

УДК 531.36

© 2003 г. А. Л. Куницын, А. М. Чудаева

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СКОПЛЕНИЙ МИКРОЧАСТИЦ
В ГРАВИТАЦИОННО-РЕПУЛЬСИВНОМ ПОЛЕ
БИНАРНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ**

Проводится новый, по сравнению с предложенным ранее [1–3], физически более ясный анализ устойчивости положений относительного равновесия (треугольных и коллинеарных точек либрации) микрометеоритных частиц или частиц газопылевых облаков в поле двух гравитирующих и излучающих звезд на основе круговой ограниченной задачи трех тел. Путем введения нового параметра, характеризующего гравитационно-репульсивное поле системы, и перехода в конфигурационное пространство устанавливается полная картина областей устойчивости треугольных и коллинеарных точек либрации и их эволюции во всем диапазоне изменения основных параметров системы. Построенные области устойчивости позволяют судить о возможных устойчивых конфигурациях скоплений микрометеоритных и газопылевых частиц в бинарных звездных системах.

Был проведен [4, 5] новый (во многом более наглядный) анализ устойчивости семейств положений относительного равновесия (точек либрации) микрометеоритных частиц (или частиц газопылевого облака) в гравитационно-репульсивном поле двух тел (звезд), обращающихся относительно их барицентра по кеплеровым орбитам. Анализ устойчивости семейств коллинеарных точек либрации был дан [5] только для частного случая одинакового репульсивного влияния на частицу со стороны обоих излучающих тел. Цель данного исследования – как снятие этого ограничения, так и установление связи устойчивых семейств коллинеарных точек либрации с семействами устойчивых треугольных точек либрации, а также выяснение полной картины их эволюции во всем возможном интервале изменения параметров системы. Получить достаточно простую и физически ясную картину областей устойчивости и их эволюции удалось в результате использования метода исключения параметра, эффективность которого была продемонстрирована ранее [6] при решении задач, подобных рассматриваемой. Преимущества этого метода построения областей устойчивости заключаются как в возможности получения аналитического решения в случаях, когда традиционный подход не позволяет этого сделать, так и в построении области устойчивости непосредственно в конфигурационном пространстве, что всегда дает более наглядную картину устойчивых состояний системы.

Как было показано [4, 5], координаты точек либрации и условия их устойчивости определяются как параметрами гравитационно-репульсивного поля, так и парусностью находящихся в этом поле частиц, представляющей собой отношение характерной площади частицы к ее массе. В качестве параметра, характеризующего гравитационно-репульсивное поле выбранной звездной пары, следует взять величину, определяемую как [4, 5]

$$k = (M_2/C_2)/(M_1/C_1)$$

где M_1, M_2 – массы основных тел, C_1, C_2 – мощности их излучения соответственно. Очевидно, k может принимать любые неотрицательные значения.

Силовая функция рассматриваемой задачи (называемой также фотогравитационной ограниченной задачей трех тел) имеет вид [4, 5]

$$W = (x^2 + y^2)/2 + Q_1(1 - \mu)/R_1^2 + Q_2\mu/R_2^2 \quad (1)$$

$$R_i = (x^2 - a_i)^2 + y^2 + z^2, \quad i = 1, 2$$

где x, y, z – безразмерные прямоугольные координаты пассивно гравитирующей частицы P в системе $Oxyz$, равномерно вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, равной единице, μ и $1 - \mu$ – безразмерные массы основных тел S_2 и S_1 , отнесенные к их общей массе, $a_1 = -\mu$, $a_2 = 1 - \mu$ – их безразмерные координаты, Q_1, Q_2 – коэффициенты редукции масс тел S_1 и S_2 , характеризующие влияние репульсивного поля светового давления и представляющие собой отношение разности гравитационной и репульсивной сил к гравитационной силе. Как было показано [4, 5], для всякого фиксированного значения k (т.е. для фиксированной пары основных тел S_1 и S_2) коэффициенты редукции не могут быть произвольными, а должны быть связаны линейным соотношением

$$(1 - Q_2)/(1 - Q_1) = k \quad (2)$$

что не принималось во внимание в большинстве предыдущих работ [7]. Это не позволяло сделать правильные выводы о расположении и устойчивости точек либрации в зависимости от парусности находящихся в них частиц для всякой фиксированной пары основных тел. В данной работе проведем исследование устойчивости коллинеарных точек либрации для всех допустимых значений параметров системы k и μ ($0 \leq k < \infty$, $0 < \mu \leq 1/2$).

