УДК 531.36

© 2003 г. А. П. Иванов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОЗИЦИОННЫМИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫМИ СИЛАМИ

Обсуждается классическая задача о влиянии структуры приложенных сил на устойчивость положения равновесия автономной механической системы. Доказан ряд предложений, обобщающих теоремы Томсона–Тэта–Четаева на системы с неконсервативными позиционными силами.

Ранее данная задача рассматривалась многими учеными. Наиболее полные и общие теоремы были получены для случая, когда позиционные силы консервативны [1]. Последующий интерес к обобщениям был стимулирован рядом важных практических задач, в которых наличие неконсервативных позиционных сил приводит к катастрофическим последствиям [2]. Были приведены некоторые общие результаты по устойчивости систем с такими силами [3].

1. Постановка задачи. Уравнения движения автономной системы с обобщенными координатами $\mathbf{q} \in R^n$ в окрестности положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ можно представить в виде

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (D+G)\dot{\mathbf{q}} + (K+N)\mathbf{q} = \mathbf{Q}_2 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{Q}_2$ обозначает совокупность нелинейных членов, а матрицы M, D, K, G и N постоянны, причем первые три из них, описывающие распределение масс, диссипацию и потенциальные силы, симметричны, а матрицы гироскопических и циркуляционных сил кососимметричны. Будем считать, что $D > 0$, тогда в типичном случае об устойчивости положения равновесия можно судить по линейному приближению

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (D+G)\dot{\mathbf{q}} + (K+N)\mathbf{q} = 0 \tag{1.2}$$

Если $N = 0$, то вывод об устойчивости системы (1.1) можно сделать из теорем Томсона–Тета–Четаева, исходя из анализа матрицы K: если она положительна, то имеет место асимптотическая устойчивость, а если имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение, то неустойчивость. Оба этих вывода справедливы вне зависимости от вида матриц $D > 0$ и G, что важно для практики, поскольку обычно точный учет диссипативных сил невозможен.

Было предложено [3] обобщение на случай $N \neq 0$, связанное с преобразованием координат по формулам

$$\mathbf{q} = L(t)\boldsymbol{\xi} \tag{1.3}$$

позволяющим получить в новых координатах систему, аналогичную (1.2), но без циркуляционных сил, причем матрица диссипативных сил сохраняет свою форму. Затем можно применять вышеупомянутые теоремы. Однако существование нормализующего преобразования (1.3) доказано лишь при некоторых дополнительных предположениях о виде матриц D и N.

Имеется также [3] ряд других достаточных условий асимптотической устойчивости системы (1.2), связанных с теми или иными ограничениями на матрицу D.

В данной работе матрица $D > 0$ считается произвольной. Основной результат сформулирован ниже.

Предложение 1. Пусть матрицы K и N таковы, что система (1.2) в отсутствие сил, зависящих от скоростей (т.е., в случае $D = G = 0$), устойчива. Тогда при наличии диссипативных сил с произвольной матрицей $D > 0$ в системе возможна гиростабилизация. Иными словами, существует такая кососимметрическая матрица G, зависящая от D, для которой тривиальное положение равновесия системы (1.2) будет асимптотически устойчивым.

Замечание. В случае $D = G = 0$ система (1.2) обратима, и ее устойчивость (неасимптотическая) достигается лишь при условии, что все корни характеристического уравнения

$$\det(M\lambda^2 + K + N) = 0$$

чисто мнимы, а элементарные делители просты. Иными словами, матрица $M^{-1}(K + N)$ в некотором базисе диагональна и положительна.

2. Доказательство предложения 1. Как известно [4], без ограничения общности можно считать матрицу M в системе (1.2) единичной. Такое упрощение достигается при помощи преобразования координат $\mathbf{q} \to \mathbf{z}$ по формуле $\mathbf{q} = \Lambda\mathbf{z}$ с одновременным умножением уравнения (1.2) слева на Λ^T, где Λ – некоторая невырожденная матрица. В результате получаем систему

$$\ddot{\mathbf{z}} + (D' + G')\dot{\mathbf{z}} + (K' + N')\mathbf{z} = 0 \tag{2.1}$$

причем $D' = \Lambda^T D\Lambda$ и т.д. Важно, что данные преобразования сохраняют структуру системы: матрицы D' и K' симметричны, а G' и N' кососимметричны, причем $D > 0 \Leftrightarrow D' > 0$.

