УДК 531.01

© 2003 г. А. А. Буров

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Обсуждается структура уравнений, получающихся из уравнений Гамильтона в результате преобразования Лежандра функции Гамильтона по координатам. Рассматриваются примеры.

Как известно, при определенных условиях невырожденности преобразование Лежандра по скоростям функции Лагранжа позволяет перейти от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона, а преобразование Лежандра по импульсам функции Гамильтона позволяет выполнить обратный переход и, тем самым, установить взаимно-однозначное соответствие между лагранжевым и гамильтоновым описаниями динамики. Оказывается, что преобразование Лежандра функции Гамильтона по координатам, возможное при выполнении условий невырожденности, также содержательно. Настоящая работа посвящена обсуждению как структуры получающихся уравнений, так и возможностей их применения для исследования динамики механических систем.

1. Обычное соотношение между гамильтоновым и лагранжевым описаниями движения. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^n; \quad H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{1.1}$$

В механике функция Гамильтона H обычно квадратична по импульсам $\mathbf{p}$, и соответствующая квадратичная форма обычно положительно определена. Это позволяет выполнить преобразование Лежандра по отношению к импульсам

$$\mathbf{v} = \partial H/\partial \mathbf{p} \tag{1.2}$$

найти обратное отображение

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t) \tag{1.3}$$

как решение уравнения (1.2) по отношению к $\mathbf{p}$ и построить соответствующую функцию

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{1.4}$$

в которой вместо величины $\mathbf{p}$ подставлено ее значение (1.3). Эта функция оказывается функцией Лагранжа для уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.5}$$

Их нужно дополнить первой, "кинематической", подсистемой уравнений (1.1), которая в новых обозначениях имеет вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \tag{1.6}$$

Корректность перехода от лагранжева к гамильтонову формализму обеспечивается возможностью найти, по крайней мере локально, одно и только одно решение уравнений (1.2), а также тождеством

$$\partial L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t)/\partial \mathbf{q} = -\partial H(\mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{q}, t), \mathbf{q}, t)/\partial \mathbf{q} \tag{1.7}$$

2. Преобразование Лежандра функции Гамильтона по координатам и его последствия. Переменные $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в функции Гамильтона выглядят как величины одного и того же порядка важности. Спрашивается, что произойдет с уравнениями Гамильтона, если преобразование Лежандра будет выполнено не по отношению к переменным $\mathbf{p}$, а по отношению к переменным $\mathbf{q}$. Выполним такое преобразование. Имеем переменные

$$\mathbf{e} = \partial H/\partial \mathbf{q} \tag{2.1}$$

сопряженные переменные $\mathbf{q}$ в смысле преобразования Лежандра. Предположим, что решение уравнений (2.1), рассмотренных как система относительно $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{e}, t) \tag{2.2}$$

Построим функцию

$$\Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{e}, t) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{2.3}$$

в которой величина $\mathbf{q}$ заменена ее значением (2.2).

Дифференцирование функции (2.3) по $\mathbf{p}$ и $\mathbf{e}$ дает

$$\partial\Lambda/\partial\mathbf{p} = -\partial H/\partial\mathbf{p}, \quad \partial\Lambda/\partial\mathbf{e} = \mathbf{q}$$

Тогда гамильтонова система (1.1) может быть переписана в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{e}} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{p}} \tag{2.4}$$

Эту систему надо дополнить “кинематической” системой

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{e} \tag{2.5}$$

3. Альтернативная возможность преобразования гамильтоновой системы. По своему виду уравнения (2.4), (2.5) отличаются от “классических” уравнений Лагранжа (1.5), (1.6) лишь знаками правых частей. Оказывается, что можно представить эти уравнения в виде, в точности совпадающем с видом уравнений Лагранжа. Для этого рассмотрим функцию

$$H'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{3.1}$$

Тогда уравнения Гамильтона запишутся в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = -\partial H'/\partial\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \partial H'/\partial\mathbf{q} \tag{3.2}$$

