

УДК 539.3 : 620.17.254

© 2003 г. В. Г. Баженов, А. М. Брагов, В. Л. Котов, А. В. Кочетков

**ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРА И ПРОНИКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ  
В МЯГКИЙ ГРУНТ**

Предложенная ранее [1] численная методика развивается для решения задач удара и проникания жестких и деформируемых тел вращения в мягкие грунтовые среды, описываемые моделью С.С. Григоряна [2]. Проводится анализ влияния на силы сопротивления и контактные давления поверхностного кулоновского трения в зоне контакта, объемной сжимаемости и сдвиговой прочности мягкого грунта. Результаты численных решений задач в связанной постановке сопоставляются с аналитическими зависимостями и экспериментальными данными по определению сил и коэффициентов сопротивления внедрению ударников различной формы в мягкий грунт.

Известно [3] приближенное решение задач проникания затупленных тел в грунты; результаты основаны на известных представлениях о различном характере внедрения в сверхзвуковом и дозвуковом режимах и подтверждены экспериментальными данными. Были представлены [4–8] некоторые экспериментальные данные о величине сил сопротивления внедрению. Значительное количество экспериментальных работ посвящено анализу динамических свойств песчаного грунта [9, 10], приведены уравнения состояния такого грунта и других мягких грунтов [2, 11]. Трудности теоретического определения закономерностей процессов проникания сопряжены, в первую очередь, с их нестационарностью, разнообразием и неоднородностью свойств природных грунтов, с недостаточной проработкой уравнений состояния, достоверно описывающих эти свойства. Были предложены [3, 12] аналитические методы решения задач проникания тел вращения в грунты с использованием упрощенных представлений о динамическом поведении грунта.

В последние годы на основе известных моделей грунтов развиваются численные методы исследования процессов удара и проникания в грунт деформируемых тел. На базе численной схемы Годунова [13] решалась задача определения силы сопротивления внедрению жесткого конуса в грунт без учета сдвиговых свойств грунта [14]. Была предложена [15, 16] методика расчета взаимодействия элементов конструкций с грунтовыми средами в рамках модели пластического газа. Эта методика использовалась для численного исследования проникания недеформируемого ударника в глинистую среду и снег [7]. Было рассмотрено [1, 17, 18] применение схем первого порядка точности к численному моделированию поведения упругопластических сред (грунтов, описываемых моделью С.С. Григоряна [2]).

Ниже представлено экспериментально-теоретическое исследование процессов взаимодействия ударников с плоским, полусферическим и коническим оголовками с песчаным грунтом в диапазоне изменения скоростей соударения от 100 до 500 м/с. Установлено, что на максимальное значение силы сопротивления внедрению ударника с плоским торцом преимущественно влияет выбор диаграммы объемной сжимаемости мягкого грунта. При моделировании внедрения ударников с полусферическим и коническим оголовками, а также на стадии развитого проникания существен учет сдвиговой прочности грунта. Влияние трения скольжения на силу сопротивления при внедрении в грунт конических ударников определяется углом полураствора конуса. Значения сил сопротивления на нестационарной фазе и стадии развитого проникания, полученные по известным аналитическим зависимостям, удовлетворительно согласуются с численными и экспериментальными данными в диапазоне скоростей выше 300 м/с. Предложенная модификация аналитического метода, заключающаяся в использовании реше-

ния задачи о распаде разрыва для нахождения плотности на ударной волне, позволяет получить удовлетворительное соответствие аналитического решения с численными и экспериментальными результатами в более широком диапазоне скоростей удара.

**1. Математическая постановка задачи.** Осесимметричная задача удара и проникания тела вращения в грунт формулируется в цилиндрической системе координат  $x\theta$ , где  $x$  – ось вращения,  $y > 0$ . Систему уравнений [2], описывающую динамику грунтовой среды, исключив зависимость неизвестных величин от угла  $\theta$ , представим в виде

$$\begin{aligned} (\rho)_{,t} + (\rho u)_{,x} + (\rho v)_{,y} &= -(\rho v)/y \\ (\rho u)_{,t} + (\rho u^2 + p - s_{xx})_{,x} + (\rho uv - s_{xy})_{,y} &= -(\rho uv - s_{xy})/y \\ (\rho v)_{,t} + (\rho uv - s_{xy})_{,x} + (\rho v^2 + p - s_{yy})_{,y} &= -(\rho v^2 - 2s_{yy} - s_{xx})/y \\ D_J s_{xx} + \lambda s_{xx} &= 2G(2u_{,x} - v_{,y} - v/y)/3 \\ D_J s_{xy} + \lambda s_{xy} &= G(u_{,y} + v_{,x}) \\ D_J s_{yy} + \lambda s_{yy} &= 2G(2v_{,y} - u_{,x} - v/y)/3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Принятые обозначения:  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора скорости в направлении осей  $x$ ,  $y$  соответственно,  $p$  – давление,  $s_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений, ( $i, j = x, y$ ),  $D_J$  – производная Яуманна по времени,  $G$  – модуль сдвига. Величины  $-p + s_{ij}$  образуют компоненты тензора напряжений Коши. Символ в индексе после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Параметр  $\lambda$  может принимать значения  $\lambda = 0$  при упругом деформировании и  $\lambda > 0$ , если реализуется условие пластичности. В данной методике применяется процедура нормирования компонент девиатора тензора напряжений на величину  $1/\sqrt{\lambda}$ , что эквивалентно полным соотношениям теории пластического течения.