Следующий шаг состоит в проведении преобразования

$$\mathbf{z} = \Gamma\mathbf{x}, \quad \Gamma = AA^T \tag{2.2}$$

причем A – матрица перехода от естественного базиса в R^n к базису из собственных векторов матрицы $K' + N'$ (существование такого базиса следует из условия: см. замечание).

Уравнения (2.1) примут вид

$$\Gamma\ddot{\mathbf{x}} + U\dot{\mathbf{x}} + V\mathbf{x} = 0, \quad U = (D' + G')\Gamma, \quad V = (K' + N')\Gamma \tag{2.3}$$

Как следует из определения матрицы Γ, она симметрична. Покажем, что матрица V также симметрична. Действительно,

$$V^T = \Gamma^T(K' + N')^T = AA^T(K' + N')^T = AA^T(K' + N')^T(A^{-1})^T A^T =$$
$$= A(A^{-1}(K' + N')A)^T = AA^{-1}(K' + N')AA^T = (K' + N')\Gamma = V$$

При выводе данной формулы было принято во внимание, что матрица $A^{-1}(K' + N')A$ диагональна и потому симметрична.

В системе (2.3) матрицы Γ и V симметричны и положительны (так как по предположению система при одних позиционных силах устойчива). Для того чтобы применить к этой системе теорему Томсона–Тэта–Четаева, достаточно проверить положительность симметричной части U_S матрицы U. Нетривиальность такой проверки связана с тем, что замена (2.2) не сохраняет структуру сил, и матрица U_S зависит не только от диссипативных, но и от гироскопических сил в исходной системе (1.1).

Для удобства анализа будем считать, что уравнения (2.3) записаны в ортонормированном базисе, составленном из собственных векторов матрицы Γ, причем собственные значения этой матрицы γ_j ($j = 1, \ldots, n$) расположены в порядке возрастания (напомним, что эти числа положительны). Тогда матрица U выглядит так:

$$U = \|(d_{ij} + g_{ij})\gamma_i\|, \quad D' = \|d_{ij}\|, \quad G' = \|g_{ij}\|; \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Для симметричной части матрицы (2.4) получаем

$$U_S = \frac{1}{2}(U + U^T) = \frac{1}{2}\|(\gamma_i + \gamma_j)d_{ij} + (\gamma_i - \gamma_j)g_{ij}\| \tag{2.5}$$

Алгоритм подбора элементов матрицы G' связан с поэтапным приведением матрицы (2.5) к блочно-диагональному виду. На первом его шаге упрощаются элементы первой строки, а также нескольких последующих строк, если собственное значение γ_1 кратное. Допустим, что

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_l < \gamma_{l+1}, \quad 1 \le l \le n$$

Полагая

$$g_{ij} = d_{ij}(\gamma_i + \gamma_j)/(\gamma_j - \gamma_i); \quad i = 1, \ldots, l; \quad j = l + 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

разобьем матрицу (2.5) на два квадратных блока размеров l и $n - l$. Первый из этих блоков – это главный минор матрицы D' с коэффициентом γ_1. Второй блок далее упрощается аналогичным методом. В итоге за счет подходящего подбора элементов g_{ij} получаем $U_S > 0$. По теореме Томсона–Тэта–Четаева, отсюда следует асимптотическая устойчивость системы (2.3), а значит, и исходной системы (1.1).

Предложение 1 доказано.

3. Стабилизация при помощи позиционных сил. На практике нередки ситуации, когда требуется добиться стабилизации системы за счет позиционных неконсервативных и гироскопических сил. К примеру, для космического аппарата потенциальные силы обусловлены притяжением небесных тел и не могут быть изменены. Реактивные двигатели создают силы, направление которых неизменно относительно спутника (так называемые "следящие" силы) и которые являются неконсервативными, а вращающиеся роторы создают гироскопические силы.

