УДК 62-50

© 2003 г. Н. Н. Петров

"МЯГКАЯ" ПОИМКА В ПРИМЕРЕ Л.С.ПОНТРЯГИНА СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Получены условия "мягкой" поимки в примере Понтрягина со многими участниками и равными возможностями игроков.

Б.Н.Пшеничным [1] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями игроков. Естественным обобщением данной задачи является пример Л.С.Понтрягина [2] со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. В случае, когда условием поимки является совпадение фазовых координат, задача рассматривалась ранее [3]. В данной работе условием поимки является совпадение не только фазовых координат, но и скоростей. В предположении, что корни характеристического уравнения вещественны и неположительны, в терминах начальных позиций получены достаточные условия поимки. Для инерционных объектов получены условия поимки группой преследователей по крайней мере одного убегающего при условии, что все убегающие используют одно и то же управление. Работа примыкает к исследованиям [2-6].

1. Поимка одного убегающего. В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + \ldots + a_l y = v, \quad v \in V \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in R^k$, $a_1, \ldots, a_l \in R^1$, V – компакт. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0, \quad y^{(\alpha)}(0) = y_\alpha^0, \quad \alpha = 0, \ldots, l-1$$

причем $x_{i0}^0 \neq y_0^0$, $x_{i1}^0 \neq y_1^0$. Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 1. В игре Γ происходит "мягкая" поимка, если существуют $T > 0$ и измеримые функции $u_i(t) = u_i(t, x_{i\alpha}^0, y_\alpha^0, v_t(\cdot)) \in V$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$ существуют момент $\tau \in [0, T]$ и номер $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, такие, что

$$x_q(\tau) = y(\tau), \quad \dot{x}_q(\tau) = \dot{y}(\tau)$$

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + \ldots + a_l z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V \tag{1.3}$$

$$z_i(0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \ldots, z_i^{(l-1)}(0) = z_{il-1}^0 = x_{il-1}^0 - y_{l-1}^0 \tag{1.4}$$

Обозначим через φ_q ($q = 0, 1,\ldots, l-1$) решения уравнения

$$\omega^{(1)} + a_1\omega^{(l-1)} + \ldots + a_l\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0, \quad \omega^{(q)}(0) = 1, \quad \omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{l-1}(0) = 0$$

Предположение 1. Все корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{1.5}$$

вещественны и неположительны.

Обозначим корни уравнения (1.5) через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$), а их кратности соответственно $k_1, \ldots, k_s$.

Лемма 1. Пусть выполнено предположение 1 и $\lambda_s = 0$. Тогда $\varphi_{l-1}(t) \geq 0$, $\dot{\varphi}_{l-1}(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

Лемма 2. Пусть выполнено предположение 1 и $\lambda_s < 0$. Тогда

1) $\varphi_{l-1}(t) \geq 0$ для всех $t > 0$;

2) существует $\tau_0 > 0$, такое, что $\dot{\varphi}_{l-1}(t) > 0$ $t \in (0, \tau_0)$, $\dot{\varphi}_{l-1}(t) < 0$, $t \in (\tau_0, \infty)$.

Утверждения лемм 1, 2 следуют из известного результата ([7], с.136).

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \varphi_k(t) z_{ik}^0$$

Тогда ξ_i представимы в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{j=1}^{l-1} e^{\lambda_j t} P_{ji}(t)$$

где P_{ji} – многочлены. Будем считать, что $\deg P_{si} = k_s - 1 = \gamma$ для всех i, ибо в противном случае преследователи первоначально добиваются выполнения данного условия, выбирая свои управления $u_i(t)$ на достаточно малом отрезке времени так, чтобы коэффициенты при t^γ у многочленов P_{si} были отличны от нуля.

