

УДК 531.39

© 2003 г. Б. Р. Клепфиш

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Для механических систем с неударивающими связями рассматривается задача анализа чувствительности, которая формулируется как задача вычисления производной функционала, характеризующего движение, по вектору параметров. Для вычисления указанной производной подход с использованием сопряженных переменных распространяется на системы с неударивающими связями. Изменение набора активных связей во время движения может происходить как с ударом, так и без удара. Для моментов времени, в которых набор активных связей меняется, указываются условия скачка для сопряженных переменных. В качестве примера рассматривается механическая система, движение которой ограничено абсолютно упругим упором.

Задачи, связанные с оценками влияния погрешностей измерений или неточностей в оценках внешних возмущений на реальные системы, приводят к анализу чувствительности [1–3]. Известны также приложения анализа чувствительности к задачам проектирования, модели которых представлены как в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными [1, 2]. Однако в основном эти приложения касаются задач без связей или с ударивающими связями. В то же время существует обширный класс систем с неударивающими связями, применение к которым общих подходов теории анализа чувствительности представляет интерес. В монографиях [4, 5], посвященных системам с неударивающими связями, приведены примеры виброударных систем, систем циклической автоматики [4] и систем, возникающих при решении задач динамики сооружений [5]. В качестве меры чувствительности обычно выбирают производную некоторого функционала, вычисляемого на траекториях движения системы, по параметру [3, 6]. Общие подходы к вычислению таких производных на траекториях динамических систем известны [7, 8]. В предлагаемой работе получены формулы производной интегрального функционала, характеризующего чувствительность механической системы с неударивающими связями, для случая удара системы об одну связь или схода со связи.

1. Уравнения движения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение механической системы с неударивающими идеальными голономными связями, при этом ограничимся рассмотрением связей в виде конечных неравенств

$$M\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) + G\lambda, \quad \Phi(q) \geq 0, \quad G = \partial\Phi(q)/\partial q \in R^{n \times m}, \quad t \in [t_1, T] \quad (1.1)$$

Здесь $q \in R^n$ – вектор обобщенных координат, $M \in R^{n \times n}$ – симметрическая положительно определенная матрица масс, $F(q, \dot{q}, t)$ – вектор сил, $\Phi: R^n \rightarrow R_+^m$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, компоненты которой описывают голономные стационарные односторонние ограничения, $\lambda(t)$ – вектор множителей Лагранжа.

Множитель Лагранжа λ_i , соответствующий ограничению i , удовлетворяет следующему условию дополнителности [9, 10]:

$$\lambda_i \geq 0, \quad \Phi_i \geq 0, \quad \lambda_i \Phi_i = 0 \quad (1.2)$$

Будем рассматривать систему (1.1) на отрезке $[t_1, T]$ как составную или систему с переменной структурой. Для этого разобьем весь отрезок на отрезки

$$[t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad t_N = T \quad (1.3)$$

внутри каждого из которых набор активных ограничений не меняется. Объединение этих отрезков составит весь отрезок времени $[t_1, T]$.

Для вычисления траекторий движения механической системы нужно определить соответствие наборов активных ограничений временным отрезкам (1.3), а также указать условия связи значений обобщенных скоростей на границах отрезков (переход с ударом или без удара). Для определения уравнений движения системы (1.1), т.е. указания набора активных связей на каждом из отрезков, в общем случае можно воспользоваться обобщением принципа наименьшего принуждения Гаусса [11] на системы с неударивающими связями [12] или рассмотреть механическую систему как систему, удовлетворяющую условию дополнителности [9, 10].

Принцип наименьшего принуждения Гаусса приводит к задаче оптимизации

$$\min_{\ddot{q}} \frac{1}{2} (\ddot{q} - M^{-1}F)^T M (\ddot{q} - M^{-1}F) \quad (1.4)$$

при ограничениях

$$G^T \ddot{q} + \dot{G}^T \dot{q} \geq 0 \quad (1.5)$$

Решение этой задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями, удовлетворяет теореме Куна–Гаккера [13], геометрический смысл которой состоит в том, что для оптимального решения антиградиент подлежащего минимизации выражения (1.4) можно представить неотрицательной линейной комбинацией ($\lambda_i \geq 0$) взятых с обратным знаком столбцов матрицы G , соответствующих активным связям. Следовательно, матрица G , соответствующая отрезку (1.3), может быть получена из условий Куна–Такера. Система Куна–Такера для задачи квадратичного программирования может быть сведена [13] к линейной задаче дополнителности. Следовательно, для решения задачи (1.4), (1.5) могут быть использованы соответствующие процедуры [12, 13]. Задачи дополнителности широко используются для описания механических систем с неударивающими связями [10, 12, 14].