Пусть

$$\mathbf{V} = \partial H'/\partial\mathbf{q} \tag{3.3}$$

и это соотношение, рассмотренное как система уравнений относительно $\mathbf{q}$, допускает единственное решение

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{V}, t) \tag{3.4}$$

Построим функцию

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{V}, t) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - H'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$$

Тогда справедливы соотношения

$$\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{V} = \mathbf{q}, \quad \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{p} = -\partial H'/\partial\mathbf{p} \tag{3.5}$$

с помощью которых уравнения (3.2) можно записать как

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V} \tag{3.6}$$

или, в более привычном виде, как

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} \tag{3.7}$$

4. Связь с вариационным принципом Гамильтона. Нетрудно проследить связь уравнений (3.7) с вариационным принципом Гамильтона в форме Пуанкаре. Функционал действия может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{p},\mathbf{q},t)]dt = [\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]_a^b - \int_a^b [\mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{p}} + H(\mathbf{p},\mathbf{q},t)]dt = \\ &= [\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]_a^b - \int_a^b [\mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{p}} - H'(\mathbf{p},\mathbf{q},t)]dt = [\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]_a^b + S' \end{aligned} \tag{4.1}$$

Проварьируем функционал S' в классе кривых с концами, фиксированными по переменным $\mathbf{p}$ и свободными по переменным $\mathbf{q}$. Из равенства нулю первой вариации этого функционала получаем в точности уравнения (3.2) и, как следствие, уравнения (3.7). Выполненные рассуждения вполне аналогичны рассуждениям при анализе “классического” вариационного принципа Гамильтона в форме Пуанкаре.

Для механических систем функция Гамильтона линейно-квадратична по импульсам, причем ее квадратичная составляющая всегда положительно определена и поэтому невырожденна. Это позволяет всегда найти обратное преобразование, в чем, пожалуй, и состоит главное преимущество преобразования Лежандра по импульсам функции Гамильтона. В случае, когда функция Гамильтона не зависит явно от времени, эта же ее особенность позволяет получить в явном виде вариационный принцип Якоби, особенно удобный для геометрического анализа траекторий механических систем в конфигурационном пространстве.

Вместе с тем, выполнение преобразования Лежандра функции Гамильтона по координатам зачастую либо оказывается невозможным в силу вырожденности, либо представляется затруднительным из-за сложностей аналитического характера. В этих случаях может идти речь о таком преобразовании по части координат с получением аналога уравнений Рауса. Однако в случае, когда функция Гамильтона линейно-квадратична по координатам и матрица квадратичной формы невырожденна, построение аналога принципа Якоби в пространстве импульсов оказывается возможным.

5. Функции Гамильтона, линейно-квадратичные по координатам. Аналог вариационного принципа Якоби. Пусть функция Гамильтона – линейно-квадратичная функция координат

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \tag{5.1}$$

причем компоненты матрицы **A** и вектора **B**, а также величина **C** – гладкие функции от импульсов. Пусть

$$\mathbf{V} = \partial H'/\partial \mathbf{q} = -(\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}), \quad H' = -H \tag{5.2}$$

Тогда, если определитель матрицы **A** отличен от нуля, то

$$\mathbf{q} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{V} + \mathbf{B}) \tag{5.3}$$

С помощью этого соотношения найдем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{p}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{V} - H') = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{V}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{V} + \frac{1}{2}(\mathbf{V}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{V}+\mathbf{B}) - \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{V}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{A}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} - \mathcal{B}\cdot\mathbf{V} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{A} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathcal{C} = \mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

Вспоминая, что $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{p}}$, представим в виде

$$\mathcal{T} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{V}}\cdot\mathbf{V} - \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathcal{A}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}} - \mathcal{C} = -h \tag{5.4}$$

интеграл энергии (интеграл Пэнлеве – Якоби), существующий в силу того, что функция $\mathcal{L}$ не зависит явно от времени. Из соотношения (5.4) имеем

$$dt^2 = \frac{\mathbf{A}d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}}{2(h-\mathcal{C})} \tag{5.5}$$