Рассмотрим случай

$$\lambda_s = 0, \quad k_s \geq 2 \tag{1.6}$$

и введем обозначения

$$M(t, \tau) = \min\left\{\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{t^\gamma}, \frac{\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)}{\gamma t^{\gamma-1}}\right\}, \quad R(f, t, \tau) = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{e^{\lambda_j(t-\tau)} f_j(t-\tau)}{\gamma(t-\tau)^{\gamma-1}}$$

Лемма 3. Пусть выполнено предположение 1 и условие (1.6). Тогда для любого $T > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \int_T^t M(t, \tau)d\tau = \infty$$

Доказательство. Функции φ_{l-1}, $\dot{\varphi}_{l-1}$ представимы в виде

$$\varphi_{l-1}(t-\tau) = a_\gamma(t-\tau)^\gamma[1 + g_1(t-\tau)]$$

$$\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau) = a_\gamma\gamma(t-\tau)^{\gamma-1}[1 + g_2(t-\tau)]$$

где

$$g_1(t-\tau) = \sum_{l=0}^{\gamma-1}\frac{a_l}{(t-\tau)^{\gamma-l}} + R(P,t,\tau),\quad g_2(t-\tau) = \sum_{l=1}^{\gamma-1}\frac{b_l}{(t-\tau)^{\gamma-l}} + R(Q,t,\tau)$$

Пусть $\varepsilon\in(0,1)$, $\tau\in[0,\varepsilon t]$. Тогда $t-\tau\ge(1-\varepsilon)t$ и

$$|g_1(t-\tau)| \le \sum_{r=1}^{\gamma}\frac{|a_{\gamma-r}|}{t^r(1-\varepsilon)^r} + \Sigma^1(t) = \Delta_1(t)$$

$$|g_2(t-\tau)| \le \sum_{r=1}^{\gamma-1}\frac{|b_{\gamma-r}|}{t^r(1-\varepsilon)^r} + \Sigma^2(t) = \Delta_2(t)$$

где

$$\Sigma^k(t) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{\lambda_j(1-\varepsilon)t}c_j^k(t),\quad c_j^1(t) = \frac{\max\limits_{t\in[0,\varepsilon t]}|P_j(t-\tau)|}{t^\gamma(1-\varepsilon)^\gamma},\quad c_j^2(t) = \frac{\max\limits_{\tau\in[0,\varepsilon t]}|Q_j(t-\tau)|}{\gamma t^{\gamma-1}(1-\varepsilon)^{\gamma-1}}$$

Так как $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то существует момент T_0, такой, что $|\Delta_1(t)|\le 1/2$, $|\Delta_2(t)|\le 1/2$ для всех $t>T_0$. Поэтому

$$\varphi_{l-1}(t-\tau)\ge {}^1\!/_2\, a_\gamma(t-\tau)^\gamma,\quad \dot\varphi_{l-1}(t-\tau)\ge {}^1\!/_2\, a_\gamma\gamma(t-\tau)^{\gamma-1}$$

для всех $t>T_0$, $\tau\in[0,\varepsilon t]$.

Отсюда для всех (t, T), таких, что $T>T_0$, $\varepsilon t>T$, справедливо неравенство

$$\int_T^t M(t,\tau)d\tau \ge \int_T^{\varepsilon t} M(t,\tau)d\tau \ge \int_T^{\varepsilon t}\frac{a_\gamma}{2}\frac{(t-\tau)^\gamma}{t^\gamma}d\tau\to\infty \quad \text{при}\quad t\to\infty$$

Пусть далее

$$z_i^0 = \lim_{t\to\infty}P_{si}(t)/t^\gamma,\quad \lambda(A,v) = \sup\{\lambda|\lambda\ge 0, -\lambda A\cap(V-v)\ne 0\}$$

$$\delta = \inf_{v\in V}\max_i\lambda(z_i^0, v) > 0$$

Предположение 2. Функции $\lambda(z_i^0, v)$ непрерывны во всех точках вида (z_i^0, v) для которых $\lambda(z_i^0, v)>0$.

Лемма 4. Пусть выполнены предположения 1, 2, условие (1.6) и $\delta>0$. Тогда существует момент T, такой, что для любой допустимой функции v найдется номер i, такой, что $h_i(T)\le 0$, где

$$h_i(t) = 1-\int_0^T\beta_i(T,\tau,v(\tau))d\tau$$

$$\beta_i(t,\tau,v) = \sup\{\lambda|\lambda\ge 0, -\lambda\mathcal{L}(\xi_i(t),t)\in\mathcal{L}(\varphi_{l-1}(t-\tau),t)(V-v)\}$$

$$\mathcal{L}(f(r),t) = \left\|\begin{matrix} f(r)/t^\gamma \\ \dot f(r)/(\gamma t^{\gamma-1})\end{matrix}\right\|$$

