УДК 531.36:62–50

© 2003 г. В. И. Коробов, В. А. Скорик

СИНТЕЗ ИНЕРЦИОННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача допустимого синтеза инерционных управлений для нестационарных систем с многомерным управлением с геометрическими ограничениями на управление и его производные. Для линейной системы задача решена аналитически: дано конструктивное построение семейства управлений, каждое из которых решает поставленную задачу, вычисляется время движения из начальной точки в нуль и находится соответствующая траектория. Для нелинейной системы задача решена по первому приближению в случае ограничений на управление и его производную.

1. Введение. Рассматривается задача допустимого синтеза ограниченных инерционных управлений для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{1.1}$$

т.е. задача построения управления $u = u(t, x)$, переводящего произвольную начальную точку $x(t_0) = x_0$ из некоторой окрестности $Q(t_0)$ начала координат в точку $x_1 = 0$ по траектории $x(t) \in Q(t)$ системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)) \tag{1.2}$$

за конечное время $T(t_0, x_0) \le t_1 - t_0$ и удовлетворяющего вместе с производными $u^{(1)}(t, x), \ldots, u^{(l)}(t, x)$ в силу системы (1.2) ограничениям

$$\|u^{(k)}(t, x)\| \le d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \quad x \in Q(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T) \tag{1.3}$$

где $d_0, \ldots, d_l$ – заданные числа.

Управления с такими ограничениями рассматривались ранее [1] и были названы инерционными. Рассматривались [2, 3] множества управляемости для линейных систем с инерционными управлениями.

К задаче синтеза допустимого управления приходим естественным образом от задачи оптимального синтеза управления [1, 4–6], отказываясь от оптимизации некоторого критерия качества.

Решение задачи проводится в прежнем фазовом пространстве, так как при расширении фазового пространства при введении нового управления $v = \dot{u}$ такой подход дает решение в виде $v = v(t, x, u)$, а необходимо получить управление в виде $u = u(t, x)$.

В развитие результатов предыдущих работ [7, 8], рассматривается задача допустимого синтеза управлений с ограничениями на управление и его производные (в отличие от [7]) в случае нестационарной системы и многомерного управления (в отличие от [8]). Используется метод функции управляемости [9, 10], который основан на построении функции управляемости $\Theta(t, x)(\Theta(t, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\Theta(t, 0) = 0$

для $t \in [t_0, t_1]$) и управления $u(t, x) = \tilde{u}(t, x, \Theta(t, x))$, таких, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\begin{gathered}\Lambda(\Theta(t, x); u(t, x)) \le -\beta\Theta^{1-1/\alpha}(t, x) \\ \Lambda(\Theta(t, x); u(t, x)) \doteq \frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial x_i}f_i(t, x, u(t, x))\end{gathered} \tag{1.4}$$

для некоторых $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Неравенство (1.4) означает, что управление выбирается таким образом, что движение происходит по направлению убывания функции $\Theta(t, x)$. Выполнение этого неравенства обеспечивает попадание траектории в начало координат за конечное время.

Представляет интерес случай, когда при построении синтезирующих управлений удается найти время движения $T(t_0, x_0)$ из произвольной точки $x(t_0) = x_0$ в точку $x_1 = 0$. Случай, когда функция управляемости является временем движения, реализуется, например, когда вместо условия (1.4) используется равенство $\Lambda(\Theta(t, x); u(t, x)) = -1$. Если, кроме того, управление $u(t, x)$ таково, что

$$\min_{u \in \Omega}\Lambda(\Theta(t, x); u) = \Lambda(\Theta(t, x); u(t, x)) = -1 \tag{1.5}$$

то, обозначив $\omega(t, x) = -\Theta(t, x)$, получаем основное уравнение метода динамического программирования – уравнение Беллмана [4, 5] $\max_{u \in \Omega}\Lambda(\omega(t, x); u) = 1$ для задачи быстродействия.

Выбор управления с помощью уравнения (1.5) можно трактовать с позиции минимизации функции $\Theta(t, x)$ следующим образом: управление $u(t, x)$ выбирается таким образом, чтобы угол между направлением быстрейшего убывания этой функции и направлением движения был минимальным. В методе функции управляемости указанный угол не обязательно минимальный.

В случае, когда неравенство (1.4) имеет вид

$$\Lambda(\Theta(t, x); u(t, x)) \le -\beta\Theta(t, x)$$

$\Theta(t, x)$ является функцией Ляпунова. Это неравенство означает, что при малых значениях Θ угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(t, x)$ не меньше, чем в методе функции управляемости, так как $\Theta(t, x) \le \Theta^{1-1/\alpha}(t, x)$ при $\alpha \ge 1$. Таким образом, угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(t, x)$ в методе функции управляемости не меньше, чем угол в методе динамического программирования, и не больше, чем в методе функции Ляпунова.

Представляет интерес построение по аналогии с векторными функциями Ляпунова, введенными Беллманом [11] и Матросовым [12], векторных функций управляемости. Для автономных линейных систем построение таких функций приводилось ранее [9].

2. Решение задачи синтеза инерционных управлений для линейной полностью управляемой системы. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^r; \quad A(t) \in C^{2n-2+l}, \quad B(t) \in C^{2n-1+l} \tag{2.1}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, подразумевается, что $t \in [t_0, t_1]$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{rank}B(t) = r$. Обозначим $\Delta = A(t) - Ed/dt$ (E – единичная матрица) и предположим, что

$$\operatorname{rank}(B(t), \Delta B(t), \dots, \Delta^{n-1}B(t)) = n \tag{2.2}$$

и этот ранг реализуется на векторах-столбцах матрицы

$$K(t) = (b_1(t), \ldots, \Delta^{n_1-1}b_1(t), \ldots, b_r(t), \ldots, \Delta^{n_r-1}b_r(t)); \quad n_1+\ldots+n_r = n \tag{2.3}$$

где $b_i(t)$ – i-й столбец матрицы $B(t)$. Положим

$$n_0 = \max_{1\le i\le r} n_i, \quad s_0 = 0, \quad s_k = n_1+\ldots+n_k, \quad k = 1, \ldots, r$$

Пусть имеют место разложения

$$\Delta^{n_i}b_i(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n_j-1}\gamma_{jk}^i(t)\Delta^k b_j(t), \quad i = 1, \ldots, r \tag{2.4}$$

где $\gamma_{jk}^i(t)\in C^n : \gamma_{jk}^i(t) = 0$ для $j<i$, $k>\min\{n_i, n_j-1\}$ или для $j\ge i$, $k>\min\{n_i-1, n_j-1\}$.

Следуя предложенному ранее подходу [7], выберем вектор-функции $c_1(t), \ldots, c_r(t)\in C^n$ из условий

$$K^*(t)c_k(t) = e_{s_k}; \quad e_{s_k} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^*, \quad k = 1, \ldots, r$$

(звездочка в верхнем индексе означает транспонирование).