Как было показано в ряде работ [1–3, 5], внешние точки либрации (лежащие вне отрезка S_1S_2) неустойчивы при всех допустимых значениях k и μ , поэтому рассмотрим только внутренние точки либрации, лежащие на отрезке S_1S_2 . При этом, как было показано ранее [1, 2], устойчивость этих точек возможна лишь за счет гироскопической стабилизации, поскольку потенциальная энергия системы не может иметь минимума ни для треугольных точек либрации (ТТЛ), ни для коллинеарных точек либрации (КТЛ).

Условие такой гироскопической стабилизации для КТЛ имеет вид [1]

$$8/9 \leq A \leq 1, \quad A = (1 - \mu)Q_1/R_1^3 + \mu Q_2/R_2^2 \quad (3)$$

и получается из требования отсутствия вещественных частей корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения.

Используя уравнение равновесия (получаемое из условия $\delta W = 0$ при $y = 0$)

$$x - \frac{1 - \mu}{R_1^3}(x - a_1)Q_1 - \frac{\mu}{R_2^3}(x - a_2)Q_2 = 0$$

и указанную выше связь (2) между Q_1 и Q_2 , будем иметь

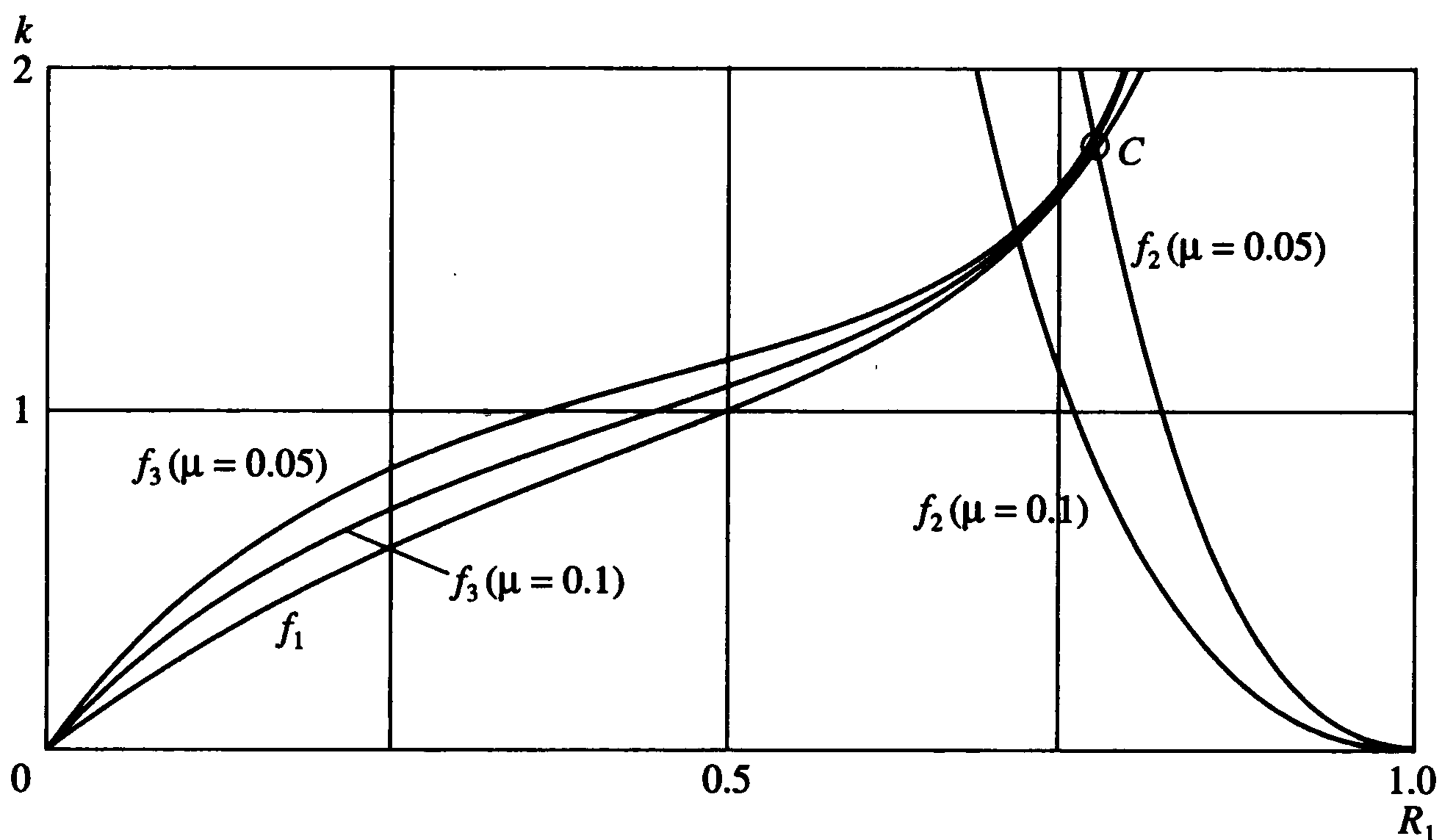
$$A = \left(\frac{1 - \mu}{R_1^2} - k \frac{\mu}{R_2^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{1 - \mu}{R_1^3} + k \frac{\mu}{R_2^3} \right) x + \frac{\mu(1 - \mu)}{R_1^3 R_2^3} (1 - k) \right]$$