Доказательство. Отметим, что

$$\beta_i(t, \tau, v) = \min\left\{\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{t^\gamma}\lambda\left(\frac{\xi_i(t)}{t^\gamma}, v\right), \frac{\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)}{\gamma t^{\gamma-1}}\lambda\left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\gamma t^{\gamma-1}}, v\right)\right\}$$

Так как

$$z_i^0 = \lim_{t\to\infty}\frac{\xi_i(t)}{t^\gamma} = \lim_{t\to\infty}\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\gamma t^{\gamma-1}}$$

то существует момент T_0, такой, что

$$\max_i\lambda\left(\frac{\xi_i(t)}{t^\gamma}, v\right) \ge \frac{\delta}{2}, \quad \max_i\lambda\left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\gamma t^{\gamma-1}}, v\right) \ge \frac{\delta}{2}$$

для всех $t > T_0$, $v \in V$. Рассмотрим непрерывные функции h_i, учитывая, что

$$h_i(0) = 1, \quad \sum_i h_i(T) \le n - \int_0^T \max_i \beta_i(T, \tau, v(\tau))d\tau$$

Пусть $T > T_0$. Тогда

$$\max_i \beta_i(T, \tau, v(\tau)) \ge \frac{\delta}{2}M(T, \tau)$$

поэтому

$$\int_0^T \max_i \beta_i(T, \tau, v(\tau))d\tau \ge \frac{\delta}{2}\int_{T_0}^T M(T, \tau)d\tau = g(T)$$

Следовательно, $\sum_i h_i(T) \le n - g(T)$. Так как $\lim\limits_{T\to\infty} g(T) = +\infty$, то существуют момент T_1 и номер i, такие, что $h_i(T_1) \le 0$.

Пусть

$$\hat{T} = \inf\left\{T \ge 0:\ \inf_{v(\cdot)\in\Omega(T)} \max_i \int_0^T \beta_i(T, \tau, v(\tau))d\tau \ge 1\right\}$$

где $\Omega(T)$ – совокупность всех измеримых функций v, определенных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в V.

В силу леммы 4 $\hat{T} < \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1, 2, условие (1.6) и $\delta > 0$. Тогда в игре Г происходит "мягкая" поимка.

Доказательство. Пусть $v : [0, \hat{T}] \to V$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \max_i \int_0^t \beta_i(\hat{T}, \tau, v(\tau))d\tau$$

Пусть $\hat{u}_i(\tau)$ – лексикографический минимум среди решений системы

$$-\beta_i(\hat{T}, \tau, v(\tau))\mathcal{L}(\xi_i(\hat{T}), \hat{T}) = \mathcal{L}(\varphi_{l-1}(\hat{T}-\tau), \hat{T})(u - v(\tau))$$

Задаем управления преследователей P_i, полагая $u_i(\tau) = \hat{u}_i(\tau)$. Считаем, что $\beta_i(\hat{T}, \tau, \upsilon(\tau)) = 0$ при $\tau \in [t_1, \hat{T}]$. Тогда

$$\mathcal{L}(z_i(\hat{T}), \hat{T}) = \mathcal{L}(\xi_i(\hat{T}), \hat{T}) + \int_0^{\hat{T}} \mathcal{L}(\varphi_{l-1}(\hat{T}-\tau), \hat{T})(u_i(\tau) - \upsilon(\tau))d\tau =$$

$$= \mathcal{L}(\xi_i(\hat{T}), \hat{T})h_i(\hat{T}) = \mathcal{L}(\xi_i(\hat{T}), \hat{T})\left(1 - \int_0^{t_1} \beta_i(\hat{T}, \tau, \upsilon(\tau))d\tau\right) = 0$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случай

$$\lambda_s = 0, \quad k_s = 1 \tag{1.7}$$

и введем обозначения

$$M_1(t, \tau) = \min\left\{\varphi_{l-1}(t-\tau), \frac{\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_{s-1}t}}{t^{\mu}}\right\}, \quad \mathcal{L}_1(f(r), t) = \left\| \begin{matrix} f(r) \\ \dot{f}(r)e^{-\lambda_{s-1}t}/t^{\mu} \end{matrix} \right\|$$

В этом случае

$$\dot{\varphi}_{l-1}(t) = \sum_{r=1}^{s-1} e^{\lambda_r t} Q_r(t), \quad \xi_i(t) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{\lambda_j t} P_{ji}(t) + z_i^0, \quad \dot{\xi}_i(t) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{\lambda_j t} Q_{ji}(t)$$

Пусть $\deg Q_{s-1}(t) = \mu$. Считаем, что $Q_{s-1i}(t) \neq 0$ и $\deg Q_{s-1i}(t) = \mu$ для всех i. Пусть $z_i^1 = \lim\limits_{t \to \infty} Q_{s-1i}/t^{\mu}$.