Рассмотрим невырожденную матрицу

$$L(t) = (c_1(t), \ldots, \Delta_*^{n_1-1}c_1(t), \ldots, c_r(t), \ldots, \Delta_*^{n_r-1}c_r(t))^*; \quad \Delta_* = A^*(t)+Ed/dt$$

Введем матрицы

$$D(\Theta) = \operatorname{diag}(D_1(\Theta), \ldots, D_r(\Theta)), \quad D_i(\Theta) = \operatorname{diag}(\Theta^{-(n_i-k)/\alpha-1/(2\alpha)})_{k=1}^{n_i}$$

$$H^\alpha = \operatorname{diag}(H_1^\alpha, \ldots, H_r^\alpha), \quad H_i^\alpha = \operatorname{diag}(-(n_i-k)/\alpha-1/(2\alpha))_{k=1}^{n_i}, \quad i = 1, \ldots, r$$

Рассмотрим $\{F_\alpha^{-1}(\Theta\}_{\alpha\ge 1}$ – семейство положительно определенных матриц вида

$$F_\alpha^{-1}(\Theta) = \int_0^{\alpha\Theta^{1/\alpha}}\left(1-\frac{t}{\alpha\Theta^{1/\alpha}}\right)^\alpha \exp(-A_0t)B_0B_0^*\exp(-A_0^*)dt \tag{2.5}$$

где $(n\times n)$-матрица A_0 имеет вид $A_0 = \operatorname{diag}(A_{01}, \ldots, A_{0r})$, A_{0i} – $(n_i\times n_i)$-матрица, элементы первой наддиагонали которой – единицы, а все остальные элементы – нули, B_0 – $(n\times r)$-матрица, в которой элементы $(B_0)_{s_i i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$, а все остальные равны нулю. Матрица $F_\alpha(\Theta)$ представима в виде [8]

$$F_\alpha(\Theta) = D(\Theta)F_\alpha D(\Theta) \tag{2.6}$$

Матрица $F_\alpha\equiv F_\alpha(1)$ удовлетворяет равенству

$$F_\alpha A_1+A_1^*F_\alpha = -F_\alpha+F_\alpha H^\alpha+H^\alpha F_\alpha\equiv -F^\alpha; \quad A_1 = A_0-1/2B_0B_0^*F_\alpha \tag{2.7}$$

Аналитическое обращение матриц вида (2.5) приведено ранее [13].

Пусть $a_0>0$ – пока произвольное число. Для $\alpha\ge 1$ определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(t, x)$ при $x\ne 0$ из уравнения

$$2a_0\Theta = (L^*(t)F_\alpha(\Theta)L(t)x, x) \tag{2.8}$$

и положим

$$\Theta_\alpha(t, 0) = 0 \tag{2.9}$$

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Для каждого $\alpha \geq 1$ уравнение (2.8) и равенство (2.9) определяют неотрицательную функцию $\Theta = \Theta_\alpha(t, x)$, непрерывную для всех x и непрерывно дифференцируемую при $x \neq 0$.

Пусть $\bar{\Theta} > 0$ – некоторое число. Положим

$$R_\alpha = \delta\sqrt{2a_0\bar{\Theta}/(L^2_{\max}\|F_\alpha(\bar{\Theta})\|)}, \quad \delta \in (0, 1), \quad L_{\max} = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|L(t)\|$$

Утверждение 2. Для каждого $\alpha \geq 1$ существует положительное число $c_\alpha \leq ((t_1 - t_0)/\alpha)^\alpha$, такое, что множество

$$Q_\alpha(t) = \{x : \Theta_\alpha(t, x) \leq c_\alpha\} \tag{2.10}$$

является ограниченным и $Q_\alpha(t) \subset Q^1_\alpha \doteq \{x : \|x\| < R_\alpha\}$.

Доказательство. Из соотношения

$$\{x : (L^*(t)F_\alpha(\bar{\Theta})L(t)x, x) < 2a_0\bar{\Theta}\} \supset \{x : \|x\|^2 < 2a_0\bar{\Theta}/(L^2_{\max}\|F_\alpha(\bar{\Theta})\|)\}$$

вытекает

$$2a_0\bar{\Theta} > (L^*(t)F_\alpha(\bar{\Theta})L(t)x, x), \quad x \in Q^1_\alpha\backslash\{0\}$$

Поскольку $(L^*(t)F_\alpha(\Theta)L(t)x, x)$ – убывающая по Θ функция, то на основании неравенства

$$(L^*(t)F_\alpha(\Theta)L(t)x, x) \geq \|x\|^2/(L_0^2\|F_\alpha^{-1}(\Theta)\|); \quad L_0 = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|L^{-1}(t)\|$$

имеем

$$Q^1_\alpha \supset \{x: \Theta_\alpha(t, x) \leq R^2_\alpha/(2a_0L_0^2\|F_\alpha^{-1}(\bar{\Theta})\|)\}$$

Воспользовавшись выражением для R_α, отсюда заключаем, что для

$$c_\alpha = \min\left\{\frac{\sigma\delta^2\bar{\Theta}}{L^2_{\max}L_0^2\|F_\alpha(\bar{\Theta})\|\|F_\alpha^{-1}(\bar{\Theta})\|}, \left(\frac{t_1 - t_0}{\alpha}\right)^\alpha\right\}, \quad \sigma \in (0, 1) \tag{2.11}$$

справедливо включение $Q_\alpha(t) \subset Q^1_\alpha$.

Зададим управление $u^\alpha(t, x)$ при $x \in Q^1_\alpha(t)\backslash\{0\}$ формулой

$$u^\alpha(t, x) = -M^{-1}(t)B_0^*(1/2F_\alpha(\Theta_\alpha(t, x))L(t) + \dot{L}(t) + L(t)A(t))x \tag{2.12}$$

где $M(t)$ – верхнетреугольная $(r \times r)$ – матрица с элементами

$$m_{ii}(t) = 1, \quad m_{ij}(t) = (\Delta_*^{n_i - 1}c_i(t))^*b_j(t) \quad \text{при} \quad j > i, \quad i = 1, \ldots, r$$

Утверждение 3. Производная функции $\Theta_\alpha(t, x)$ в силу системы (2.1) с управлением $u^\alpha(t, x)$ вида (2.12) удовлетворяет равенству

$$\dot{\Theta}_\alpha(t, x) = -\Theta_\alpha^{1 - 1/\alpha}(t, x) \tag{2.13}$$

Доказательство. Далее будем считать, что $\Theta_\alpha = \Theta_\alpha(t, x)$. Обозначим

$$y(\Theta, t, x) = D(\Theta)L(t)x, \quad P_0 = -1/2B_0^*F_\alpha, \quad \tilde{A}(t) = (\dot{L}(t) + L(t)A(t))L^{-1}(t)$$