Предложение 2. Следующие два свойства симметричной матрицы K' эквивалентны: 1) существует такая кососимметричная матрица N', что собственные значения матрицы $K' + N'$ положительны и различны; 2) след матрицы K' положителен.

Доказательство. Поскольку добавление кососимметрической матрицы не изменяет следа, а сумма собственных значений всегда равна следу, то из первого свойства очевидно следует второе.

Для доказательства обратной импликации запишем матрицу K' в ортонормированном базисе из ее собственных векторов, упорядоченных по возрастанию собственных значений:

$$K' = \operatorname{diag}\{\lambda_i\}, \quad \lambda_j \le \lambda_{j+1}; \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n - 1$$

Будем считать, что $\lambda_1 \le 0$, так как в противном случае доказательство не требуется. Построение матрицы N' будем проводить при помощи описанной ниже процедуры "выравнивания" собственных значений.

Пусть A – линейный оператор в R^n, матрица которого в некотором ортонормированном базисе верхнетреугольная:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = 0 \text{ при } i > j, \quad a_{ii} = \lambda_i; \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Добавим к A кососимметрический оператор с матрицей $\Omega = \|\Omega_{ij}\|$, в которой лишь два элемента отличны от нуля:

$$\Omega_{i,i+1} = -\Omega_{i+1,i} = \omega$$

Число ω подберем так, чтобы оператор $A + \Omega$ имел собственные значения

$$\lambda_1, \ldots, \frac{3}{4}\lambda_i + \frac{1}{4}\lambda_{i+1}, \quad \frac{1}{4}\lambda_i + \frac{3}{4}\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$$

Нетрудно показать, что с этой целью в качестве ω надо взять корень уравнения

$$\omega(\omega + a_{i,\,i+1}) = 3(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2/16 \tag{3.2}$$

Дискриминант квадратного уравнения (3.2) неотрицателен, поэтому оно имеет действительный корень.

Далее изменим векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i+1}$ таким образом, чтобы матрица оператора $A + \Omega$ сохранила верхнетреугольную форму. Соответствующее этому изменению базиса преобразование должно сохранять симметричность и кососимметричность матриц, т.е. оно должно быть ортогональным. Этому условию можно удовлетворить, если положить

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i\cos\alpha_i + \mathbf{e}_{i+1}\sin\alpha_i, \quad \mathbf{e}_{i+1}' = -\mathbf{e}_i\sin\alpha_i + \mathbf{e}_{i+1}\cos\alpha_i$$

Угол поворота α_i следует подобрать так, чтобы было выполнено равенство $((A + \Omega)\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1}') = 0$. Для этого нужно добиться выполнения равенства

$$(a_{i,\,j+1} + \omega)\operatorname{tg}^2\alpha_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1})\operatorname{tg}\alpha_i + \omega = 0 \tag{3.3}$$

Дискриминант квадратного уравнения (3.3) при учете равенства (3.2) равен

$$D = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2/4 \geq 0$$

поэтому уравнение имеет действительный корень.

В результате описанного выше "выравнивания" матрица оператора сохранила верхнетреугольную форму, а разность между двумя соседними собственными значениями сократилась вдвое. В результате многократного повторения этой операции (для разных i) можно сделать все собственные значения матрицы $K' + N'$ сколь угодно близкими друг к другу. Так как сумма этих чисел положительна, то каждое из них будет положительным. Тем самым предложение 2 доказано.

Замечание. Предложение 2 было приведено ранее [3] без доказательства. Имеются примеры влияния неконсервативных сил на устойчивость [2, 4, 5].

Пример. Уравнения относительного движения спутника на круговой орбите допускают равновесные решения, для которых его главные центральные оси инерции располагаются вдоль осей орбитальной системы координат [6]. В окрестности такого решения система имеет вид (1.1), где

$$\begin{aligned} &\mathbf{q} = (\theta, \psi, \varphi)^T, \quad M = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, J_3\}, \quad D = G = 0, \quad N = 0 \\ &K = \omega_0^2\operatorname{diag}\{3(J_3 - J_2), J_1 - J_3, 4(J_1 - J_2)\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Координаты θ, ψ, φ обозначают отклонения углов нутации прецессии и собственного вращения от равновесных значений $\theta_0 = \pi/2$, $\psi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$; J_1, J_2, J_3 – главные центральные моменты инерции, ω_0 – величина угловой скорости орбитального движения.