Лемма 5. Пусть выполнено предположение 1 и условие (1.7). Тогда для любого $T > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \int_T^t M_1(t, \tau)d\tau = \infty$$

Доказательство. Функции φ_{l-1}, $\dot{\varphi}_{l-1}$ представимы в виде

$$\varphi_{l-1}(t-\tau) = a_{\gamma} + g_1(t-\tau)$$

$$\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau) = e^{\lambda_{s-1}(t-\tau)}(t-\tau)^{\mu}\lambda_{s-1}b_{\mu}[1 + g_2(t-\tau)]$$

где

$$g_1(t-\tau) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{\lambda_j(t-\tau)} P_j(t-\tau)$$

$$g_2(t-\tau) = \sum_{j=1}^{s-2} \frac{e^{(\lambda_j - \lambda_{s-1})(t-\tau)} Q_j^1(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} + \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{b_r}{(t-\tau)^{\mu-r}}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $\tau \in [0, \varepsilon t]$. Тогда $t - \tau \geq (1-\varepsilon)t$. Поэтому для $g_1(t-\tau)$, $g_2(t-\tau)$ справедливы неравенства

$$g_j(t-\tau) \leq \Delta_j(t)$$

причем $\Delta_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, существует момент T_0, такой, что

$$\varphi_{l-1}(t-\tau) \geq 1/2a_\gamma, \quad \dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau) \geq 1/2e^{\lambda_{s-1}(t-\tau)}(t-\tau)^\mu b_\mu \lambda_{s-1}$$

для всех $t > T_0$ и $\tau \in [0, \varepsilon t]$. Отсюда

$$\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_{s-1}t}/t^\mu \geq 1/2(1-\varepsilon)^\mu b_\mu \lambda_{s-1}$$

поэтому, для всех $T > T_0$

$$\int_T^t M_1(t,\tau)d\tau \geq \int_T^{\varepsilon t} a d\tau \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Пусть далее

$$\delta = \inf_{v \in V} \max_i \min\{\lambda(z_i^0, v), \lambda(z_i^1, v)\}$$

Предположение 3. Функции $\lambda(z_i^0, v)$, $\lambda(z_i^1, v)$ непрерывны во всех точках (z_i^0, v), (z_i^1, v) таких, что $\lambda(z_i^0, v) > 0$, $\lambda(z_i^1, v) > 0$.

Лемма 6. Пусть выполнены предположения 1, 3, условие (1.7) и $\delta > 0$. Тогда для любой допустимой функции v существуют момент T и номер i, такие, что $h_i(T) \leq 0$, где

$$\beta_i(t, \tau, v) = \sup\{\lambda | \lambda \geq 0, -\lambda \mathcal{L}_1(\xi_i(t), t) \in \mathcal{L}_1(\varphi_{l-1}(t-\tau), t)(V - v)\}$$

Доказательство. Из условия $\delta > 0$ следует, что для любого $v \in V$ существует номер i, такой, что $\lambda(z_i^0, v) > 0$, $\lambda(z_i^1, v) > 0$. В силу предположения 3 и условия

$$z_i^0 = \lim_{t \to \infty} \xi_i(t), \quad z_i^1 = \lim_{t \to \infty} \dot{\xi}_i(t)e^{-\lambda_{s-1}t}/t^\mu$$

получаем, что существует момент T_1, такой, что для всех $t > T_1$ справедливо неравенство

$$\inf_v \max_i \min\{\lambda(\xi_i(t), v), \lambda(\dot{\xi}_i(t)e^{-\lambda_{s-1}t}/t^\mu, v)\} \geq \frac{\delta}{2}$$

Пусть $T > T_1$. Тогда

$$\sum_i h_i(T) \leq n - \frac{\delta}{2}\int_{T_1}^T M_1(t,\tau)d\tau = n - g(T)$$

По лемме 5 $g(T) \to \infty$ при $T \to \infty$. Поэтому существуют момент T_0 и номер i, такие, что $h_i(T_0) \leq 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 3, условие (1.7) и $\delta > 0$. Тогда в игре Γ происходит "мягкая" поимка.