Тогда равенство (2.8) и управление (2.12) в силу (2.6) принимают вид

$$2a_0\Theta_\alpha = (F_\alpha y(\Theta_\alpha, t, x), y(\Theta_\alpha, t, x)) \tag{2.14}$$

$$u^\alpha(t, x) = M^{-1}(t)(\Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}P_0 y(\Theta_\alpha, t, x) - B_0^*\tilde{A}(t)L(t)x) \tag{2.15}$$

Вычислим производную $y(\Theta_\alpha, t, x)$ в силу системы (2.1) с управлением вида (2.15). В силу выбора $c_1(t), \ldots, c_r(t)$ имеем равенства [7]

$$L(t)B(t) = B_0M(t), \quad (E - B_0B_0^*)\tilde{A}(t) = A_0 \tag{2.16}$$

Тогда на основании равенства (2.1) с управлением вида (2.15), используя соотношения (2.16), получаем

$$\frac{d}{dt}[L(t)x] = A_0L(t)x + \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}B_0P_0y(\Theta_\alpha, t, x) \tag{2.17}$$

Из соотношения $y(\Theta_\alpha, t, x) = D(\Theta_\alpha)L(t)x$ при помощи равенств (2.17) и

$$D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta) + D(\Theta)B_0P_0\Theta^{-1/(2\alpha)} = A_1\Theta^{-1/\alpha} \tag{2.18}$$

имеем

$$\dot{y}(\Theta_\alpha, t, x) = (\dot{\Theta}_\alpha\Theta_\alpha^{-1}H^\alpha + A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha})y(\Theta_\alpha, t, x) \tag{2.19}$$

Тогда из равенства (2.14) с использованием равенств (2.19), (2.7) получаем равенство (2.13).

Из равенства (2.13) следует, что время движения $T_\alpha(t_0, x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in Q_\alpha(t_0)$ в точку $x_1 = 0$ задается равенством

$$T_\alpha(t_0, x_0) = \alpha\Theta_\alpha^{1/\alpha}(t_0, x_0) \tag{2.20}$$

Далее при доказательстве ограниченности управления и его производных понадобится следующий результат. Положим

$$m_k = \min\{n_0, k\}, \quad \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le k < n_0 \\ 0 & \text{при} \quad n_0 \le k \le l \end{cases}$$

Обозначим

$$P_k = P_{k-1}((r_k - 1/\alpha)E - H^\alpha + A_1), \quad r_k = k/\alpha + 1/(2\alpha) \tag{2.21}$$

$$\xi_k(t, \Theta) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left[[M^{-1}(t)]^{(k-i)}\Theta^{(k-i)/\alpha}P_i - \left(\sum_{j=0}^{k-i} C_{k-i}^j [M^{-1}(t)]^{(k-i-j)} B_0^*\tilde{A}^{(j)}(t) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} \Theta^{(k-j)/\alpha}R_{ij} + \delta_i A_0^i D^{-1}(\Theta)\Theta^{r_k} \right) \right] \tag{2.22}$$

$$R_{ij} = A_0^{m_i - 1 - j}B_0P_j$$

где C_k^i – биномиальные числа. Здесь и всюду далее $k = 0, 1, \ldots, l$.

Производная k-го порядка $(u^\alpha(t, x))^{(k)}$ управления $u^\alpha(t, x))$ в силу замкнутой системы (2.1) задается формулой

$$(u^\alpha(t,x))^{(k)} = \Theta_\alpha^{-r_k}\xi_k(t,\Theta_\alpha)y(\Theta_\alpha, t, x) \tag{2.23}$$

Покажем ограниченность управления и его производных. Обозначим

$$\tilde{a}_k = \max_{t_0 \le t \le t_1}\left\|B_0^*[\tilde{A}(t)]^{(k)}\right\|, \quad M_k = \max_{t_0 \le t \le t_1}\left\|[M^{-1}(t)]^{(k)}\right\| \tag{2.24}$$

$$\eta_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\left[c_\alpha^{(k-i)/\alpha}M_{k-i}\|P_i\| + \left(\sum_{j=0}^{k-i} C_{k-i}^j M_{k-i-j}\tilde{a}_j\right)\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_\alpha^{(k-j)/\alpha}\|R_{ij}\| + \delta_i c_\alpha^{\gamma_i}\right)\right]$$

$$\gamma_i = \begin{cases}(k+1)/\alpha, & \text{при} \quad c_\alpha \le 1\\ (n_0+k-i)/\alpha, & \text{при} \quad c_\alpha > 1\end{cases}$$

Здесь и всюду далее постоянная c_α определена выражением (2.11).

Утверждение 4. Для каждого $\alpha \ge 2l + 1$ управление $u^\alpha(t, x)$ и его производные $(u^\alpha(t, x))^{(1)}, \ldots, (u^\alpha(t, x))^{(l)}$ в силу замкнутой системы (2.1) удовлетворяют заданным ограничениям вида

$$\left\|(u^\alpha(t,x))^{(k)}\right\| \le d_k, \quad x \in Q_\alpha(t)\backslash\{0\}, \quad t \in [t_0, t_0 + T_\alpha) \tag{2.25}$$

Доказательство. Из выражения (2.22) вытекают неравенства

$$\|\xi_k(t, \Theta_\alpha(t,x))\| \le \eta_k, \quad x \in Q_\alpha(t)\backslash\{0\}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Тогда из вида управления (2.15) и его производных (2.23) получаем, что при $t \in [t_0, t_0 + T_\alpha) \subset [t_0, t_1]$ справедливы неравенства

$$\left\|(u^\alpha(t,x))^{(k)}\right\| \le \eta_k\|y(\Theta_\alpha, t, x)\|\Theta_\alpha^{-r_k}, \quad x \in Q_\alpha(t)\backslash\{0\} \tag{2.26}$$

Из равенства (2.14) имеем

$$\|y(\Theta_\alpha, t, x)\|^2 \le 2a_0\Theta_\alpha\left\|F_\alpha^{-1}\right\|, \quad x \in Q_\alpha^1$$

Тогда из неравенств (2.26) получаем

$$\left\|(u^\alpha(t,x))^{(k)}\right\| \le \eta_k\sqrt{2a_0\left\|F_\alpha^{-1}\right\|}c_\alpha^{1/2-r_k}, \quad x \in Q_\alpha(t)\backslash\{0\}, \quad t \in [t_0, t_0 + T_\alpha) \tag{2.27}$$

Выбирая a_0 из условия

$$0 < a_0 \le \min_{0 \le k \le l} d_k^2/(2\left\|F_\alpha^{-1}\right\|\eta_k^2 c_\alpha^{1-2r_k}) \tag{2.28}$$

из неравенств (2.27) получаем, что управление и его производные удовлетворяют ограничениям (2.25).