$$x = R_1 - \mu = 1 - \mu - R_2$$

Введем обозначения

$$f_1(R_1, R_2) = \frac{1 - R_2^3}{1 - R_1^3}, \quad f_2(\mu, R_1, R_2) = \frac{1 - \mu}{\mu} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2, \quad f_3(\mu, R_1, R_2) = \frac{\tilde{f}_3(\mu, R_1, R_2)}{\tilde{f}_3(1 - \mu, R_1, R_2)}$$

$$\tilde{f}_3(\mu, R_1, R_2) = (1 - \mu)[9\mu(1 - R_2^3) + R_1 R_2^3]$$



Фиг. 1

Учитывая, что для внутренних точек либрации $R_1 + R_2 = 1$, из условия $A \leq 1$ получим две пары неравенств

$$k > f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \leq f_1(R_1, R_2) \tag{5}$$

либо

$$k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \geq f_1(R_1, R_2) \tag{6}$$

(случай $k = f_2(\mu, R_1, R_2)$ будет рассмотрен ниже).

Аналогично из условия $A \geq 8/9$ выводим две пары неравенств

$$k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \leq f_3(R_1, R_2) \tag{7}$$

$$k > f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \geq f_3(\mu, R_1, R_2) \tag{8}$$

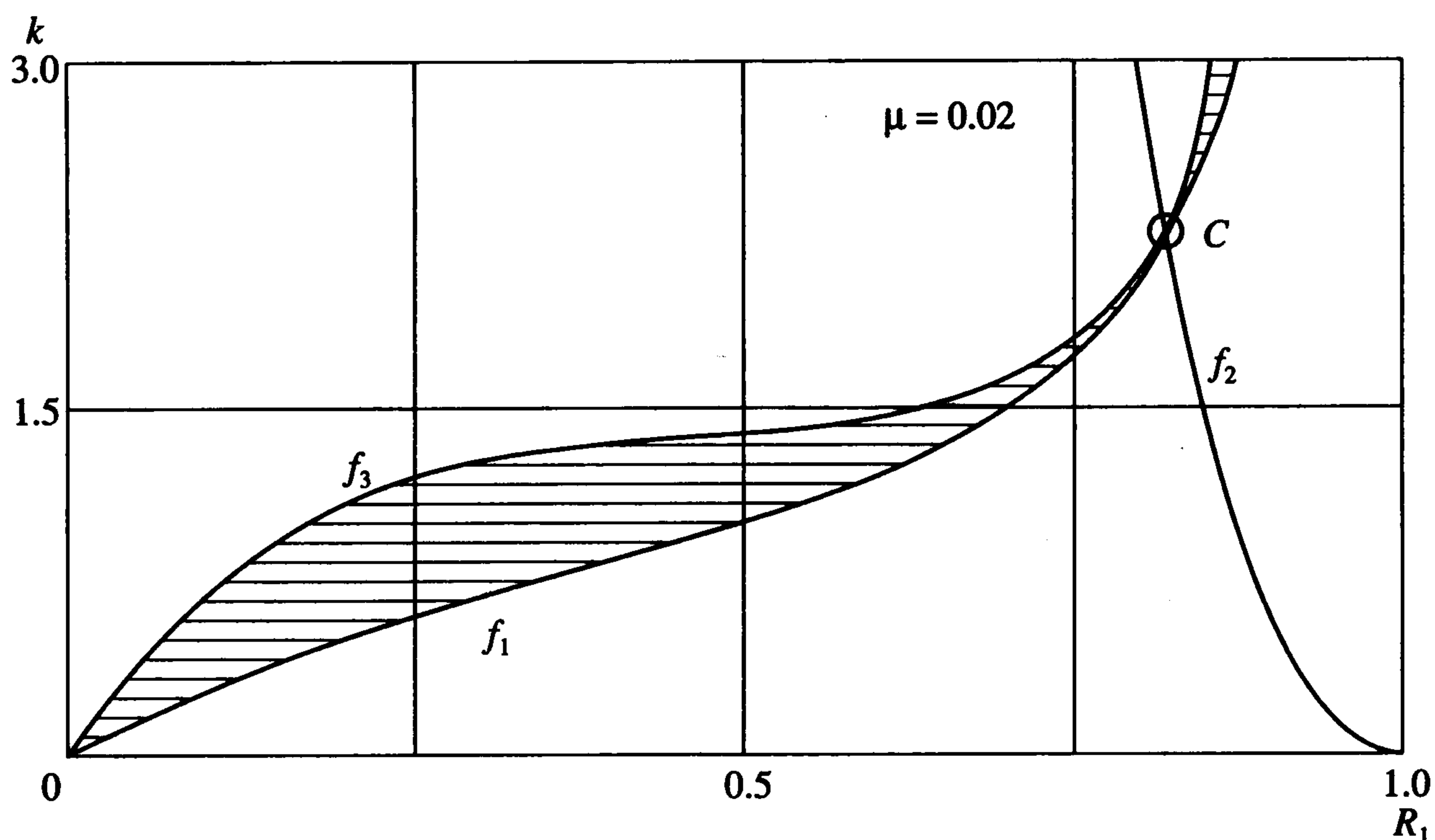
Проведем анализ полученных неравенств для различных значений $k \neq 1$. Кривые $k = f_1(R_1, R_2)$, $k = f_i(\mu, R_1, R_2)$ ($i = 2, 3$) в плоскости k, R_1 для разных значений μ приведены на фиг. 1. Все они пересекаются в одной точке C , в чем можно убедиться, сравнивая равенства $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_3(\mu, R_1, R_2)$ и $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_1(R_1, R_2)$, приводящиеся к одному и тому же соотношению