Доказательство. Пусть $v : [0, \hat{T}] \to V$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции h. Пусть $\hat{u}_i(\tau)$ – лексикографический минимум среди решений системы

$$-\beta_i(\hat{T}, \tau, v(\tau))\mathcal{L}_1(\xi_i(\hat{T}), \hat{T}) = \mathcal{L}_1(\varphi_{l-1}(\hat{T}-\tau), \hat{T})(u - v(\tau))$$

Задаем управления преследователей P_i, полагая $u_i(\tau) = \hat{u}(\tau)$. Считаем, что $\beta_i(\hat{T}, \tau, v(\tau)) = 0$ при $\tau \in [t_1, \hat{T}]$. Тогда

$$\mathcal{L}_1(z_i(\hat{T}), \hat{T}) = \mathcal{L}_1(\xi_i(\hat{T}), \hat{T}) + \int_0^{\hat{T}} \mathcal{L}_1(\varphi_i(\hat{T}-\tau), \hat{T})(u_i(\tau) - v(\tau))d\tau =$$

$$= \mathcal{L}_1(\xi_i(\hat{T}), \hat{T})h_i(\hat{T}) = \mathcal{L}_1(\xi_i(\hat{T}), \hat{T})\left(1 - \int_0^{t_1} \beta_i(\hat{T}, \tau, v(\tau))d\tau\right) = 0$$

Теорема доказана.

Пусть

$$\mathcal{L}_2(f(r), t) = \frac{e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma}\left\| \begin{matrix} f(r) \\ \dot{f}(r)/\lambda_s \end{matrix} \right\|$$

$$M_2(t, \tau) = \min\left\{ \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma}, \frac{-\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma} \right\}$$

Лемма 7. Пусть выполнено предположение 1 и $\lambda_s < 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существует момент T_0, такой, что для любого $T > T_0$

$$\lim_{t \to \infty} \int_T^{\varepsilon t} M_2(t, \tau)d\tau = \infty$$

Доказательство. Функции $\varphi_{l-1}, -\dot{\varphi}_{l-1}$ представимы в виде

$$\varphi_{l-1}(t-\tau) = a_\gamma(t-\tau)^\gamma e^{\lambda_s(t-\tau)}(1 + g_1(t, \tau))$$

$$-\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau) = a_\gamma(-\lambda_s)(t-\tau)^\gamma e^{\lambda_s(t-\tau)}(1 + g_2(t, \tau))$$

где

$$g_1(t, \tau) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{(\lambda_j - \lambda_s)(t-\tau)} \frac{P_j(t-\tau)}{(t-\tau)^\gamma a_\gamma} + \sum_{l=0}^{\gamma-1} \frac{a_l}{(t-\tau)^{\gamma-l}}$$

$$g_2(t, \tau) = \sum_{j=1}^{s-1} e^{(\lambda_j - \lambda_s)(t-\tau)} \frac{Q_j(t-\tau)}{(t-\tau)^\gamma a_\gamma(-\lambda_s)} + \sum_{l=0}^{\gamma-1} \frac{b_l}{(t-\tau)^{\gamma-l}}$$

Пусть $\tau \in (0, \varepsilon t)$. Тогда $t - \tau \ge (1-\varepsilon)\, t$, поэтому

$$|g_1(t, \tau)| \le \Delta_1(t), \quad |g_2(t, \tau)| \le \Delta_2(t)$$

причем $\Delta_1(t), \Delta_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Следовательно, существует момент T_0, такой, что $|g_1(t, \tau)| \le 1/2$, $|g_2(t, \tau)| \le 1/2$ для всех $t > T_0$, $\tau \in (0, \varepsilon t)$.

Поэтому

$$\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma} \ge \frac{a_\gamma(t-\tau)^\gamma e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma}, \quad -\frac{\dot{\varphi}_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma} \ge \frac{a_\gamma(t-\tau)^\gamma e^{-\lambda_s t}(-\lambda_s)}{t^\gamma}$$

для всех $t > T_0$, $\tau \in (0, \varepsilon t)$.