Теорема 1. Рассмотрим систему (2.1), где $l \ge 1$ – натуральное число, $\operatorname{rank}B(t) = r$, выполнено условие (2.2) и имеют место разложения (2.4). Пусть $\alpha \ge 2l + 1$, число a_0 выбрано из условия (2.28), функция управляемости $\Theta_\alpha(t, x)$ определена уравнением (2.8) и условием (2.9); постоянная c_α определена выражением (2.11), а множество $Q_\alpha(t)$ – выражением (2.10).

Тогда управление $u^\alpha(t, x)$ вида (2.12) решает задачу синтеза инерционных управлений для системы (2.1) для $x \in Q_\alpha(t)\backslash\{0\}$, причем время движения $T_\alpha(t_0, x_0)$ из произвольной точки $x(t_0) = x_0 \in Q_\alpha(t_0)$ в точку $x_1 = 0$ определяется равенством (2.20).

Доказательство. Для каждого $\alpha \geq 1$ построена функция управляемости $\Theta_\alpha(t, x)$, удовлетворяющая условиям 1, 2 (утверждение 1), для которой выполнены условия 3, 5 (утверждение 2) теоремы 1 из [10]. Выполнение условия 4 вытекает из следующего. Управление $u^\alpha(t, x)$ вида (2.12) удовлетворяет условию Липшица в каждой области $\{(t, x)\colon t_0 \leq t \leq t_1, 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ с константой $L_u(\rho_1, \rho_2) \to +\infty$ при $\rho_1 \to 0$ и при $\alpha \geq 2l + 1$ вместе с производными $(u^\alpha(t, x))^{(1)}, \ldots, (u^\alpha(t, x))^{(l)}$ вида (2.23) удовлетворяет заданным ограничениям (2.25) (утверждение 4). Производная функции $\Theta_\alpha(t, x)$ в силу замкнутой системы (2.1) с управлением (2.12) удовлетворяет равенству (2.13) (утверждение 3).

Тогда по теореме 1 из [10] получаем утверждение данной теоремы.

Найдем траекторию $x(t)$ системы (2.1), отвечающую управлению $u^\alpha(t, x)$, которая начинается в произвольной точке $x_0 \in Q_\alpha(t_0)$ и оканчивается в нуле. Выберем a_0 из условия (2.28) и найдем положительный корень Θ_α^0 уравнения (2.8) при $x = x_0$, $t = t_0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x - B(t)M^{-1}(t)B_0^*(1/2F_\alpha(\theta_\alpha(t))L(t) + \dot{L}(t) + L(t)A(t))x \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\dot{\theta}_\alpha(t) = -\theta_\alpha^{1-1/\alpha}(t), \quad \theta_\alpha(t_0) = \Theta_\alpha^0 \tag{2.30}$$

Решив задачу (2.30), имеем

$$\theta_\alpha(t) = ((t_0 + T_\alpha - t)/\alpha)^\alpha, \quad T_\alpha = \alpha(\Theta_\alpha^0)^{1/\alpha} \tag{2.31}$$

Тогда $x(t)$ является решением задачи Коши, соответствующей задаче (2.29) после подстановки в правую часть уравнения выражения (2.31).

Положим $z = L(t)x$. Воспользовавшись равенствами (2.16), получаем

$$\dot{z} = (A_0 - {}^1\!/_2\, B_0 B_0^* F_\alpha(((t_0 + T_\alpha - t)/\alpha)^\alpha))z, \quad z(t_0) = L(t_0)x_0$$

или в покомпонентном виде (всюду далее $i = 1, \ldots, r$)

$$\begin{aligned} &\dot{z}_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1}, \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \quad \dot{z}_{s_i} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha^{n_i-k+1} f^\alpha_{s_i s_{i-1}+k} z_{s_{i-1}+k}}{(t_0 + T_\alpha - t)^{n_i-k+1}} \\ &z_{s_{i-1}+j}(t_0) = (\Delta_*^{j-1} c_i(t_0))^* x_0, \quad j = 1, \ldots, n_i \end{aligned}$$

где f_{ij}^α – элементы матрицы F_α. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &2(t_0 + T_\alpha - t)^{n_i} z^{(n_i)}_{s_{i-1}+1} + \sum_{k=1}^{n_i} \alpha^k f^\alpha_{s_i s_i - k+1}(t_0 + T_\alpha - t)^{n_i-k} z^{(n_i-k)}_{s_{i-1}+1} = 0 \\ &z^{(j)}_{s_{i-1}+1}(t_0) = z_{s_{i-1}+j+1}(t_0), \quad j = 0, \ldots, n_i - 1 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Обозначим

$$\Delta_1 = -d/d\tau, \quad \Delta_k = (-d/d\tau + k - 1)\ldots(-d/d\tau), \quad k = 2, \ldots, n_0$$

Заменой времени $t = t_0 + T - e^{\tau}$ из соотношений (2.32) имеем задачи Коши относительно функций $y_i(\tau) = z_{s_{i-1}+1}(t_0 + T_\alpha - e^{\tau})$

$$2\Delta_{n_i} y_i(\tau) + \sum_{k=1}^{n_i-1} \alpha^k f^{\alpha}_{s_i s_i - k + 1} \Delta_k y_i(\tau) + \alpha^{n_i} f^{\alpha}_{s_i s_{i-1}+1} y_i(\tau) = 0$$

$$y_i(\tau_0) = c_i^*(t_0)x_0, \ldots, (\Delta_{n_i-1} y_i)(\tau_0) = T_\alpha^{n_i-1}(\Delta_*^{n_i-1} c_i(t_0))^* x_0; \quad \tau_0 = \ln(t_0 + T_\alpha)$$

Так как

$$z_{s_{i-1}+1}(t) = y_i(\ln(t_0 + T_\alpha - t))$$

то остальные функции $z_{s_{i-1}+2}(t), \ldots, z_{s_i}(t)$ находятся путем дифференцирования последнего равенства, т.е.

$$z_{s_{i-1}+j}(t) = z^{(j-1)}_{s_{i-1}+1}(t), \quad j = 2, \ldots, n_i$$

Траектория $x(t)$ определяется равенством $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$ и, как видно из изложенного выше, для ее нахождения требуется лишь один раз решить уравнение (2.8).