$$(1 - \mu)R_{2*}^2(1 - R_{1*}^2) = \mu R_{1*}^2(1 - R_{2*}^2) \tag{9}$$

определяющему значение R_{1*} в этой точке в зависимости от μ , а соответствующее значение k_* определяется по одной из формул

$$k_* = f_1(R_1, R_2), \quad k_* = f_i(\mu, R_{1*}, R_{2*}), \quad i = 2, 3$$

Из соотношения (9) следует, что при $\mu \leq 1/2$ будет $R_{1*} \geq 1/2$ и, следовательно, для точки C всегда $k \geq 1$. При $\mu \rightarrow 0$ эта точка перемещается вверх по кривой, $k = f_1(R_1, R_2)$, неограниченно приближаясь к ее асимптоте $R_1 = 1$.



Фиг. 2

Из анализа неравенств (5), (6) и (7), (8) вытекает, что устойчивость КТЛ возможна либо при одновременном выполнении неравенств (6) и (7), т.е. когда

$$k \geq f_1(R_1, R_2), \quad k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \leq f_3(\mu, R_1, R_2) \quad (10)$$

либо при одновременном выполнении неравенств (5) и (8), т.е. когда все неравенства (10) меняются на противоположные.

Области устойчивости, определяемые неравенствами (10) и им противоположными, при $\mu = 0.02$ на фиг. 2 заштрихованы. Точка C является общей граничной точкой этих областей. Заметим, что при $k \leq 1$ неравенства, противоположные неравенствам (10), несовместны. Каждый горизонтальный отрезок, заключенный между границами построенных областей, представляет все множество устойчивых КТЛ, при данном значении k примыкающих слева (или справа) к кривой $k = f_1(R_1, R_2)$, определяющей семейство ТТЛ [4] (фиг. 3). Координаты левого и правого концов этого отрезка являются соответственно корнями уравнений

$$k = f_3(\mu, R_1, R_2), \quad k = f_1(R_1, R_2)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости в самой точке C , в которой все неравенства (10) обращаются в равенства. Представляя условие равновесия в виде