Тогда в классе кривых в пространстве импульсов, исходящих из точки $\mathbf{p}_a$, приходящих в точку $\mathbf{p}_b$ и удовлетворяющих соотношению (5.4), функционал S' в силу (5.5) допускает представление (ср. с [1–3])

$$S' = -\int_a^b \mathcal{L}dt = -h(b-a) + S''$$

$$S'' = -\int_a^b \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{p}}}\cdot\dot{\mathbf{p}}dt = \int_a^b (\mathcal{A}\dot{\mathbf{p}} + \mathcal{B})\cdot\dot{\mathbf{p}}dt = \int_{p_a}^{p_b} (2(h-\mathcal{C})\mathcal{A}d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p})^{1/2} + \mathcal{B}\cdot d\mathbf{p} \tag{5.6}$$

Если исходная квадратичная форма, задаваемая матрицей **A**, положительно определена, то также положительно определена и квадратичная форма, задаваемая матрицей $\mathcal{A}$, и определенная соотношением (5.6) "метрика Якоби в пространстве импульсов" имеет те же свойства, что и обычная метрика Якоби в конфигурационном пространстве (см., например, [4], гл. 6, а также [5], гл. 3). Однако в общем случае такая положительная определенность не имеет места.

Для положительно определенной матрицы $\mathcal{A}$ область возможного движения определяется обычным образом: это множество точек $\mathbf{p} \in \Pi_h$, таких, что

$$\Pi_h = \left\{\mathbf{p}\colon 0 \le h - \mathcal{C}\left(= \frac{1}{2}\mathcal{A}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}}\right)\right\}$$

Для отрицательно определенной матрицы $\mathcal{A}$ область возможного движения определена как

$$\Pi_h = \left\{\mathbf{p}\colon \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}} =\right) h - \mathcal{C} \le 0\right\}$$

В случае, когда квадратичная форма, определяемая матрицей $\mathcal{A}$, знаконеопределенна, корректно определить область возможного движения затруднительно. Между тем, если

$$\mathcal{A}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}} = A^+ - A^- = a_1p_1^2 + a_2p_2^2 + \ldots + a_kp_k^2 - a_{k+1}p_{k+1}^2 - a_{k+2}p_{k+2}^2 - \ldots - a_np_n^2$$

$$a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

то обобщенная область возможного движения определяется неравенствами

$$-A^{-} \le h - \mathscr{C} \le A^{+}$$

Изучение свойств определенной таким образом обобщенной области возможного движения выходит за рамки настоящей публикации.

6. Примеры. Движение частицы в поле с квадратичным потенциалом. Динамика частицы в поле с квадратичным потенциалом может быть описана классическими уравнениями Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2 - \mathscr{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}); \quad \mathscr{A} = \operatorname{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n), \quad \Omega_i = \pm\omega_i^2$$

Эти уравнения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathscr{A}\mathbf{q} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = -\mathscr{A}\mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \end{cases}$$

Уравнения Гамильтона с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \mathscr{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) \tag{6.1}$$

имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathscr{A}\mathbf{q}$$

В силу преобразования Лежандра функции (6.1) по отношению к переменной $\mathbf{q}$

$$\mathbf{e} = \partial H/\partial\mathbf{q} = \mathscr{A}\mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathscr{A}^{-1}\mathbf{e} \tag{6.2}$$

функция Λ записывается в виде

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^{-1}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} - \mathbf{p}^2) \tag{6.3}$$

При этом уравнения (2.4), (2.5) могут быть представлены как

$$\mathscr{A}^{-1}\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{e}$$

или

$$-\mathscr{A}^{-1}\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \tag{6.4}$$