Пример. Рассмотрим задачу позиционного синтеза инерционных управлений для модельной двумерной системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{1+t}x_1 + \frac{1}{(1+t)^2}x_2 + \frac{1}{1+t}u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{2}{1+t}x_2 + u, \quad t \in [0, 3] \end{aligned} \tag{2.33}$$

с ограничениями на управление и его производную вида (1.3), где $d_0 = 1$, $d_1 = 3$. Система (2.33) полностью управляема, поскольку условие (2.2) выполнено для $t \ge 0$. Рассмотрим случай $\alpha = 3$ и в обозначениях этот индекс указывать не будем. Выберем число a_0 из условия (2.28), положив его равным $6/(136 + 43\sqrt{10})$. Уравнение для определения функции $\Theta(t, x)$ при $x \ne 0$ согласно уравнению (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{12}{136 + 43\sqrt{10}}\Theta^2 - \frac{10}{27}\Theta^{2/3}(2(1+t)x_1 + x_2)^2 - \frac{10}{27}\Theta^{1/3}(2(1+t)x_1 + x_2) \times \\ &\times((1+t)^2 x_1 - (1+t)x_2) - \frac{25}{162}(1+t)^2((1+t)x_1 - x_2)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Из условия (2.11) получаем, что при $\bar{\Theta} \ge 8123956$ и близких к единице значениях δ, σ постоянная $c = 1$. Область $Q(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q(t) = \{&(x_1, x_2) : (1+t)^2(77 + 34t + 5t^2)x_1^2 - 2(1+t)(-13 + 16t + \\ &+ 5t^2)x_1x_2 + (5 - 2t + 5t^2)x_2^2 \le 1944/(680 + 215\sqrt{10})\}, \quad t \in [0, 3] \end{aligned}$$

Управление $u(t, x)$ из (2.12) задается формулой

$$\begin{aligned} u(t, x) = &-\left(\frac{5}{3\Theta^{2/3}(t, x)} + \frac{2}{(1+t)^2}\right)\frac{1+t}{6}((1+t)x_1 - x_2) - \\ &-\left(\frac{5}{3\Theta^{1/3}(t, x)} + \frac{1}{1+t}\right)\left(\frac{2(1+t)}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right) \end{aligned}$$

Это управление решает задачу синтеза инерционных управлений для системы (2.33) в области $Q(t)\backslash\{0\}$, $t \in [0, 3]$ и вместе с производной

$$\dot{u}(t,x) = \left(\frac{5}{3\Theta(t,x)} + \frac{5}{3(1+t)\Theta^{2/3}(t,x)} + \frac{4}{(1+t)^3}\right)\frac{1+t}{6}((1+t)x_1 - x_2) +$$

$$+\left(\frac{5}{9\Theta^{2/3}(t,x)} + \frac{5}{3(1+t)\Theta^{1/3}(t,x)} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)\left(\frac{2(1+t)}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)$$

удовлетворяет в ней ограничениям $|u(t,x)| \le 1$, $|\dot{u}(t,x)| \le 3$.

Пусть Θ^0 – положительный корень уравнения (2.34) при $t = 0$ и $x = x_0$. Введем обозначения

$$T = 3(\Theta^0)^{1/3}, \quad \gamma(t) = \sqrt{6}\ln(T-t), \quad \gamma_0 = \sqrt{6}\ln T$$

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = T^{-3}\left(\frac{1}{6}(x_1^0 - x_2^0)\left(\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}\gamma_0 + \frac{3}{\sqrt{6}}\begin{Bmatrix} \sin \\ -\cos \end{Bmatrix}\gamma_0\right) + \frac{1}{3\sqrt{6}}(2x_1^0 - x_2^0)T\begin{Bmatrix} \sin \\ -\cos \end{Bmatrix}\gamma_0\right)$$

Траектория системы (2.33), отвечающая управлению $u(t, x)$ и идущая из точки $x(0) = x_0 \in Q(0)$ в нуль, задается равенствами

$$x_1(t) = \frac{2}{(1+t)^2}z_1(t) + \frac{1}{1+t}z_2(t), \quad x_2(t) = -\frac{4}{1+t}z_1(t) + z_2(t)$$

$$z_1(t) = (T-t)^3(k_1\cos\gamma(t) + k_2\sin\gamma(t))$$

$$z_2(t) = (T-t)^2(-(3k_1 + \sqrt{6}k_2)\cos\gamma(t) + (\sqrt{6}k_1 - 3k_2)\sin\gamma(t))$$

Управление и его производная на этой траектории имеют вид

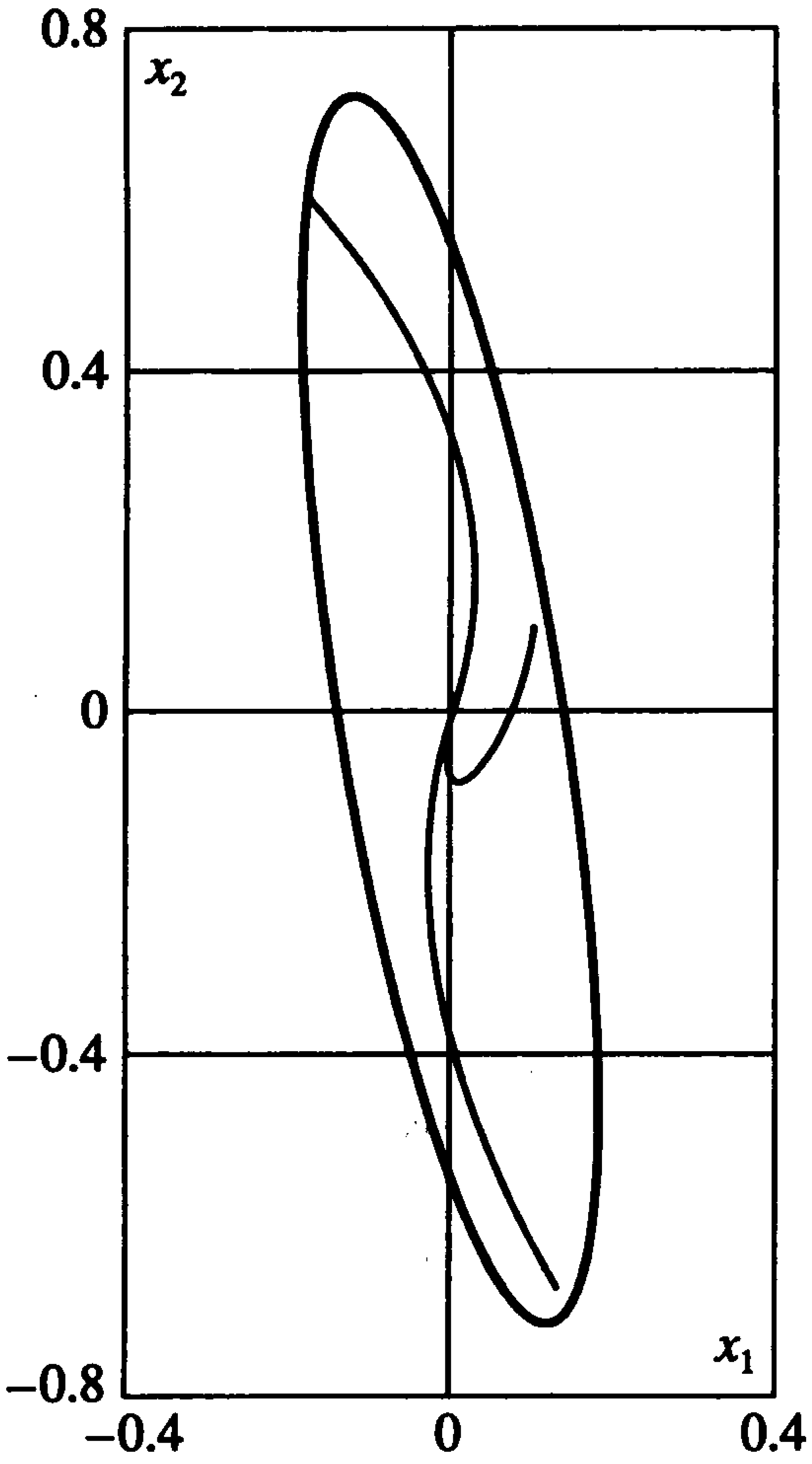
$$u(t) = -\left(\frac{15}{(T-t)^2} + \frac{2}{(1+t)^2}\right)z_1(t) - \left(\frac{5}{T-t} + \frac{1}{1+t}\right)z_2(t)$$