После определения набора столбцов матрицы G , соответствующих отрезку (1.3), для удобства интегрирования уравнений (1.1) можно исключить множитель λ [15].

Рассмотрим теперь связь значений обобщенных скоростей механической системы на границе двух соседних отрезков. Переход с одного отрезка времени движения на другой может быть двух типов: с ударом и без удара. Для получения определяющих соотношений в теории удара чаще всего используется гипотеза Ньютона [4, 16]: изменение нормальной компоненты обобщенной скорости соударяющихся тел зависит лишь от их материалов, не зависит от скоростей и связано соотношением [4, 16]

$$g^T \dot{q}(t^+) = -e g^T \dot{q}(t^-) \quad (1.6)$$

Здесь e – коэффициент восстановления скорости при ударе, который изменяется от нуля до единицы, g – градиент уравнения связи.

Изменение скоростей при ударе в момент t_k о связь, удовлетворяющее условию (1.6), может быть представлено в виде

$$\dot{q}(t_k^+) = \dot{q}(t_k^-) - (1 + e) \frac{g^T \dot{q}(t_k^-)}{g^T M^{-1} g} M^{-1} g \quad (1.7)$$

В случае абсолютно упругого соударения ($e = 1$) для склерономных систем с одной неударяющей связью эта формула совпадает с формулой (13.15) из [4].

Таким образом, система, рассматриваемая в настоящей работе, принадлежит к классу механических систем с неударяющими голономными связями – ограничениями типа неравенств на обобщенные координаты. В моменты ударов обобщенные координаты системы непрерывны, тогда как обобщенные скорости имеют разрывы. При изменении обобщенных скоростей в результате удара пересчет их начальных значений для соответствующего отрезка (1.3) проводится с использованием формулы (1.7), в зависимости от принятых допущений относительно значения коэффициента $e = 1$. Внутри каждого из отрезков (1.3) система удовлетворяет уравнениям движения вида (1.1).

2. Анализ чувствительности. Ниже приводится анализ чувствительности для случаев удара механической системы об одну связь и схода со связи. Пусть уравнения движения механической системы приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для простоты предположим, что на отрезке времени имеется два момента изменения набора активных связей. Запишем уравнения движения в виде

$$dx/dt = f_i(x, b), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3; \quad x(t_1) = x_1, \quad t_4 = T \quad (2.1)$$

Здесь t_2, t_3 – моменты изменения набора активных связей без удара и с ударом, соответственно, $b = (b_1, \dots, b_N)^T$ – вектор параметров. Для рассматриваемой системы, очевидно, $x^T = (q, \dot{q})^T$.

В качестве меры чувствительности примем величину производной [2, 3, 6] интегрального функционала

$$\Omega = \int_{t_1}^T P(x(t), b) dt \quad (2.2)$$

по параметру b , которую вычислим, используя подход, разработанный в теории оптимального управления [7, 8]. Для систем с ударяющими связями формулы анализа чувствительности с помощью указанного подхода получены, например, в [6].

Пусть значение вектора параметров b^0 возмущено малой величиной δb , $\|\delta b\|$ – малая величина, а траектория $x(t)$ такова, что в нефиксированные моменты t_2, t_3 происходит изменение набора активных связей. Моменты времени определяются условиями освобождения от одной из связей (t_2) и удара о связь (t_3). Тогда уравнение в вариациях для $\delta x(t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \delta x - \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x = \frac{\partial f_i}{\partial b} \delta b, \quad t \in [t_i^+, t_{i+1}^-], \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

где $t_{i+1}^- (t_i^+)$ – предел слева (справа) момента изменения набора активных связей.

Сопряженные переменные $\psi(t)$ будем конкретизировать [7] как решение краевой задачи

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial f_i^T}{\partial x} \psi = -P_x, \quad \psi(T) = 0 \quad (2.4)$$

где f_i соответствует отрезку времени, а условия скачка [17] для $\psi(t)$ при t_2 и t_3 приведем ниже.