Последнее уравнение может быть также получено преобразованием Лежандра функции $H' = -H$, имеющим вид

$$\mathbf{V} = \partial H'/\partial\mathbf{q} = -\mathscr{A}\mathbf{q}, \quad \Leftrightarrow \mathbf{q} = -\mathscr{A}^{-1}\mathbf{V}\ (\mathbf{V} = \dot{\mathbf{p}}) \tag{6.5}$$

в силу которого

$$\mathscr{L} = [\mathbf{V}\cdot\mathbf{q} - H']_{(6.5)} = -\dot{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{A}^{-1}\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}[\mathbf{p}^2 + \mathscr{A}^{-1}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}}] = \frac{1}{2}[\mathbf{p}^2 - \mathscr{A}^{-1}\dot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{p}] \tag{6.6}$$

Уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа (6.6) в точности совпадают с уравнениями (6.4).

Релятивистская частица в поле с квадратичным потенциалом. **Динамика релятивистской частицы в трехмерном евклидовом пространстве под действием линейной потенциальной силы может быть описана уравнениями Лагранжа**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}; \quad \mathbf{q}, \mathbf{v} \in R^3$$

с функцией Лагранжа (см., например, [2], гл. 3)

$$L = -mc^2\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{1/2} - \mathscr{C}, \quad \mathscr{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{Aq}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{A} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3) \tag{6.7}$$

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^2c^{-2})^{1/2}} = -\mathbf{Aq}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$$

Динамику этой же системы можно описать уравнениями Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q}, \quad H = c(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} + \mathscr{C}$$

Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{c\mathbf{p}}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{Aq}$$

Выполним преобразование Лежандра функции $H' = -H$ по отношению к переменной $\mathbf{q}$. Имеем

$$\mathbf{V} = \partial H'/\partial \mathbf{q} = -\mathbf{Aq}$$

т.е.

$$\mathbf{q} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}$$

Тогда, принимая во внимание, что $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{p}}$, представим функцию Лагранжа в виде

$$\mathscr{L} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{q} - H' = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}} + c(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$$

При этом уравнения (3.7) записываются как

$$-\mathbf{A}^{-1}\ddot{\mathbf{p}} = c\frac{\mathbf{p}}{(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}}$$

В отличие от классического многомерного осциллятора с произвольными частотами интегрируемость, равно как и неинтегрируемость, релятивистского волчка неочевидны, если все значения A_i различны.

Классическая метрика Якоби в конфигурационном пространстве для данной задачи определяется следующим образом. Так как функция Лагранжа (6.7) не зависит явно от времени, то имеет место интеграл энергии (интеграл Пэнлеве – Якоби)

$$\mathscr{T}_{\mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L = \frac{mc^2}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)} + \mathscr{C} = h$$

в силу которого

$$dt^2 = \left(c^2\left[1-\left(\frac{mc^2}{h-\mathscr{C}}\right)^2\right]\right)^{-1} d\mathbf{q}^2$$

Тогда укороченное действие представимо в виде

$$S'_{\mathbf{q}} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt = \int_a^b \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{(1-\dot{\mathbf{q}}^2/c^2)^{1/2}} dt = \int_{\mathbf{q}_a}^{\mathbf{q}_b} ds_{\mathbf{q}}$$

где $ds_{\mathbf{q}}^2$ – метрика Якоби в конфигурационном пространстве.

$$ds_{\mathbf{q}}^2 = \frac{(h-\mathscr{C})^2-(mc^2)^2}{c^2} d\mathbf{q}^2 \tag{6.8}$$

В то же время, метрика Якоби в пространстве импульсов имеет вид

$$ds_{\mathbf{q}}^2 = 2(h-c(m^2c^2+\mathbf{p}^2)\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p})$$

Частица в механике Гамеля. Гамель ([7], с. 316, 317), обсуждая вариационные методы описания релятивистской механики, предложил рассматривать наряду с механическими системами, описываемыми в классической механике уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, лагранжевы системы с лагранжианом

$$\mathscr{H} = \sqrt{E-2L} \tag{6.9}$$

где $E > 0$ – постоянная, имеющая размерность энергии. Если $E \gg 2L$, то функцию Гамеля $\mathscr{H}$ можно разложить в ряд по степеням параметра $2L/E$