Если выполнены неравенства

$$J_1 > J_3 > J_2 \tag{3.5}$$

то положение относительного равновесия спутника устойчиво [6]. Используем полученные выше результаты для получения новых областей устойчивости.

Перейдем к уравнениям (2.1) при помощи описанной в начале раздела 2 замены с матрицей

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{J_1^{-1/2}, J_2^{-1/2}, J_3^{-1/2}\}$$

В результате получим уравнения (2.1), где

$$D' = G' = N' = 0,\quad K' = \omega_0^2 \mathrm{diag}\left\{3(u-v), \frac{1-u}{v}, 4\frac{1-v}{u}\right\};\quad u = \frac{J_3}{J_1},\quad v = \frac{J_2}{J_1}$$

Условие предложения 2 выражается неравенством

$$\mathrm{tr}(K') = (3(u-v)uv + u(1-u) + 4v(1-v))/(uv) > 0 \qquad (3.6)$$

Очевидно, что область (3.6) шире, чем (3.5). Допустим, в частности, что тело динамически симметрично: $J_1 = J_2$. Тогда условия (3.5) не выполнены, а неравенство (3.6), в котором надо считать $v = 1$, справедливо в случае $u > 1$. Следовательно, "сплюснутый" спутник, ось симметрии которого располагается по касательной к орбите, можно стабилизировать за счет неконсервативных сил. Для этого положим

$$N' = \|\omega_{ij}\|,\quad \omega_{23} = \varepsilon \ll 1,\quad \omega_{13} = 0$$

и подберем элемент ω_{12} так, чтобы собственные значения матрицы $K' + N'$ были различными положительными числами. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 2(u-1)\lambda^2 + (\varepsilon^2 + \omega_{12}^2 - 3(u-1)^2)\lambda - 3\varepsilon^2(1-u) = 0 \qquad (3.7)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (3.7) имеет нулевой корень, а два других его корня удовлетворяют квадратному уравнению с дискриминантом

$$D = 16(u-1)^2 - 4\omega_{12}^2$$

Как нетрудно проверить, условие положительности корней квадратного уравнения выражается двойным неравенством

$$\sqrt{3}(u-1) < |\omega_{12}| < 2(u-1) \qquad (3.8)$$

Если число ω_{12} выбрано в соответствии с (3.8), то для достаточно малых значений ε корни уравнения (3.7) положительны и различны. Этим обеспечивается устойчивость в первом приближении положения относительного равновесия спутника.

Согласно предложению 1, при наличии сил сопротивления с матрицей $D > 0$ положение равновесия можно сделать асимптотически устойчивым за счет добавления гироскопических сил. При этом в области (3.5) по теореме Томсона–Тэта–Четаева асимптотическая устойчивость имеет место для любых гироскопических сил, в том числе и нулевых. Вне этой области требуется подбор гироскопических сил в зависимости от диссипативных. В частности, если сопротивление повороту вокруг всякой оси, проходящей через центр масс спутника, пропорционально моменту инерции относительно этой оси, то в уравнениях (2.1) матрица D' будет скалярной. После проведения преобразования (2.2) матрица сил, зависящих от скоростей, останется симметричной и положительной. В этом случае асимптотическая устойчивость достигается без добавления к системе гироскопических сил.

Для стабилизации при других законах сопротивления можно воспользоваться алгоритмом, приведенным при доказательстве предложения 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00520).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Müller P.C.* Stabilität und Matrizen. Berlin, etc.: Springer, 1977. 220 S.
4. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. *Ziegler H.* Principles of structural stability. Waltham, etc.: Blaisdell, 1968 = *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
6. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва
e-mail: apivanov@orc.ru

Поступила в редакцию
6.II.2003