Используемое при выводе формул в рамках применяемого подхода тождество Лагранжа [7], запишем в виде

$$\sum_1^3 \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \left(\psi \left(\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x \right) + \delta x \left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial f_i^T}{\partial x} \psi \right) \right) dt = \psi \delta x \Big|_{t_1}^T - \psi \delta x \Big|_{t_2^-}^{t_2^+} - \psi \delta x \Big|_{t_3^-}^{t_3^+} \quad (2.5)$$

Поскольку вектор $x(t_1)$ фиксирован, а $x(T)$ свободен, из условий трансверсальности для функционалов типа (2.2) следует [7, 8] $\psi \delta x \Big|_{t_1}^T = 0$. Тождество (2.5) вместе с уравнением (2.3) используются для того, чтобы при записи производной функционала (2.2) по параметру b выразить слагаемые, содержащие множитель δx , через соответствующие слагаемые с множителем δb . А именно, согласно соотношениям (2.3), (2.4), равенство (2.5) можно переписать в виде

$$\sum_1^3 \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \psi \frac{\delta f_i}{\delta b} dt \delta b + \psi \delta x \Big|_{t_2^-}^{t_2^+} + \psi \delta x \Big|_{t_3^-}^{t_3^+} = \int_{t_1}^T P_x(t) \delta x(t) dt \quad (2.6)$$

Получим теперь условия скачка [17] для сопряженных переменных в моменты времени t_2 и t_3 . Пусть δt_2 – вариация момента времени t_2 , соответствующая вариации параметра δb . Тогда из условия непрерывности координат и скоростей в момент освобождения от связи выполняются соотношения для вариации координат [7, 8]

$$\delta x(t_2^+) = \delta x(t_2^-) + (f_1 - f_2) \delta t_2 \quad (2.7)$$

Индексы 1 и 2, как отмечалось выше, соответствуют отрезкам времени движения механической системы. Освобождающуюся связь обозначим $\Phi_j(q) = R(x)$. Очевидно, что по крайней мере в малой окрестности t_2 справедливо неравенство $d\Phi_j/dt = R_x f_i > 0$, индекс i соответствует отрезку времени движения.

Используя первые члены разложения в ряд соотношения $R(x(t_2^- + \delta t_2)) = 0$, получим [7] связь между δt_2 и $\delta x(t_2^-)$. Подстановка этой связи и выражения (2.7) в равенство (2.6) дает, что величина

$$\psi \delta x \Big|_{t_2^-}^{t_2^+} \quad (2.8)$$

обращается в нуль с точностью, нужной для вычисления производной, при условии [7]

$$\psi(t_2^-) = \psi(t_2^+) - \frac{(f_1 - f_2, \psi(t_2^+))}{R_x f_1} R_x \quad (2.9)$$

Форма записи (2.9) условий скачка [17] для $\psi(t_2^+)$ особенно удобна, так как определяет в явном виде переход от $\psi(t_2^+)$ к $\psi(t_2^-)$ при интегрировании справа налево [7].

Получим теперь условие скачка для сопряженных переменных в момент t_3 . Пусть в момент t_3 происходит удар, и соответственно, разрыв в значениях скоростей $\dot{q}(t_3^\pm)$. Новые значения скоростей в момент t_3^+ определяются согласно формулам типа (1.7). Объединив формулы типа (1.7) для обобщенных скоростей с условиями непрерывности обобщенных координат в момент t_3 , получим соотношение, внутреннее условие [8], которое запишем в виде

$$N(x(t_3^-), x(t_3^+)) = 0 \quad (2.10)$$

В случае разрывных фазовых координат вариация функционала типа (2.2) содержит слагаемое вида $(P(x(t_3^-), b^0) - P(x(t_3^+), b^0))\delta t_3$; оно отражает варьирование момента времени t_3 . В результате использования тождества Лагранжа в вариацию функционала типа (2.2) войдут как слагаемые, отражающие варьирование t_3 , так и слагаемые вида (2.8) для t_3^\pm . Чтобы обеспечить равенство нулю суммы

$$\psi \delta x \Big|_{t_3^-}^{t_3^+} + (P(x(t_3^-), b^0) - P(x(t_3^+), b^0))\delta t_3 = 0 \quad (2.11)$$

воспользуемся соотношением, выражающим условие выхода на связь, о которую происходит удар,

$$\Phi_j(q(t_3)) = R_1(x(t_3)) = 0 \quad (2.12)$$

и условиями (2.10). Для этого разложим выражения (2.10) и (2.12)

$$\begin{aligned} R_1(x(t_3^+ + \delta t_3)) &= R_1(x(t_3^+)) + R_{1x} dx(t_3^+) \\ N(x(t_3^- + \delta t_3), x(t_3^+ + \delta t_3)) &= N(x(t_3^-), x(t_3^+)) + \frac{\partial N}{\partial x(t_3^-)} dx(t_3^-) + \frac{\partial N}{\partial x(t_3^+)} dx(t_3^+) \end{aligned} \quad (2.13)$$

