УДК 62–50

© 2003 г. М. В. Топунов

О ВЫПУКЛОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ БИЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется множество достижимости билинейной управляемой системы, в которой множество допустимых значений управления – выпуклый многогранник. Найдены достаточные условия выпуклости множества достижимости, что дает возможность использовать принцип максимума в стандартном виде.

В настоящее время геометрия множества достижимости нелинейных управляемых систем остается во многом недостаточно полно исследованной. Исследование множества достижимости управляемых систем обычно ограничивается установлением достаточных условий его компактности [1]; в [2] множество достижимости управляемых систем исследовалось лишь на малых промежутках времени; в [3] установлено достаточное условие так называемой Λ-выпуклости множества достижимости управляемых систем; исследовались отдельные вопросы, связанные с геометрией множества достижимости билинейных систем [4, 5].

Ниже устанавливаются достаточные условия, при которых множество достижимости билинейной управляемой системы является выпуклым. В отличие от полученных ранее результатов найденные условия имеют непосредственную прикладную направленность; они позволяют эффективно применять принцип максимума в стандартном виде для исследования билинейных управляемых систем.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия с закрепленными концами для гладкой управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M, \quad u(\cdot) \in \mathfrak{D} \tag{1}$$

где M – гладкое C^∞-многообразие, регулярно вложенное в $\mathbb{R}^n$, U – выпуклый компактный многогранник в $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{D}$ – множество допустимых управлений, состоящее из всех ограниченных измеримых функций времени t, принимающих значения в U.

Пусть $F(u)$ – точка фазового пространства, в которую переходит управляемая система (1) из начальной точки x_0 за время T под воздействием допустимого управления $u(\cdot) \in \mathfrak{D}$. Множеством достижимости $F(\mathfrak{D})$ управляемой системы (1) из точки x_0 за время T будем называть множество

$$F(\mathfrak{D}) = \{F(u), u(\cdot) \in \mathfrak{D}\}$$

Производной $F(u)$ по направлению $\eta(\cdot) \in \mathfrak{D}$ назовем

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u}\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon\eta) - F(u)}{\varepsilon}$$

Отображение

$$f : N \to M$$

гладкого (конечномерного или бесконечномерного) многообразия N в конечномерное многообразие M называется отображением постоянного ранга, если ранг дифференциала (касательного отображения)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : T_x N \to T_{f(x)} M$$

не зависит от $x \in N$.

Система (1) называется управляемой системой постоянного ранга, если для любой точки x_0 и для любого T ранг отображения

$$u(\cdot) \mapsto F(u)$$

не зависит от $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ (однако он может зависеть от x_0 и T).

Как частный случай системы (1) рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = \left(A + \sum_{i=1}^{m} B_i u_i\right)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{D} \tag{2}$$

где A и B_i ($i = 1,\ldots, m$) – квадратные матрицы n-го порядка.

Достаточные условия постоянства ранга (условия релейности) для билинейной системы (2) имеют вид [6]

$$[B_i, \mathrm{ad}^k AB_j] = \sum_{\alpha=0}^{k} \sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}^{ijk} \mathrm{ad}^{\alpha} AB_{\beta}, \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

где

$$\mathrm{ad}^0 AB = B, \quad \mathrm{ad}AB = [A, B] = AB - BA$$

$$\mathrm{ad}^{k+1} AB = [A, \mathrm{ad}^k AB], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Будем полагать, что система (2) удовлетворяет условиям релейности (3), т.е. является системой постоянного ранга. Следовательно, плоскость,

$$\Pi(u) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial F(u)}{\partial u} v, \ v(\cdot) \in \mathcal{D}\right\}$$

являющаяся образом дифференциала

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u} : T_u \mathcal{D} \to T_{F(u)} \mathbb{R}^n$$

не зависит от управления $u(\cdot) \in \mathcal{D}$, т.е. $\Pi(u) \equiv \Pi$.

В дальнейшем через $\Omega_0^t(P)$ будем обозначать матрицант (фундаментальную матрицу) системы

$$dX/dt = P(t)X$$

Тогда [6, 7]

$$\Omega_0^t(A) = e^{At}, \quad A = \mathrm{const} \tag{4}$$

$$\Omega_0^t(A + B) = \Omega_0^t(A)\Omega_0^t(\mathrm{Ad}\Omega_0^{\theta}(A)B)$$

$$\frac{\partial \Omega_0^t(A_u)}{\partial u} \eta = \Omega_0^t(A_u) \int_0^t \mathrm{Ad}\Omega_0^{\theta}(A_u) \frac{\partial A_u(\theta)}{\partial u} \eta d\theta \tag{5}$$

где

$$\mathrm{Ad}AB = A^{-1}BA$$

а матричная функция $A_u(t)$ гладко зависит от параметра u.