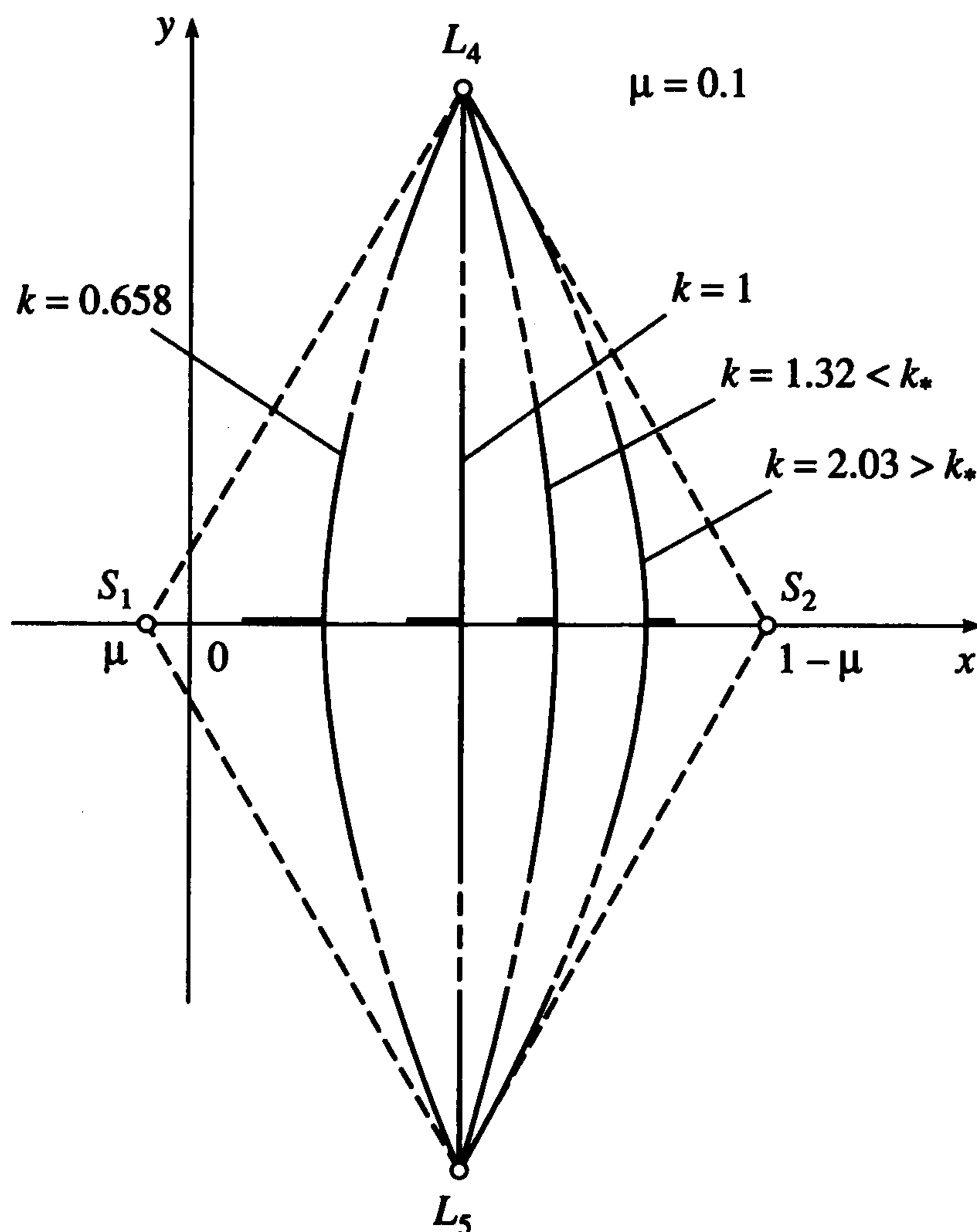
$$[f_2(\mu, R_1, R_2) - k]Q_1 = f_4(\mu, R_1, R_2) - k \quad (11)$$

$$f_4(\mu, R_1, R_2) = (R_1 - \mu)R_2^2/\mu + 1$$

закключаем, что возможен случай, когда оно будет удовлетворяться при любых значениях коэффициента редукции Q_1 (и соответствующих ему, согласно соотношению (2), значениях Q_2), если одновременно выполняются равенства

$$k = f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k = f_4(\mu, R_1, R_2) \quad (12)$$

определяющие точку пересечения кривых (12) на плоскости k, R_1 .