и добавим к этим соотношениям связь вариаций координат и момента t_3

$$dx(t_3^\pm) = \delta x(t_3^\pm) + \dot{x}(t_3^\pm)\delta t_3. \quad (2.14)$$

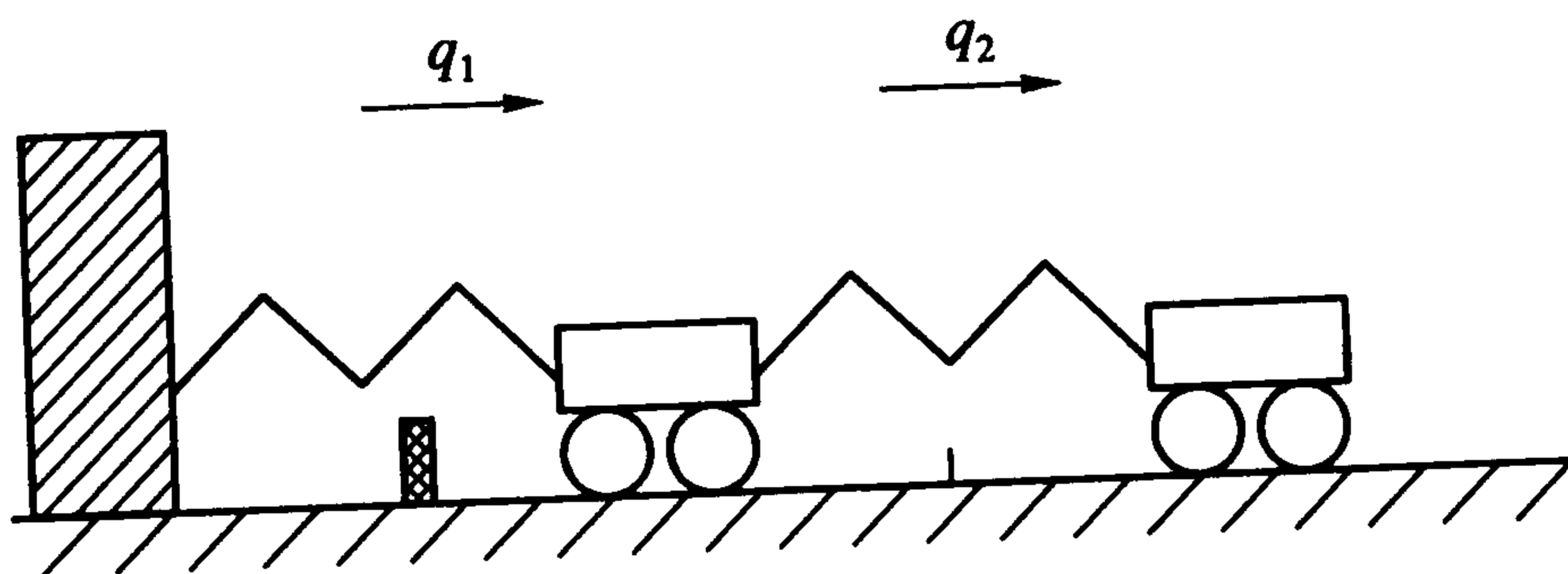
Здесь

$$\dot{x}(t_3^-) = f_2, \quad \dot{x}(t_3^+) = f_3$$

Используя соотношения (2.14) и (2.13), можно выразить δt_3 и $\delta x(t_3^-)$ через $\delta x(t_3^+)$. Подставляя полученные выражения в равенство (2.11), заключаем, что это равенство будет обеспечено, если вектор $\psi(t_3^-)$ удовлетворяет системе $2n$ уравнений

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x(t_3^-)} \right)^{-1} \left(\left(\frac{\partial N}{\partial x(t_3^-)} \dot{x}(t_3^-) + \frac{\partial N}{\partial x(t_3^+)} \dot{x}(t_3^+) \right) \frac{R_{1x}^T}{R_{1x} \dot{x}(t_3^+)} - \frac{\partial N}{\partial x(t_3^+)} \right) \right]^T \psi(t_3^-) = \\ &= \frac{P(x(t_3^-), b^0) - P(x(t_3^+), b^0)}{R_{1x} \dot{x}(t_3^+)} R_{1x} - \psi(t_3^+) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Форма записи системы (2.15), так же как и (2.9), удобна при интегрировании системы (2.4) справа налево.