Имеем

$$F(u) = \Omega_0^T(A + \mathfrak{B}u)x_0, \quad \mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_m), \quad u(\cdot) \in \mathfrak{D} \tag{6}$$

Теорема. Множество достижимости за время T для билинейной управляемой системы постоянного ранга (2) является выпуклым, если для любых вектор-функций $u(\cdot)$, $v(\cdot) \in \mathfrak{D}$ найдутся вектор-функция $\mu(\cdot) \in \mathfrak{D}$ и число $\lambda \geq 0$, такие, что

$$\Omega_0^T(\mathrm{Ad}\Omega_0^\theta(e^{-\xi \mathrm{ad}A}\mathfrak{B}u)e^{-\theta \mathrm{ad}A}\mathfrak{B}(v-u)) - E = \lambda \int_0^T \mathrm{Ad}\Omega_0^\theta(e^{-\xi \mathrm{ad}A}\mathfrak{B}u)e^{-\theta \mathrm{ad}A}\mathfrak{B}(\mu - u)d\theta \tag{7}$$

где E – единичная матрица.

Доказательство. Пусть K – непустое множество банахова пространства X. Напомним (см. [8, 9]), что касательным конусом Кларка $\tilde{T}K(x)$ ко множеству K в точке x называется множество точек v, таких, что для любой последовательности действительных чисел $\{t_i\}$, $t_i > 0$, $t_i \to 0$ $(i \to \infty)$ и для любой последовательности $\{x_i\}$, $x_i \in X$, $x_i \to x$ $(i \to \infty)$ существует последовательность $\{v_i\}$, $v_i \in X$, $v_i \to v$ $(i \to \infty)$, такая, что

$$x_i + t_i v_i \in K$$

Для исследования выпуклости множества достижимости для билинейной системы (2) воспользуемся следующим критерием выпуклости [10]: замкнутое множество K с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда

$$K \subset TK(x), \quad \forall x \in K$$

где $TK(x) = x + \tilde{T}K(x)$; при этом $K = \bigcap_{x \in K} TK(x)$.

Поскольку, по предположению, отображение

$$u(\cdot) \mapsto F(u)$$

является отображением постоянного ранга, касательный конус Кларка ко множеству $F(\mathfrak{D})$ в точке $F(u)$ может быть представлен [10] в виде

$$\tilde{T}F(\mathfrak{D})(F(u)) = \frac{\partial F(u)}{\partial u}\tilde{T}\mathfrak{D}(u)$$

Заметим, что поскольку $\mathfrak{D}$ – выпуклое множество, то

$$\mathfrak{D} \subset T\mathfrak{D}(u), \quad \forall u(\cdot) \in \mathfrak{D}$$

В частности, поскольку

$$v \in \mathfrak{D} \subset T\mathfrak{D}(u) = u + \tilde{T}\mathfrak{D}(u)$$

то

$$v - u \in \tilde{T}\mathfrak{D}(u), \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{D}$$

а значит, и

$$\lambda(v - u) \in \tilde{T}\mathfrak{D}(u), \quad \forall \lambda \geq 0$$

Введем обозначения

$$\Theta_u^\theta = e^{-\theta \operatorname{ad} A}\mathfrak{B}u, \quad \Omega_u^T = \Omega_0^T(E_u^\theta)$$

Тогда, воспользовавшись равенствами (4) и (5), имеем

$$\Omega_0^T(A + \mathfrak{B}u) = e^{TA}\Omega_0^T(\operatorname{Ad} e^{\theta A}\mathfrak{B}u) = e^{TA}\Omega_0^T(e^{-\theta \operatorname{ad} A}\mathfrak{B}u) = e^{TA}\Omega_u^T$$