$$\dot{u}(t) = \left(\frac{45}{(T-t)^3} + \frac{15}{(1+t)(T-t)^2} + \frac{4}{(1+t)^3}\right)z_1(t) + \left(\frac{5}{2(T-t)^2} + \frac{5}{(1+t)(T-t)} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)z_2(t)$$

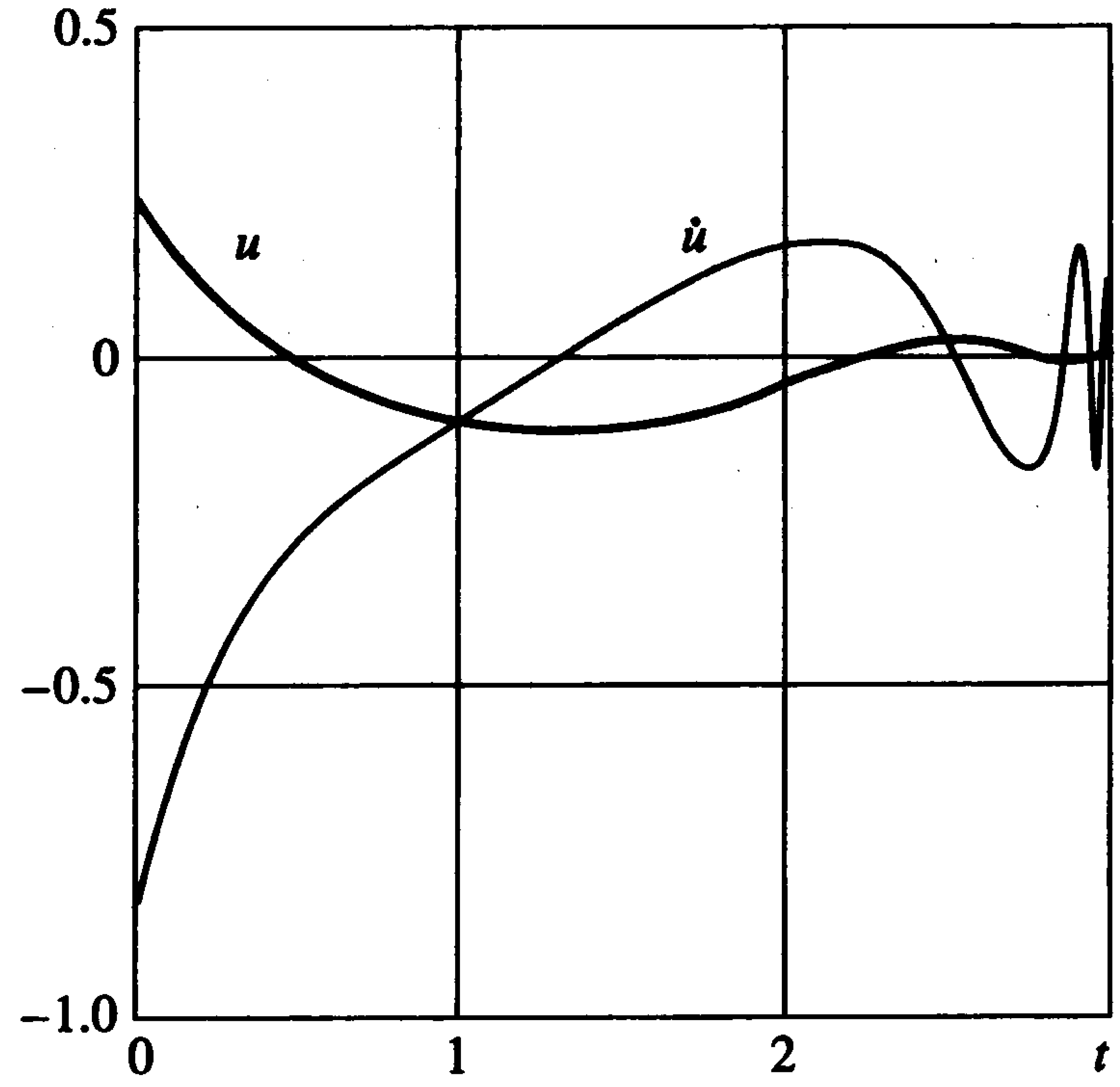
Область $Q(0)$ (ее граница показана толстой линией) и фазовые траектории, переводящие точки (0.1, 0.1), (–0.17, 0.5), (0.13, –0.67) $\in Q(0)$ в нуль, соответственно за время $T \approx 2.797$, $T \approx 2.944$, $T \approx 2.945$ изображены на фиг. 1. На фиг. 2 изображены управление и его производная на траектории, начинающейся в точке (0.13, –0.67) $\in Q(0)$ и оканчивающейся в нуле. Очевидно, они удовлетворяют заданным ограничениям.