Окончательно производная рассматриваемого функционала по параметру b имеет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial b} = \int_{t_1}^T P_b(t) dt + \sum \int_{t_i^*}^{t_{i+1}^*} \psi \frac{\partial f_i}{\partial b} dt \quad (2.16)$$

где переменные $\psi(t)$ удовлетворяют уравнению и граничному условию (2.4), а также условиям скачка (2.9), (2.15).

Таким образом, задача вычисления производной функционала (2.2) для механической системы с изменяющимся набором активных связей рассматривается последовательно на отрезках с варьируемыми пределами интегрирования. На границах подынтервалов выполняются условия скачка [17] для сопряженных переменных $\psi(t)$. Случай большего числа отрезков рассматривается аналогичным образом.

3. Пример. Для иллюстрации изложенного подхода применим анализ чувствительности к механической системе [14], состоящей из двух тележек, соединенных пружиной (фигура). Левая тележка также присоединена к стене пружиной. Кроме того, движение левой тележки ограничено абсолютно упругим упором, расположение которого соответствует недеформированному состоянию пружины, соединяющей левую тележку со стеной.

Пусть q_j – отклонения тележек от положений, характеризующихся недеформированным состоянием пружин, m_j – массы тележек; k_j – жесткости пружин (индекс $j = 1$ соответствует левой тележке, $j = 2$ – правой), λ – множитель Лагранжа, соответствующий неудерживающей связи, возникающей при соприкосновении левой тележки и упора. Тогда уравнения движения примут вид

$$m_1 \ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - k_2 (q_1 - q_2) + \lambda, \quad m_2 \ddot{q}_2 = -k_2 (q_2 - q_1)$$

Неудерживающая связь, соответствующая упору, расположенному в точке $q_1 = 0$, обеспечивает неотрицательность координаты q_1 . Следовательно, реакция связи неотрицательна, т.е. $\lambda \geq 0$. При $q_1 > 0$, $\lambda = 0$, если левая тележка не соприкасается с упором, сила реакции связи равна нулю. В те моменты, когда $q_1 = 0$, система подвергается действию дополнительных мгновенных сил. Уравнения движения системы выглядят следующим образом:

свободное движение

$$m_1 \ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - k_2 (q_1 - q_2), \quad m_2 \ddot{q}_2 = -k_2 (q_2 - q_1) \quad (3.1)$$

$$t_1 \leq t \leq \tau, \quad \tau + \Delta t \leq t \leq T$$

движение под действием связи

$$m_1 \ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - k_2 (q_1 - q_2) + \lambda, \quad m_2 \ddot{q}_2 = -k_2 (q_2 - q_1) \quad (3.2)$$

$$\tau \leq t < \tau + \Delta t$$

Здесь τ – момент соприкосновения левой тележки с упором. Изменение значений скоростей должно быть вычислено по формуле (1.7) при $e = 1$.

В качестве функционала, чувствительность которого будет проанализирована, введем

$$\Omega = \int_{t_1}^T (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) dt \quad (3.3)$$

Эта величина характеризует скорость системы на интервале движения. Будем анализировать чувствительность функционала (3.3) от коэффициентов жесткости пружин k_1, k_2 . Поскольку подынтегральное выражение в (3.3) не зависит от этих параметров, производная функционала Ω имеет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (k_1, k_2)} = \int_{t_1}^{\tau} \psi^T \frac{\partial f_1}{\partial (k_1, k_2)} dt + \int_{\tau^+}^T \psi^T \frac{\partial f_2}{\partial (k_1, k_2)} dt \quad (3.4)$$

Переменные f_1 и f_2 соответствуют уравнениям свободного движения на интервалах $[t_1, \tau]$ и $[\tau, T]$ соответственно, вектор ψ – решение сопряженной системы вида (2.4). В момент τ вектор скорости движения и вектор сопряженных переменных имеют разрыв. Напомним, что формула для пересчета скоростей имеет вид (1.7), $e = 1$. После очевидных вычислений получаем

$$\dot{q}^+(\tau) = (-\dot{q}_1^-, \dot{q}_2^-)^T$$

Таким образом, после удара об абсолютно упругий ограничитель, расположенный в точке $q_1 = 0$, скорость левой тележки меняет знак, а скорость правой не изменяется. Для вычисления значений сопряженных переменных, удовлетворяющих условию скачка, нужно воспользоваться формулой (2.15).