Пусть $T > T_0$, $\varepsilon t > T$, $t(1-\varepsilon) \geq \tau_0$, $\tau \in (0, \varepsilon t)$. Тогда

$$\int_T^{\varepsilon t} M_2(t, \tau) d\tau \geq \int_T^{\varepsilon t} \frac{c(t-\tau)^\gamma e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma} d\tau \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Пусть далее

$$z_i^0 = \lim_{t \to \infty} \xi_i(t) \frac{e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma}, \qquad \delta = \inf_{v \in V} \max_i \lambda(z_i^0, v)$$

Отметим, что

$$z_i^0 = \lim_{t \to \infty} \frac{\dot{\xi}_i(t) e^{-\lambda_s t}}{t^\gamma \lambda_s}$$

Лемма 8. Пусть выполнены предположения 1, 2, $\lambda_s < 0$, $\delta > 0$. Тогда существует момент T, такой, что для любой допустимой функции v найдется номер i, такой, что $h_i(T) \leq 0$, где

$$\beta_i(T, \tau, v) = \begin{cases} \beta_i^1(T, \tau, v), \text{ если } T - \tau > \tau_0 \\ 0, \text{ если } T - \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

$$\beta_i^1(t, \tau, v) = \sup\{\lambda | \lambda \geq 0, -\lambda \mathcal{L}_2(\xi_i(t), t) \in \mathcal{L}_2(\varphi_{l-1}(t-\tau), t)(V - v)$$

(здесь τ_0 – положительный корень функции φ_{l-1}).

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1, 2, $\lambda_s < 0$, $\delta > 0$. Тогда в игре Г происходит "мягкая" поимка.

Доказательство аналогично доказательству соответствующих теорем для $\lambda_s = 0$.

Обозначим через $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ri} X$, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, относительную внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset R^k$.

Пример 1. Системы (1.3), (1.4) имеют вид

$$\ddot{z}_i = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad \dot{z}_i(0) = z_i^1; \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1$$

Тогда $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 2$, $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(1) = t$, поэтому

$$\xi_i(t) = z_i^0 + t z_i^1, \quad \dot{\xi}_i(t) = z_i^1$$

Утверждение 1. Пусть $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^1, \ldots, z_n^1\}$, тогда в игре Г происходит "мягкая" поимка.

Пример 2. Системы (1.3), (1.4) имеют вид

$$z_i^{(3)} + 3\ddot{z}_i + 2\dot{z}_i = u_i - v, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1$$

$$z_i(0) = z_{i0}^0, \quad \dot{z}_i(0) = z_{i1}^0, \quad \ddot{z}_i(0) = z_{i2}^0$$

Тогда

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2}$$

поэтому

$$\xi_i(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}z_{i1}^0 + \frac{1}{2}z_{i2}^0\right) + e^{-t}(-2z_{i1}^0 - z_{i2}^0) + z_{i0}^0 + \frac{3}{2}z_{i1}^0 + \frac{1}{2}z_{i2}^0$$

Полагаем $z_i^0 = z_{i0}^0 + \frac{3}{2}z_{i1}^0 + \frac{1}{2}z_{i2}^0$, $z_i^1 = 2z_{i1}^0 + z_{i2}^0$.

Считаем, что $z_i^0 \neq 0$, $z_i^1 \neq 0$.

Утверждение 2. Пусть

$$\min_{v}\max_{i}\min\{\lambda(z_i^0, v), \lambda(z_i^1, v)\} > 0$$

Тогда в игре Г происходит "мягкая" поимка.

2. Преследование группы убегающих. Пусть законы движения n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ с управлениями u_i и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с управлением v имеют вид

$$\ddot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \ddot{y}_j = v, \quad \|v\| \leq 1 \tag{2.1}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = x_i^1, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \dot{y}_j(0) = y_j^1, \quad x_i^0 \neq y_j^0, \quad x_i^1 \neq y_j^1 \tag{2.2}$$

Отметим, что все убегающие используют одно и то же управление.