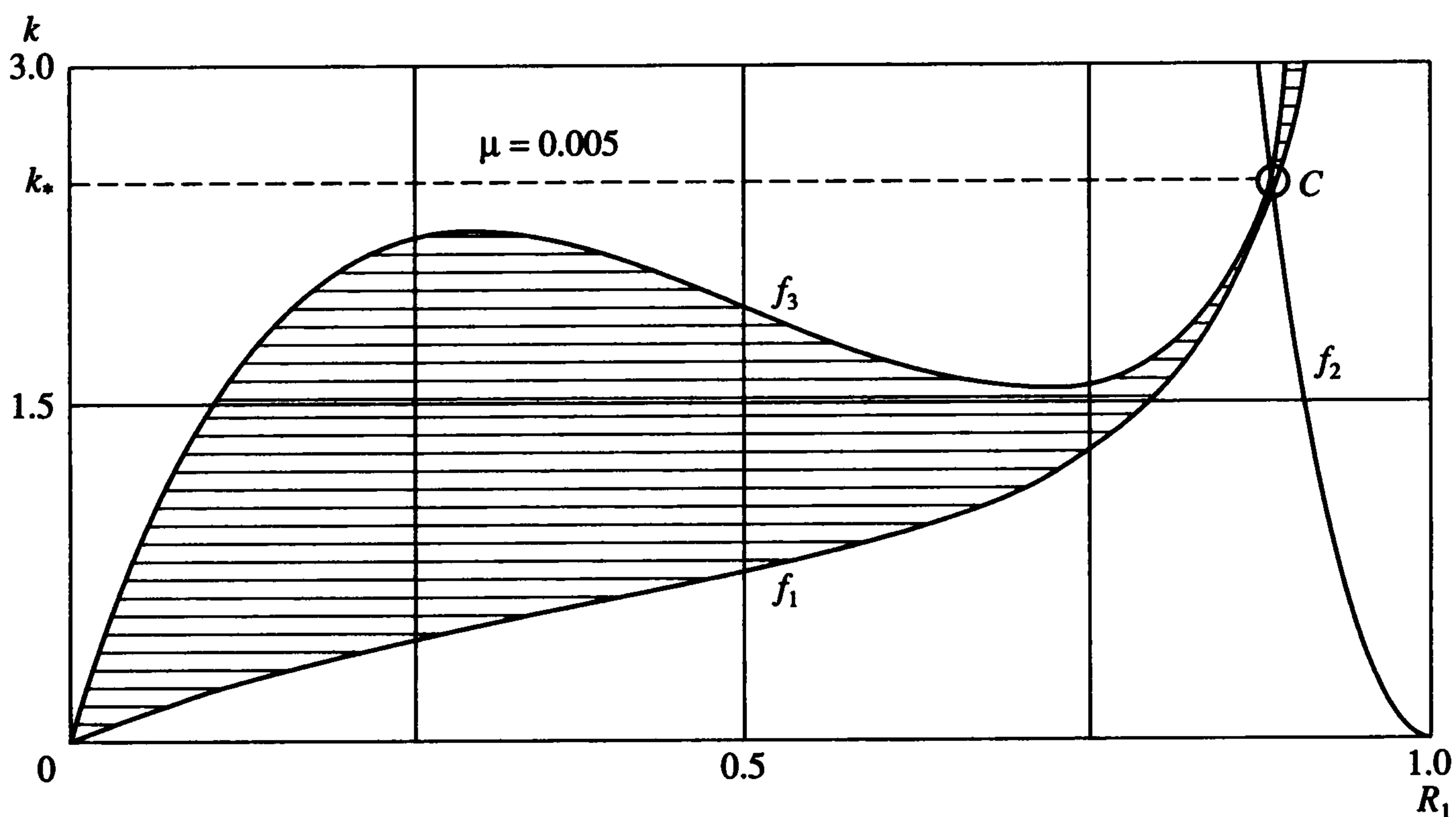
Фиг. 3

Можно убедиться, что уравнение $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_4(\mu, R_1, R_2)$ приводится к виду (9), т.е. точкой пересечения кривых (12) опять будет указанная выше точка C . Каждой кривой $k = f_1(R_1, R_2)$, при фиксированном значении k определяющей на плоскости xu расположение семейства ТГЛ (фиг. 3), принадлежит единственная КТЛ, являющаяся точкой пересечения этой кривой с осью x . Поскольку для ТГЛ имеем $Q_i = R_i^3$ ($i = 2, 3$) [3, 4], в этих КТЛ могут располагаться только частицы с одной и той же парусностью (из проведенного исследования устойчивости ТГЛ [4] вытекает, что для таких частиц устойчивость будет иметь место при любых значениях μ). Однако при $k = k_*$ (т.е. в точке C области устойчивости) в тех же точках либрации, согласно условию (11), могут, кроме того, находиться частицы с различной парусностью и коэффициентами редукции, связанными лишь соотношением (2). Но устойчивостью будут обладать лишь те из них, коэффициенты редукции которых удовлетворяют неравенствам (3). Исключая в выражении для A один из коэффициентов редукции (например, Q_2) с помощью соотношения (2) при $k = k_*$, а затем k_* с помощью, например, зависимости $k_* = f_1(R_1, R_2)$ и, наконец, μ с помощью соотношения (9), будем иметь

$$A = \frac{Q_1(1 - R_2^3) + R_1(R_2^3 - R_1^3)}{R_1 R_2 (R_1^2 + R_2^2 - R_1^2 R_2^2)}$$

