача о приведении движений системы на целевое множество M за время, не превосходящее $\vartheta - t_0$.

Решается задача численного конструирования множества W^0. Для этого строится разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n = \vartheta\}$ отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ с шагом Δ. Область на фазовой плоскости, содержащая априори сечения по времени множества W^0, покрывается квадратной сеткой с шагом h, пропорциональным $\Delta^{\frac{3}{2}}$. На сетке с помощью описанных выше попятных процедур строится совокупность множеств $\{\tilde{W}(t_i)\}$, аппроксимирующая W^0. Выделение границы каждого элемента совокупности осуществляется пиксельным методом. Аналогичный подход к проблеме построения численных аппроксимаций решений динамических систем применен ранее [16]. Согласование шага разбиения отрезка времени и шага разбиения фазового пространства по формуле $h = C\Delta^{3/2}$, где C – постоянная, обеспечивает для рассматриваемого класса задач сходимость конечно-разностных конструкций к множеству W^0 в метрике Хаусдорфа.

Разработанная вычислительная схема применялась для моделирования различных управляемых динамических систем на плоскости.



Фиг. 3

В качестве примера рассмотрим управляемую жесткую пружину, описываемую нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 + u; \quad |u| \le 1$$

Изучим эволюцию динамической системы на отрезке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$ при наличии неодносвязного фазового ограничения. В качестве фазового ограничения рассмотрим объединение выпуклого множества – круга радиуса $r = 0.2$ с центром в точке $(x, y) = (0.5, 0.5)$, невыпуклого множества – пятиконечной звезды с центром в точке $(x, y) = (-0.13, -0.15)$ и неограниченного множества – замыкания дополнения до R^2 прямоугольника $B = \{(x, y): -1.5 \le x \le 1.5, -1.5 \le y \le 1.5\}$. Целевым множеством является начало координат $(x, y) = (0, 0)$. Конструируется множество W^0, которое может быть использовано в дальнейшем при решении задачи о приведении движений динамической системы в начало координат.

На Фиг. 1–3 изображены сечения множества W^0, отвечающие моментам времени $t = 1, 2, 3$ соответственно. При численном моделировании параметр дискретизации составил $\Delta = 0, 02$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-96424, 02-01-00769, 00-15-96057).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. Мат. Ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.

4. *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр //Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
5. *Красовский Н.Н.* Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления: Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. 1977. Вып. 24. С. 32–45.
6. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
7. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
8. *Никольский М.С.* Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
9. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. Вып. 5. С. 827–839.
10. *Алексейчик М.И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Мат. анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1975. Т. 7. С. 191–199.
11. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. *Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* О приближенном построении решений в игровых задачах управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 413–421.
13. *Пацко В.С., Турова В.Л.* Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 77 с.
14. *Заварин А.Б., Ушаков В.Н.* О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 831–842.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
16. *Незнахин А.А., Ушаков В.Н.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 6. С. 895-908.

Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru
uspen@imm.uran.ru
bigvasily@mail.ru

Поступила в редакцию
17.XII.2002