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 + \ldots = \sqrt{E}\left(1 - \frac{L}{E} - \frac{L^2}{2E^2} + \ldots\right)$$

Первый член разложения – постоянная. Второй член с точностью до множителя, не играющего роли для уравнений движения, совпадает с лагранжианом исходной задачи классической механики. Отличие от уравнений классической механики, а при определенных условиях – и от постклассического приближения релятивистской механики, начинает проявляться за счет слагаемого $\mathscr{H}_2$. Изучались [8] некоторые общие свойства механики Гамеля.

Рассмотрим в рамках механики Гамеля движение частицы в поле с квадратичным потенциалом. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{E-2L}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\sqrt{E-2L}}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{6.10}$$

причем, если

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2 - \mathbf{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})$$

то их можно представить в виде системы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона [8]

$$H = -G(1+\mathbf{p}^2)^{1/2}, \quad G = (E+\mathbf{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})^{1/2}$$

Преобразование Лежандра функции $H' = -H$ по координатам имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{q}(1+\mathbf{p}^2)^{1/2}/G \tag{6.11}$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{q}(1+\mathbf{p}^2)^{1/2}/G \tag{6.12}$$

Перемножая скалярно левые и правые части равенств (6.11) и (6.12), приходим к соотношению, из которого следует, что

$$\mathbf{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \frac{E\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{1+\mathbf{p}^2-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}, \quad E+\mathbf{A}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = \frac{E(1+\mathbf{p}^2)}{1+\mathbf{p}^2-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}$$

Это позволяет записать функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L} = -(1+\mathbf{p}^2)^2E/G = -E^{1/2}(1+\mathbf{p}^2-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})^{1/2}$$

Для данной задачи метрика Якоби в конфигурационном пространстве и метрика Якоби в пространстве импульсов могут быть найдены аналогично тому, как это делалось при отыскании метрики Якоби в конфигурационном пространстве для релятивистской частицы.

Движение частицы в центральном поле сил. Рассмотрим движение системы, описываемой уравнениями Гамильтона с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\alpha/2}$$

Если постоянная c равняется произведению ньютоновской постоянной на массу притягивающего центра и $\alpha = 1$, то имеем классическую задачу Кеплера. Преобразование Лежандра по координатам функции $H' = -H$ имеет вид

$$\mathbf{V} = \partial H'/\partial\mathbf{x} = -c\alpha\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\alpha/2-1}$$

откуда

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = c^2\alpha^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\alpha-1}, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = [c^{-2}\alpha^{-2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}]^{1/(\alpha-1)}$$

Эти соотношения позволяют найти функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = c^{1/(\alpha-1)}(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}(\dot{\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}})^{\alpha/(2(\alpha-1))} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2$$

Впрочем, для данной задачи преимущества описания движения в рамках описанного выше формализма не столь очевидны.

Замечание. Возникающие в задаче переменные типа

$$\mathbf{V} = -\partial H/\partial\mathbf{q} = \partial H'/\partial\mathbf{q}$$

для систем с упругим потенциалом носят характер напряжений. Описание динамики систем "в напряжениях" хорошо известно в механике сплошных сред.

Автор благодарит С.Я. Степанова за обсуждение физической интерпретации результатов.

Работа выполнена при поддержке Бельгийского министерства иностранных дел, Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-02001, 02-01-00196), а также в рамках Государственной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jacobi K.G.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reimer, 1866 = *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.; М.: Гостехиздат, 1936. 270 с.
2. *Appell P.* Traité de Mécanique Rationnelle. Paris: Gauthier – Villars, 1953 = *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
3. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367 с.
4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
5. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik: eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Berlin: Springer, 1949. 796 p.
8. *Буров А.А.* О механике Гамеля // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд. ВЦ РАН, 2001. Ч. 2. С. 76–83.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
23.VII.2001