Неравенства (3) теперь можно записать в виде

$$\frac{1}{9} R_1 \left(8R_1^2 + \frac{R_1^3 - R_2^3}{1 - R_2^2} \right) \leq Q_1 \leq R_1^3 \tag{13}$$



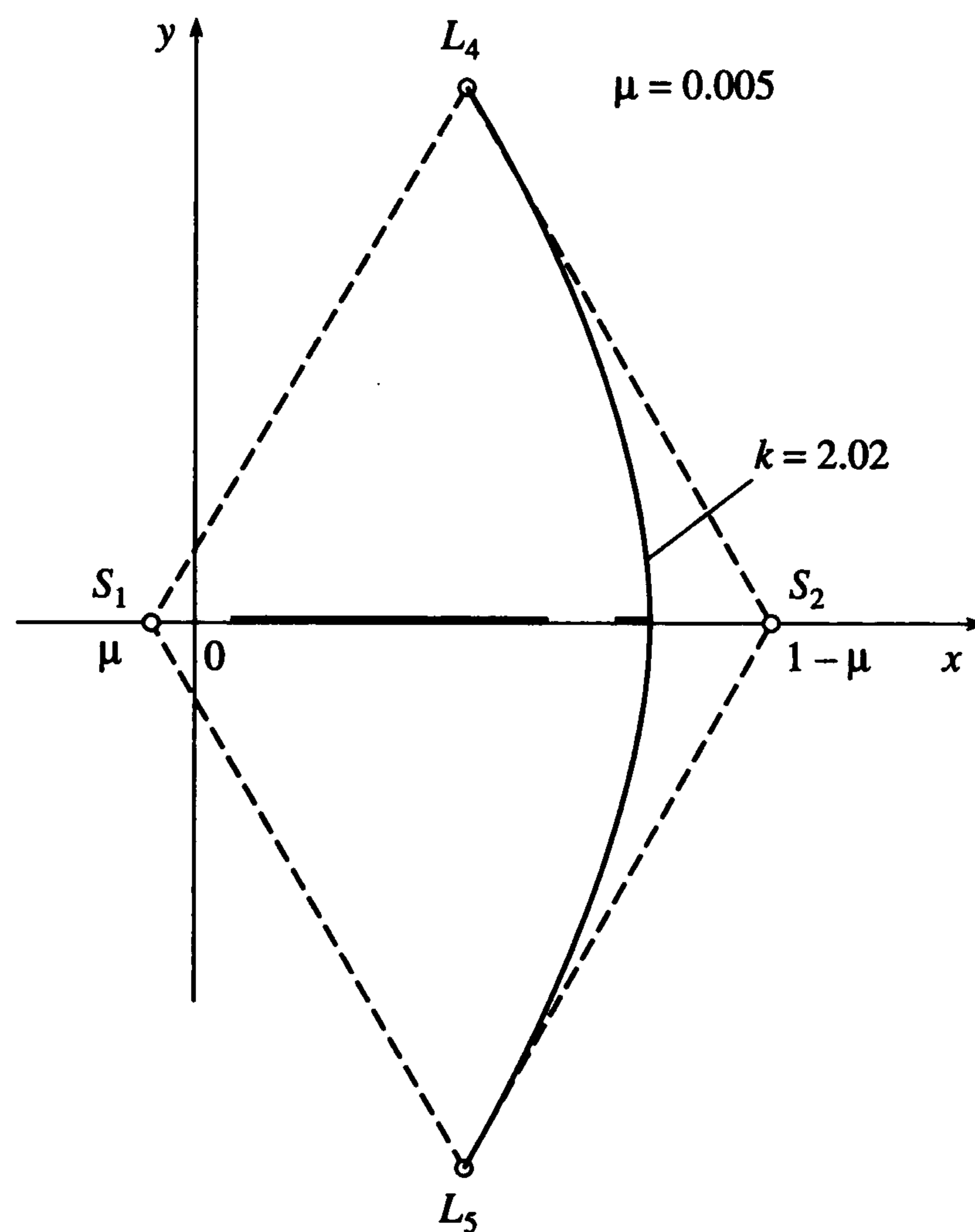
Фиг. 4

Заметим, что такое устойчивое скопление частиц с разной парусностью возможно лишь при значениях $k_* \geq 1$ (для случая $k_* = 1$ на это явление было указано ранее [5]), откуда, в свою очередь, вытекает, что такие скопления могут возникать лишь при $R_1 \leq 1/2$.