и, согласно соотношениям (6) и (7),

$$F(v) = F(u) + \Omega_0^T(A + \mathfrak{B}v)x_0 - \Omega_0^T(A + \mathfrak{B}u)x_0 = F(u) + e^{TA}(\Omega_v^T - \Omega_u^T)x_0 =$$

$$= F(u) + e^{TA}\Omega_u^T(\Omega_u^{T-1}\Omega_v^T - E)x_0 = F(u) + e^{TA}\Omega_u^T(\Omega_0^T(\operatorname{Ad}\Omega_u^\theta\Theta_{v-u}^\theta) - E)x_0 =$$

$$= F(u) + e^{TA}\Omega_u^T\lambda\int_0^T \operatorname{Ad}\Omega_u^\theta\Theta_{\mu-u}^\theta d\theta x_0 = F(u) + \frac{\partial F(u)}{\partial u}\lambda(\mu - u) \in$$

$$\in F(u) + \frac{\partial F(u)}{\partial u}\tilde{T}\mathfrak{D}(u) = F(u) + \tilde{T}F(\mathfrak{D})(u) = TF(\mathfrak{D})(u)$$

т.е.

$$F(\mathfrak{D}) \subset TF(\mathfrak{D})(u)$$

Для завершения доказательства осталось убедиться в том, что множество $F(\mathfrak{D})$ имеет непустую внутренность.

Покажем, что существует аффинная плоскость, содержащая $F(\mathfrak{D})$, относительно которой множество $F(\mathfrak{D})$ имеет непустую внутренность.

Рассмотрим плоскость

$$\Pi'(u) = F(u) + \Pi$$

Как показано выше, $F(\mathfrak{D}) \subset F(u) + \Pi$, так что $F(v) + \Pi = F(u) + \Pi$ для любых $u(\cdot)$, $v(\cdot) \in \mathfrak{D}$, т. е. плоскость

$$\Pi'(u) \equiv \Pi'$$

корректно определена.

Пусть $\dim \Pi' = k$. Покажем, что $F(\operatorname{int}\mathfrak{D})$ – открытое подмножество плоскости Π'. Выберем функции

$$v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_k(\cdot) \in \mathfrak{D}$$

таким образом, чтобы векторы

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u}v_1, \frac{\partial F(u)}{\partial u}v_2, \ldots, \frac{\partial F(u)}{\partial u}v_k \tag{8}$$

порождали плоскость Π'.

Рассмотрим отображение (всюду далее $i, j = 1, \ldots, k$)

$$\mathscr{E} : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mapsto F(u + \Sigma), \quad \Sigma = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i v_i, \quad \varepsilon_i \in \mathbb{R}$$

Если $u(\cdot) \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$, то при достаточно малых $|\varepsilon_i|$ образ этого отображения лежит в $F(\operatorname{int}\mathfrak{D})$, так как $\operatorname{int}\mathfrak{D}$ – открытое множество.

Далее

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} F(u+\Sigma) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j}\Omega_0^T(A+\mathfrak{B}(u+\Sigma))x_0 =$$

$$= \Omega_0^T(A+\mathfrak{B}(u+\Sigma))\int_0^T \mathrm{Ad}\Omega_0^\theta(A+\mathfrak{B}(u+\Sigma))\mathfrak{B}v_j(\theta)d\theta x_0$$

откуда

$$\left.\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varepsilon_j}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_k=0} = \Omega_0^T(A+\mathfrak{B}u)\int_0^T \mathrm{Ad}\Omega_0^\theta(A+\mathfrak{B}u)\mathfrak{B}v_j(\theta)d\theta x_0 = \frac{\partial F(u)}{\partial u}v_j \tag{9}$$

В силу линейной независимости векторов (8) линейно независимы и векторы (9). Следовательно, ранг отображения $\mathscr{E}$ в нуле равен k. Таким образом, по теореме об обратной функции $F(u)$ – внутренняя точка множества $F(\mathrm{int}\mathfrak{D})$.

Пример. Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = (u_1+u_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u_1x_3 \tag{10}$$

с управлениями

$$|u_i| \le 1, \quad i = 1, 2$$

При этом

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \mathrm{diag}\{1,0,1\}, \quad B_2 = \mathrm{diag}\{1,0,0\}$$

откуда

$$\begin{aligned} &[B_1, B_2] = 0, \quad \mathrm{ad}AB_1 = A, \quad [B_1, \mathrm{ad}AB_1] = -\mathrm{ad}AB_1 \\ &\mathrm{ad}AB_2 = 0, \quad \mathrm{ad}^2AB_1 = 0, \quad [B_2, \mathrm{ad}AB_1] = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, в силу условий (3) система (10) является системой постоянного ранга.