3. Синтез управлений для нелинейной системы по первому приближению. Рассмотрим задачу синтеза управлений для системы (1.1) с ограничениями на управление вида (1.3) при $l = 1$. Предположим, что функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию $f(t, 0, 0) = 0$ (всюду далее вновь имеется в виду, что $t \in [t_0, t_1]$) и имеет непрерывные до второго порядка производные по x и u. Тогда в окрестности нуля систему (1.1) можно записать в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t,x,u); \quad A(t) = f_x(t,0,0), \quad B(t) = f_u(t,0,0) \tag{3.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $g(t, x, u)$ – непрерывная функция; предположим, что она удовлетворяет неравенству

$$\|g(t, x, u)\| \le c_1\|x\|^{s_1} + c_2\|x\|^{s_2}\|u\|^{s_3} + c_3\|u\|^{s_4} \tag{3.2}$$

где

$$c_1 \ge 0, \quad c_2 \ge 0, \quad c_3 \ge 0, \quad s_1 > 1, \quad s_2 + s_3 > 1, \quad s_4 > 1$$

Обозначим

$$\alpha_0 = \max\left\{3, \frac{2n_0 - 4}{s_1 - 1} - 1, \frac{2n_0 + s_3 - s_2 - 3}{s_2 + s_3 - 1}, \frac{2n_0 - 2}{s_4 - 1} - 1, \frac{2n_0}{s_1} - 1, \frac{2n_0 - s_2 + s_3}{s_2 + s_3}, \frac{2n_0}{s_4} + 1\right\}$$

Теорема 2. Рассмотрим управляемую систему (3.1), где $A(t) \in C^{2n-1}$, $B(t) \in C^{2n}$, $\operatorname{rank}B(t) = r$, для которой выполнено условие (2.2) и имеют место разложения (2.4). Пусть функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет неравенству (3.2) и в каждой области

$$\{(t, x, u) : t_0 \le t \le t_1, \ 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2, \ \|u\| \le d_0\}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(t, x'', u'') - g(t, x', u')\| \le L_g(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|)$$

Тогда существуют положительные числа a_0 и $\tilde{c}_\alpha < 1$, такие, что при $\alpha \ge \alpha_0$ управление

$$u^\alpha(t, x) = -1/2M^{-1}(t)B_0^* F_\alpha(\Theta_\alpha(t, x))L(t)x \tag{3.3}$$

где функция управляемости $\Theta_\alpha(t, x)$ определена уравнением (2.8) и равенством (2.9), решает задачу синтеза управлений для системы (3.1) в области $\tilde{Q}_\alpha(t) = \{x\colon \Theta_\alpha(t, x) \leq \leq \tilde{c}_\alpha\}$ и удовлетворяет ограничениям

$$\|u^\alpha(t, x)\| \leq d_0, \quad \|\dot{u}^\alpha(t, x)\| \leq d_1 \tag{3.4}$$

Время движения $T_\alpha(t_0, x_0)$ из точки $x(t_0) = x_0 \in \tilde{Q}_\alpha(t_0)$ в точку 0 по траектории системы (3.1) с управлением $u^\alpha(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$T_\alpha(t_0, x_0) \leq (\alpha/\tilde{\beta}_\alpha)\Theta_\alpha^{1/\alpha}(t_0, x_0), \quad \tilde{\beta}_\alpha > 0$$

Доказательство. С учетом доказанного в разд. 2, по теореме 1 из [10] для полного доказательства этой теоремы надо показать, что управление и его производная в силу замкнутой системы (3.1) удовлетворяют заданным ограничениям, и установить неравенство (1.4) для системы (3.1) с управлением (3.3), выполнение которого обеспечивает попадание траектории в начало координат за конечное время.

Положим

$$y(\Theta, t, x) = D(\Theta)L(t)x$$

и перепишем управление (3.3) в виде

$$u^\alpha(t, x) = M^{-1}(t)\Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}(t, x)P_0 y(\Theta_\alpha(t, x), t, x) \tag{3.5}$$

Далее будем считать, что

$$\Theta = \Theta_\alpha(t, x), \quad y = y(\Theta_\alpha(t, x), t, x), \quad D = D(\Theta_\alpha(t, x)), \quad g = g(t, x, u^\alpha(t, x))$$

На основании равенства (3.1) с управлением (3.5) и равенств (2.16) имеем

$$d(L(t)x)/dt = A_0 L(t)x + \Theta^{-1/(2\alpha)}B_0 P_0 y + L(t)g$$

Тогда, как и выше, используя равенство (2.18), получаем

$$\dot{y} = (\dot{\Theta}\Theta^{-1}H^\alpha + \Theta^{-1/\alpha}A_1 + \Theta^{-1/(2\alpha)}B_0 B_0^* \tilde{A}(t)D^{-1})y + DL(t)g \tag{3.6}$$

Из равенства (2.14), используя соотношения (3.6), (2.14), (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -\Theta^{1-1/\alpha} + (\Theta^{1-1/(2\alpha)}(\chi(t)y, y) + 2\Theta(F_\alpha y, DL(t)g))/(F^\alpha y, y) \\ \chi(t) &= F_\alpha B_0 B_0^* \tilde{A}(t)D^{-1} + D^{-1}\tilde{A}^*(t)B_0 B_0^* F_\alpha \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тогда на основании равенства (3.7) производная управления $u^\alpha(t, x)$ вида (3.5) в силу замкнутой системы (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}^\alpha(t, x) &= M_t^{-1}(t)\Theta^{-1/(2\alpha)}P_0 y + M^{-1}(t)\Theta^{-3/(2\alpha)}P_1 y + M^{-1}(t)\Theta^{-1/(2\alpha)} \times \\ &\times P_0 DL(t)g + M^{-1}(t)\Theta^{-1/\alpha}P_0 B_0 B_0^* \tilde{A}(t)D^{-1}y + M^{-1}(t)P_0(H^\alpha - E/(2\alpha))y \times \\ &\times [\Theta^{-1/\alpha}(\chi(t)y, y) + 2\Theta^{-1/\alpha}(F_\alpha y, DL(t)g)]/(F^\alpha y, y) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из равенства (2.14) имеем

$$\sqrt{2a_0\Theta/\|F_\alpha\|} \leq \|y\| \leq \sqrt{2a_0\Theta\|F_\alpha^{-1}\|} \tag{3.9}$$

Тогда, так как

$$(F^\alpha y, y) \ge \|y\|^2/\|(F^\alpha)^{-1}\|$$

$$\|D(\Theta)\| \le \Theta^{-n_0/\alpha + 1/(2\alpha)}, \quad \|D^{-1}(\Theta)\| \le \Theta^{1/(2\alpha)}, \quad \Theta \le 1$$

то из соотношений (3.7), (3.5) и (3.8) получаем неравенства

$$\dot{\Theta} \le -(1 - 2\Theta^{1/\alpha}\|F_\alpha\|\|(F^\alpha)^{-1}\|\tilde{a}_0 - \\ - \sqrt{2/a_0}\Theta^{-1/2 - n_0/\alpha + 3/(2\alpha)}L_{\max}\|F_\alpha\|^{3/2}\|(F^\alpha)^{-1}\|\|g\|)\Theta^{1-1/\alpha} \tag{3.10}$$

$$\|u^\alpha(t, x)\| \le \mu_0\sqrt{a_0}\Theta^{1/2 - 1/(2\alpha)}; \quad \mu_0 = M_0\|F_\alpha\|\|F_\alpha^{-1}\|^{1/2}/\sqrt{2} \tag{3.11}$$

$$\|\dot{u}^\alpha(t, x)\| \ge \mu_1\sqrt{a_0}\Theta^{1/2 - 3/(2\alpha)} + \mu_2\sqrt{a_0}\Theta^{1/2 - 1/(2\alpha)} + \mu_3\Theta^{-n_0/\alpha}\|g\| \tag{3.12}$$

$$\mu_1 = \mu_0(1 + n_0/\alpha + \|F_\alpha\|/2)$$

$$\mu_2 = \|F_\alpha\|\|F_\alpha^{-1}\|^{1/2}(M_1 + M_0\tilde{a}_0 + 2n_0\|F_\alpha\|\|(F^\alpha)^{-1}\|\tilde{a}_0/\alpha)/\sqrt{2}$$

$$\mu_3 = M_0\|F_\alpha\|(1/2 + n_0\|F_\alpha\|\|(F^\alpha)^{-1}\|/\alpha)L_{\max}$$

Величины $\tilde{a}_0$, M_0, M_1 определены формулами (2.24).