Определение 2. В игре Г происходит "мягкая" поимка, если существуют момент $T > 0$ и измеримые функции

$$u_i(t) = u_i(t, x_{i\alpha}^0, y_\alpha^0, v_t(\cdot)), \quad \|u_i(t)\| \leq 1$$

такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $\|v(t)\| \leq 1$, $t \in [0, T]$ существуют момент $\tau \in [0, T]$ и номера $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, такие, что

$$x_q(\tau) = y_r(\tau), \quad \dot{x}_q(\tau) = \dot{y}_r(\tau)$$

Вместо систем (2.1), (2.2) рассмотрим систему

$$\ddot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0, \quad \dot{z}_{ij}(0) = z_{ij}^1 \tag{2.3}$$

Будем полагать, что начальные данные таковы, что

а) для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geq k + 1$ справедливо условие

$$\operatorname{Intco}\{x_i^1, i \in I\} \neq \varnothing$$

б) любые k векторов из совокупности $\{x_i^1 - y_j^1, y_s^1 - y_r^1, s \neq r\}$ линейно независимы.

Теорема 4. Пусть

$$\operatorname{Intco}\{x_i^1\} \cap \operatorname{co}\{y_j^1\} \neq \varnothing \tag{2.4}$$

Тогда в игре Г происходит "мягкая" поимка.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $n + m \geq k + 2$. В силу известного результата ([8], лемма 3) существуют множества $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $J \subset \{1, \ldots, m\}$, такие, что

$$\operatorname{rico}\{x_i^1, i \in I\} \cap \operatorname{rico}\{y_j^1, j \in J\} \neq \varnothing$$

и $|I| + |J| = k + 2$. Будем считать, что

$$I = \{1, \ldots, q\}, \quad J = \{1, \ldots, l\}$$

причем $q + l = k + 2$. Из известного результата ([8], лемма 2) система $\{z_{ij}^1, i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис. Если $|J| = 1$, то “мягкая” поимка следует из утверждения 1. Считаем, что $|J| \geq 2$. Пусть $c_\alpha^\beta = y_\alpha^1 - y_\beta^1$. Тогда $z_{i\alpha}^1 = z_{i1}^1 + c_1^\alpha$ для всех $i \in I$, $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$.

Поэтому $\{z_{i1}^1, i \in I, c_1^\alpha, \alpha \in J, \alpha \neq 1\}$ образуют положительный базис. Так как $n \geq k + 1$, то $q + \alpha - 1 \in \{q + 1, \ldots, n\}$ для всех $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$. В силу известного результата ([8], лемма 1) система

$$\{z_{i1}^1, i \in I, z_{q+\alpha-11}^1 + \mu c_1^\alpha, \alpha \in J, \alpha \neq 1\}$$

образует положительный базис. В силу леммы 4 существует момент $T > 0$, такой, что для любой допустимой функции $\upsilon(\cdot)$ найдется номер i, такой что

$$1 - \int_0^T \beta_{i1}(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau \leq 0$$

где

$$\mathcal{L}_3(f(r), t) = \left\|\begin{matrix} f(r) \\ t \\ \dot{f}(r) \end{matrix}\right\|$$

$$\beta_{j1}(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\lambda | \lambda \geq 0, -\lambda\mathcal{L}_3(\xi_{j1}(t), t) \in \mathcal{L}_3((t-\tau), t)(V - \upsilon)\}$$

$$\xi_{i1}(t) = z_{i1}^0 + z_{i1}^1 t, \quad i \in I$$

$$\xi_{q+\alpha-11}(t) = z_{q+\alpha-11}^0 + (z_{q+\alpha-11}^1 + \mu c_1^\alpha)t, \quad \alpha \in J, \quad \alpha \neq 1, \quad V = \{\upsilon : \|\upsilon\| \leq 1\}$$

Пусть

$$T_0 = \inf\left\{T \,\Big|\, \inf_{\upsilon(\cdot)}\max_j \int_0^T \beta_{j1}(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau \geq 1\right\}$$

$\upsilon(\cdot)$ – произвольное управление убегающих, t_1 – наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \max_j \int_0^t \beta_{j1}(T_0, \tau, \upsilon(\tau))d\tau$$

Пусть $\hat{u}_j(\tau)$ – лексикографический минимум среди решений системы

$$-\beta_{j1}(T_0, \tau, \upsilon(\tau))\mathcal{L}_3(\xi_{j1}(T_0), T_0) \in \mathcal{L}_3((T_0 - \tau), T_0)(u - \upsilon(\tau))$$