Анализ чувствительности проводился для значений параметров $m_1 = m_2 = 1$, при этом система рассматривалась на отрезке времени $[0, 2]$. В качестве начальных условий выбраны

$$q_1(0) = 1, \quad \dot{q}_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 2, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

Величины k_1 и k_2 выбирались на отрезке прямой

$$(2.5, 2.5)^T + \alpha(1, 1)^T, \quad \alpha \in [0, 0.4]$$

с шагом 0.1 по α . Результаты вычислений приведены ниже

| $k_1 = k_2$ | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| Ω | 5.962 | 6.213 | 6.438 | 6.639 | 6.819 |
| $\partial \Omega / \partial k_1$ | 1.585 | 1.687 | 1.790 | 1.888 | 1.974 |
| $\partial \Omega / \partial k_2$ | 0.926 | 0.919 | 0.912 | 0.905 | 0.897 |
| $-\Delta \Omega \cdot 10^3$ | – | 0.1 | 36 | 69 | 102 |
| $-(\Delta \Omega / \Omega) \cdot 10^3$ | – | 0.01 | 6 | 10 | 15 |

Видно, что положительность коэффициентов чувствительности соответствует возрастанию значений Ω . Первый коэффициент чувствительности больше второго для всех значений k_1 и k_2 , так как $\partial \Omega / \partial k_1$ соответствует левой тележке, ударяющейся

об ограничитель. При этом с ростом значений k_1 и k_2 значения $\partial\Omega/\partial k_1$ возрастают, а $\partial\Omega/\partial k_2$ убывают. Приведены также масштабированные величины рассогласований вычисленных значений $\Delta\Omega \times 10^3$, т.е. разностей вычисленных значений Ω со значениями, полученными линейным приближением с помощью коэффициентов чувствительности, а именно,

$$\Delta\Omega = \Omega \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial(k_1, k_2)} \right)^T \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

В последней строке приведены масштабированные относительные рассогласования, т.е. величины $\Delta\Omega/\Omega \times 10^3$, которые можно считать приближенными оценками относительной погрешности метода. Поскольку их значения не превышают 2%, это положительно характеризует предлагаемый метод.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет оценить направления возрастания (убывания) показателя, характеризующего движение системы на отрезке времени, при изменении значений параметров. Кроме того, значения коэффициентов чувствительности указывают относительный вклад изменений значений параметров в изменение значения (3.3). С помощью изложенного подхода можно анализировать некоторые аспекты движения систем циклической автоматики и виброударных систем. Это позволяет получать обоснованные оценки движений таких систем с учетом соударений, а также оценивать влияние погрешностей измерений в движении этих систем, то есть полнее использовать резервы кинематических схем по выбранному критерию качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262с.
2. Haug E.J., Choi K., Komkov V. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Orlando, etc.: Acad. Press, 1986 = Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428с.
3. Dontchev A.L. Perturbations, Approximations and Sensitivity Analysis of Optimal Control Systems. Berlin, etc.: Springer, 1983 = Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
4. Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А. Механика систем с неустойчивыми связями. М.: Наука, 1993. 240с.
5. Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. Киев: Выща шк., 1989. 399с.
6. Haug E., Mani N., Krishnaswani P. Design sensitivity and optimization of dynamically driven systems // Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. Berlin, etc.: Springer, 1984, P. 555–635.
7. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
8. Bryson A. E.Jr., Ho Yu-Chi. Applied Optimal Control. Waltham: Blaisdell, 1969 = Брайсон А., Ю-ши Х. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
9. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655с.
10. Пфайффер Ф. Системы многих тел с односторонними связями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 681–687.
11. Whittaker E.T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge: Univ. Press, 1927 = Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика, М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
12. Lötstedt P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints // SIAM J. of Appl. Math. 1982. V. 42. № 2. P. 281–296.

13. *Bazaraa M., S. Shetty C.M.* Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. N. Y.: Wiley, 1979 = *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583с.
14. *Heemels W.P.M.H., Schumacher J.M., Weiland S.* Linear complementarity systems // SIAM J. of Appl. Math. 2000. V. 60. № 4. P. 1234–1269.
15. *Величенко В.В.* Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988. 279с.
16. *Stewart D.E.* Rigid-body dynamics with friction and impact // SIAM Review. 2000. V. 42. № 1. P. 3–39.
17. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392с.

Ростов-на-Дону
e-mail: klepfish@mail.don.sitek.net

Поступила в редакцию
24.V.2002