Введем обозначения

$$\Delta_i = v_i - u_i, \quad \Phi_i^\theta = \exp\left(\int_0^\theta u_i(\xi)d\xi\right), \quad \Psi_i^\theta = \exp\left(\int_0^\theta v_i(\xi)d\xi\right), \quad i = 1, 2$$

Используя равенства

$$e^{-\theta\mathrm{ad}A}B_1 = B_1 - \theta[A, B_1] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad e^{-\theta\mathrm{ad}A}B_2 = B_2$$

получим

$$\Theta_{v-u}^\theta = e^{-\theta\mathrm{ad}A}B_1\Delta_1 + e^{-\theta\mathrm{ad}A}B_2\Delta_2 = \begin{Vmatrix} \Delta_1+\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta\Delta_1 \\ 0 & 0 & \Delta_2 \end{Vmatrix}$$

Согласно соотношениям (11), имеем

$$\Omega_u^\theta = \begin{Vmatrix} \Phi_1^\theta\Phi_2^\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\int\limits_0^\theta \xi u_1(\xi)\Phi_1^\xi d\xi \\ 0 & 0 & \Phi_1^\theta \end{Vmatrix}$$

откуда

$$\Omega_0^T(\mathrm{Ad}\Omega_u^\theta\Theta_{v-u}^\theta) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\Psi_1^T\Psi_2^T}{\Phi_1^T\Phi_2^T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\int\limits_0^T\left(\theta\Delta_1\Phi_1^\theta + \Delta_2\int\limits_0^\theta \xi u_1(\xi)\Phi_1^\xi d\xi\right)\dfrac{\Psi_2^\theta}{\Phi_2^\theta}d\theta \\ 0 & 0 & \dfrac{\Psi_2^T}{\Phi_2^T} \end{Vmatrix}$$

Таким образом, соотношение (7) принимает вид совокупности равенств

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T(\mu_1 - u_1)d\theta = \frac{1}{\lambda}\frac{\Psi_2^T}{\Phi_2^T}\left(\frac{\Psi_1^T}{\Phi_1^T} - 1\right) \\ &\int\limits_0^T\theta(\mu_1 - u_1)\Phi_1^\theta d\theta = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T\theta\frac{\Psi_2^\theta}{\Phi_2^\theta}\Delta_1\Phi_1^\theta d\theta \\ &\int\limits_0^T(\mu_2 - u_2)d\theta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\Psi_2^T}{\Phi_2^T} - 1\right) \\ &\int\limits_0^T(\mu_2 - u_2)\int\limits_0^\theta\xi u_1(\xi)\Phi_1^\xi d\xi d\theta = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T\frac{\Psi_2^\theta}{\Phi_2^\theta}\Delta_2\int\limits_0^\theta\xi u_1(\xi)\Phi_1^\xi d\xi d\theta \end{aligned} \qquad (12)$$

(если $u = v$, то соотношение (7) выполняется тривиальным образом при $\lambda = 0$ и произвольной функции $\mu(\cdot) \in \mathcal{D}$).

Нетрудно видеть, что, если $u_1 \equiv 1$, то $\Delta_1 \le 0$ и $\Psi_1^T \le \Phi_1^T$, а если $u_1 \equiv -1$, то $\Delta_1 \ge 0$ и $\Psi_1^T \ge \Phi_1^T$. Если же $u_2 \equiv 1$, то $\Delta_2 \le 0$ и $\Psi_2^T \le \Phi_2^T$, а если $u_2 \equiv -1$, то $\Delta_2 \ge 0$ и $\Psi_2^T \ge \Phi_2^T$. Поэтому в силу произвольности выбора $\lambda \ge 0$, при любых $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, $|u|$, $|v| \le 1$ найдутся функции $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$, $|\mu_1|$, $|\mu_2| \le 1$, удовлетворяющие соотношениям (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. N.Y., etc.: Wiley, 1967 = *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Мир, 1972. 574 с.
2. *Krener A.J., Schättler H.* The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Contr. Optimiz. 1989. V. 27. № 1. P. 120–147.

3. *Bressan A.* Directional convexity and finite optimality conditions // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 125. № 1. P. 234–246.
4. *Brockett R.W.* On the reachable set for bilinear system // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. 1975. V. 111. P. 54–63.
5. *Андреев Ю.Н.* Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Автоматика и телемеханика. 1982. № 10. С. 5–46.
6. *Вахрамеев С.А.* Теоремы релейности и смежные вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. 1998. Т. 220. С. 49–112.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
8. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis. N.Y., etc.: Wiley, 1983 = *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. *Aubin J.-P., Ekeland I.* Applied Nonlinear Analysis. N.Y., etc.: Wiley, 1984 = *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.
10. *Вахрамеев С.А.* Теорема существования для нелинейной задачи быстродействия // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 565–567.

Москва
e-mail: mtop73@caravan.ru

Поступила в редакцию
14.XI.2002