Задаем управления преследователей, полагая $u_i(t) = \hat{u}_i(t)$. Считаем, что $\beta_{j1}(T_0, \tau, \upsilon(\tau)) = 0$, $\tau \in [t_1, T_0]$. Тогда из системы (2.3) получаем

$$\begin{aligned} &\dot{z}_{i1}(t) = z_{i1}^1 h_i(t), \quad i \in I \\ &\dot{z}_{q+\alpha-11}(t) + z_{q+\alpha-11}^1 + \mu c_1^\alpha = (z_{q+\alpha-11}^1 + \mu c_1^\alpha)h_{q+\alpha-1}(t), \quad \alpha \in J, \quad \alpha \neq 1 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Из определения T_0 следует, что существует значение r, для которого $h_r(T_0) = 0$. Если $r \in I$, то, по теореме 1, в игре Г происходит "мягкая" поимка. Если $h_{q+\gamma-1 1}(T_0) = 0$ при некотором $\gamma \in J$, $\gamma \neq 1$, то $\dot{z}_{q+\gamma-1 1}(T_0) = -\mu c_1^\gamma$.

Покажем, что

$$\operatorname{rico}\{\dot{x}_i(T_0), i \in I\} \cap \operatorname{rico}\{\dot{y}_j(T_0), j \in J\} \neq \varnothing \tag{2.6}$$

Используя равенство (2.5) и соотношение

$$\dot{z}_{i\alpha}(T_0) = \dot{z}_{i1}(T_0) + c_1^\alpha = \dot{z}_{i1}(T_0) + z_{i\alpha}^1 - z_{i1}^1$$

для всех $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$ получим

$$z_{i\alpha}^1 = \dot{z}_{i\alpha}(T_0) - \dot{z}_{i1}(T_0) + z_{i1}^1 = \dot{z}_{i\alpha}(T_0) + H_{i1}^0 \dot{z}_{i1}(T_0), \quad H_{i1}^0 = (1 - h_{i1}(T_0))/h_{i1}(T_0)$$

По условию система $\{z_{ij}^1, i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис, поэтому положительный базис образует система

$$\{\dot{z}_{i1}(T_0)/h_{i1}(T_0), \dot{z}_{i\alpha}(T_0) + H_{i1}^0 \dot{z}_{i1}(T_0), \alpha \in I\backslash\{1\}\}$$

Так как $h_{i1}(T_0) \in (0, 1]$, то положительный базис образует система $\{\dot{z}_{ij}(T_0), i \in I, j \in J\}$. Отсюда, используя известный результат ([8], лемма 2) получаем соотношение (2.6). Так как $\dot{z}_{q+\alpha_0-1 1}(T_0) = -\mu c_1^{\alpha_0}$ и выполнено условие (2.6), то, используя известный результат ([8], лемма 4), получаем

$$\operatorname{rico}\{\dot{x}_i(T_0), i \in I, \dot{x}_{q+\alpha_0-1 1}(T_0)\} \cap \operatorname{rico}\{\dot{y}_j(T_0), j \in 1, j \in J\} \neq \varnothing$$

Считаем, что $\alpha_0 = 2$. Далее полагаем

$$I = \{1, 2, \ldots, q+1\}, \quad j = \{2, \ldots, l\}$$

Для множеств I, J справедливо условие (2.4), при этом число убегающих, участвующих в данном условии, уменьшилось на единицу. Принимая момент T_0 за начальный, будем повторять наши рассуждения до тех пор, пока число убегающих не станет равным единице. Получим, что

$$\operatorname{rico}\{\dot{x}_i(\tau), i \in I\} \cap \operatorname{rico}\{\dot{y}_j(\tau), j \in J\} \neq \varnothing$$

в некоторый момент $\tau > 0$, причем $|I| = k + 1$, $|J| = 1$. Теперь поимка следует из утверждения 1. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть

$$\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^1\} \cap \operatorname{co}\{y_j^1\} \neq \varnothing$$

Тогда в игре Г происходит уклонение от "мягкой" поимки.

Доказательство следует из известного результата [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования РФ(Е02-1.0-100) и Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00014).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. 3. С. 145–146.
2. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т.2. М.: Наука, 1988. 575 с.
3. *Петров Н. Н.* Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1997. 196 с.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
5. *Иванов Р.П.* К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 185. С. 74–83.
6. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 196 с.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
8. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
9. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.

Ижевск
e-mail: npetrov@udmnet.ru

Поступила в редакцию
26.VIII.2002