Получим оценку для $\|g(L^{-1}(t)D^{-1}y,\ u^\alpha(t, x))\|$. Используя неравенство (3.2), вид управления $u^\alpha(t, x)$ и правое неравенство (3.9), имеем

$$\begin{aligned} &\|g\| \le \mu_4 a_0^{s_1/2}\Theta^{s_1/(2\alpha) + s_1/2} + \mu_5 a_0^{(s_2+s_3)/2}\Theta^{(s_2+s_3)/2 + (s_2 - s_3)/(2\alpha)} + \mu_6 a_0^{s_4/2}\Theta^{s_4/2 - s_4/(2\alpha)} \\ &\mu_4 = c_1 2^{s_1/2}L_0^{s_1}\|F_\alpha^{-1}\|^{s_1/2} \\ &\mu_5 = c_2 2^{(s_2 - s_3)/2}L_0^{s_2}M_0^{s_3}\|F_\alpha\|^{s_3}\|F_\alpha^{-1}\|^{(s_2+s_3)/2} \\ &\mu_6 = c_3 2^{-s_4/2}M_0^{s_4}\|F_\alpha\|^{s_4}\|F_\alpha^{-1}\|^{s_4/2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Тогда из (3.10) получаем неравенство

$$\dot{\Theta} \le -\beta_\alpha(\Theta)\Theta^{1-1/\alpha} \tag{3.14}$$

где

$$\beta_\alpha(\Theta) \doteq 1 - 2\Theta^{1/\alpha}\|F_\alpha\|\|(F^\alpha)^{-1}\|\tilde{a}_0 - \sqrt{2}\|F_\alpha\|^{3/2}\|(F^\alpha)^{-1}\|L_{\max} \times \\ \times(\mu_4 a_0^{(s_1-1)/2}\Theta^{\nu_1(\alpha)} + \mu_5 a_0^{(s_2+s_3-1)/2}\Theta^{\nu_2(\alpha)} + \mu_6 a_0^{(s_4-1)/2}\Theta^{\nu_3(\alpha)})$$

$$\nu_1(\alpha) = (s_1 - 1)/2 - n_0/\alpha + (s_1 + 3)/(2\alpha) \ge 0$$

$$\nu_2(\alpha) = (s_2 + s_3 - 1)/2 - n_0/\alpha + (s_2 - s_3 + 3)/(2\alpha) \ge 0$$

$$\nu_3(\alpha) = (s_4 - 1)/2 - n_0/\alpha + (3 - s_4)/(2\alpha) \ge 0$$

при $\alpha \ge \alpha_0$. На основании неравенства (3.13) из неравенств (3.11), (3.12) получаем

$$\|u^\alpha(t, x)\| \le \mu_0\sqrt{a_0}, \quad \|\dot{u}^\alpha(t, x)\| \le \psi(a_0), \quad x \in \{x : \Theta_\alpha(t, x) \le \min\{c_\alpha, 1\}\} \tag{3.15}$$

где

$$\psi(a_0) = (\mu_1+\mu_2)\sqrt{a_0}+\mu_3(\mu_4 a_0^{s_1/2}+\mu_5 a_0^{(s_2+s_3)/2}+\mu_6 a_0^{s_4/2})$$

Пусть число a_0 удовлетворяет неравенствам

$$0<a_0\le d_0^2/\mu_0^2,\quad \psi(a_0)\le d_1$$

Выберем положительную постоянную $\hat{c}_\alpha$ так, чтобы для $0<\Theta\le\hat{c}_\alpha$ выполнялось неравенство $\beta_\alpha(\Theta)>0$. Выберем $\tilde{c}_\alpha=\min\{c_\alpha,\hat{c}_\alpha,1\}$, следовательно, имеем $\tilde{Q}_\alpha(t)\subset\subset Q_\alpha(t)\subset Q_\alpha^1$. Для этих a_0 и $\tilde{c}_\alpha$ положим $\tilde{\beta}_\alpha=\beta_\alpha(\tilde{c}_\alpha)$. Тогда из (3.14) вытекает неравенство

$$\dot{\Theta}_\alpha(t,x)\le-\tilde{\beta}_\alpha\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(t,x),\quad x\in\tilde{Q}_\alpha(t)$$

Таким образом, установлено неравенство (1.4) при $\beta=\tilde{\beta}_\alpha$ и $\alpha\ge\alpha_0$.

Из неравенств (3.15) следует, что управление и его производная удовлетворяют для $x\in\tilde{Q}_\alpha(t)\backslash\{0\}$ ограничениям (3.4). По теореме 1 из [10] следует утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальних процессов. М.: Наука, 1961. 391 с.
2. *Силин Д.Б.* О линейных инерционных управляемых системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1982. № 3. С. 44–49.
3. *Хайлов Е.Н.* Параметризация множества управляемости для линейной динамической системы // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1995. № 211. С. 401–410.
4. *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton: Univ. Press. 1957 = *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
5. Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems / Ed. Leitmann G. N.Y.: Acad. Press, 1962 = Методы оптимизации с приложениями в механике космического полета / Под ред. Дж. Лейтмана. М.: Наука, 1965. 538 с.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
7. *Бессонов Г.А., Коробов В.И.* Каноническая форма линейных нестационарных управляемых систем и задача синтеза // Динамические процессы и их устойчивость. Якутск, 1987. С. 26–39.
8. *Коробов В.И., Скорик В.А.* Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 3. С. 319–331.
9. *Коробов В.И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. 1979. Т. 109. № 4. С. 582–606.
10. *Бессонов Г.А., Коробов В.И., Скляр Г.М.* Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 9–15.
11. *Bellman R.* Vector Lyapunov Functions // SIAM Journal. Control. Ser. A, 1962. V. 1. № 1. P. 32–34.
12. *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 992–1002.
13. *Скорик В.А.* Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости // Вестн. Харьк. ун-та. Математика, прикл. математика и механика. 1999. № 444. С. 15–23.

Харьков (Украина), Щецин (Польша)
e-mail: {vkorobov, skoryk}@univer.kharkov.ua
korobow@sus.univ.szczecin.pl

Поступила в редакцию
3.VI.2002