На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы относительно области устойчивости КТЛ в конфигурационном пространстве (т.е. на плоскости x). При $k < k_*$, кроме всегда устойчивых КТЛ, в которые переходят ТТЛ, при том же фиксированном значении k возникает еще целое семейство устойчивых КТЛ, располагающихся на отрезке оси x , примыкающем слева (со стороны тела большей массы) к кривой $k = f_1(R_1, R_2)$ (фиг. 3). При этом в каждой точке этого отрезка могут располагаться частицы только с единственной парой значений Q_1 и Q_2 . С уменьшением μ длина этого отрезка возрастает, а с увеличением k он уменьшается, стягиваясь в точку пересечения кривой $k = f_1(R_1, R_2)$ с осью x при $k = k_*$, причем теперь в этой точке либрации могут находиться частицы с любыми значениями Q_1 и Q_2 , если только Q_1 удовлетворяет неравенствам (13).

При дальнейшем увеличении k вместо указанного устойчивого семейства КТЛ появляется новое устойчивое семейство, лежащее на отрезке, примыкающем теперь к той же кривой справа (со стороны тела меньшей массы) (фиг. 3). Длина этого отрезка при всех значениях μ и k существенно меньше того, который примыкает к той же кривой слева. Он исчезает совсем только при $k = \infty$, т.е. когда $Q_1 = 1$, что имеет место при отсутствии светового потока у тела с массой $1 - \mu$.

Отметим еще одно интересное свойство области устойчивости КТЛ, расположенных на отрезке, примыкающем к кривой f_1 слева при весьма малых значениях μ и больших значениях k . В результате численных расчетов кривых, определяющих область устойчивости (10), было установлено, что при $\mu < \mu_{cr} = 0.0153\dots$ у кривой $k = f_3(\mu, R_1, R_2)$ появляются две экстремальные точки (фиг. 4), в результате чего при значениях k , подчиненных неравенству $k_{cr} < k < k_*$ (значение k_{cr} однозначно опреде-



Фиг. 5

ляется величиной μ_{cr}), указанный выше отрезок оси x , представляющий семейство устойчивых КТЛ, распадается на два (на фиг. 5 эти отрезки, как и семейство устойчивых ТТЛ, отмечены жирными линиями). При увеличении k разделяющая эти отрезки щель неустойчивости увеличивается с одновременным уменьшением длины отделившегося отрезка. При некотором значении $k = k_{max}$ он стягивается в точку, после чего (при $k > k_{max}$) исчезает совсем, а область устойчивости на плоскости xu принимает первоначальный вид. При дальнейшем уменьшении μ может оказаться, что $k_{max} > k_*$. Это означает, что с ростом k сначала исчезнет семейство точек либрации, расположенных на отрезке, примыкающем слева к кривой $k = f_1(R_1, R_2)$, и только после этого (при дальнейшем увеличении k) исчезнет указанный выше отделившийся отрезок семейства КТЛ.

Указанное бифуркационное значение k_{cr} находится из условия $\partial f_3 / \partial R_1 = 0$, которое приводится к квадратному уравнению относительно μ . Значение μ_{cr} является кратным корнем этого уравнения. Из условия кратности находится соответствующее величине μ_{cr} значение $R_1^{cr} = 0.4753\dots$, которое является корнем алгебраического уравнения высокой степени. Соответствующее значение k_{cr} вычисляется по формуле $k_{cr} = f_3(\mu_{cr}, R_1, R_2)$, что дает $k_{cr} = 1.5074\dots$ Таким образом, рассматриваемый случай реализуется только когда тело меньшей массы обладает большей мощностью излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (Е00-11.0-28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. журн. 1983. Т. 9. № 7. С. 432–435.
2. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. журн. 1985. Т. 11. № 2. С. 145–148.
3. Лукьянов Л.Г. О семействе точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // Астрон. журн. 1988. Т. 65. Вып. 2. С. 422–432.
4. Куницын А.Л. Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2000. Т. 65. Вып. 5. С. 788–794.
5. Куницын А.Л. Об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2001. Т. 61. Вып. 4. С. 720–724.
6. Куницын А.Л. О методе исключения параметра при решении задачи устойчивости. Актуальные проблемы классической и небесной механики // Межвед. Сб. науч. тр. Тоо “Эльф”. М., 1998. С. 84–91.
7. Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N. The restricted photogravitational threebody problem: a modern state // Astron. and Astrophys. Trans. 1995. V. 6. № 4. P. 283–293.

Москва
e-mail: akunitsyn@mail.ru

Поступила в редакцию
28.V.2002