Критерий сдвиговой пластичности для грунтовой среды определяется в виде функции второго инварианта тензора напряжений от давления  $p$

$$\frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} = F(p) \quad (1.2)$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование).

Соотношения между давлением и плотностью принимаются в виде

$$p = \begin{cases} f_1(\rho), & dp/dt > 0 \\ f_2(\rho, \rho^*), & dp/dt \leq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Первое из этих уравнений представляет собой ударную адиабату (УА), второе – задает кривую разгрузки от достигнутой в процессе активного нагружения грунта максимальной плотности  $\rho^*$ . При активном нагружении полагается  $\rho^* = \rho$ , разгрузка и повторная догрузка описываются уравнением  $d\rho^*/dt = 0$ , где  $d/dt$  – полная производная по времени. В эйлеровых переменных данное уравнение целесообразно записать в дивергентном виде, преобразуя его с использованием закона сохранения массы к форме закона сохранения для  $\rho\rho^*$ , как это было сделано ранее [14],

$$(\rho\rho^*)_{,t} + (\rho\rho^*u)_{,x} + (\rho\rho^*v)_{,y} = -(\rho\rho^*v)/y$$

Для решения задач применялась явная разностная схема [1, 19] первого порядка точности, сочетающая подходы Лагранжа и Эйлера к описанию движения сжимае-

мой среды. Реализованы следующие граничные условия: “свободная поверхность”:  $\sigma = 0$ ,  $\tau = 0$ , где  $\sigma$  и  $\tau$  – нормальная и касательная компоненты напряжений на свободной границе, “непроницаемость по нормали”:  $v_{n1} = v_{n2}$  и “проскальзывание с кулоновским трением”:  $\tau = k\sigma_n$  в касательном направлении. Здесь  $v_n$  – составляющая скорости по нормали к поверхности контакта,  $k$  – коэффициент кулоновского трения. Условия на поверхностях контакта тел и сред с различными физико-механическими свойствами учитывают также явления отрыва, образование свободных поверхностей (кавитационных полостей) и возможные последующие их схлопывания. Они формулируются как комбинация условий непроницаемости на тех участках поверхностей, которые находятся в данный момент в контакте, и условий на свободных границах на остальных участках. Критерием перехода от условий непроницаемости к условию на свободной границе (отрыв) служит неравенство  $q < q_k$ , где  $q$  – контактное давление,  $q_k$  – некоторая постоянная, характеризующая прочность на отрыв. Критерием вступления в контакт является геометрическое пересечение свободных поверхностей тел.

Численная реализация контактных условий основывается на выделении и сопровождении в процессе расчетов контактных и свободных поверхностей. Контактные силы определяются совместным решением разностных уравнений движения элементов конструкций и соотношений динамической совместности на волнах в контактирующих средах. Разработаны эффективные алгоритмы [19], реализующие контактные условия (в том числе, когда контактирующие поверхности аппроксимируются сетками с несовпадающими узлами) для задач соударения и проникания деформируемых и жестких тел в сжимаемые среды.

**2. Уравнение состояния грунта.** Разработанная методика позволяет описывать взаимодействие жестких и деформируемых тел и элементов конструкций с различными мягкими грунтами, если известны функции (1.2), (1.3). В данной работе приводятся значения постоянных и опорных зависимостей, полученных экспериментально для песка естественной влажности. Определяющие соотношения (1.3) между объемной деформацией  $\varepsilon = 1 - \rho_0/\rho$  и давлением  $p$  в песчаном грунте при изменении давления до 10 МПа базируются на экспериментальных результатах [9] по взрывам сферических зарядов в песчаном грунте и принимаются в виде соотношения

$$p = M\varepsilon^n \quad (2.1)$$

При давлениях свыше 250 МПа используется УА, полученная по результатам плосковолновых ударных экспериментов [10]. Линейная зависимость  $D = A + BU$  скорости ударной волны  $D$  от массовой скорости за фронтом волны  $U$  с помощью соотношений Гюгоньо преобразуется к форме

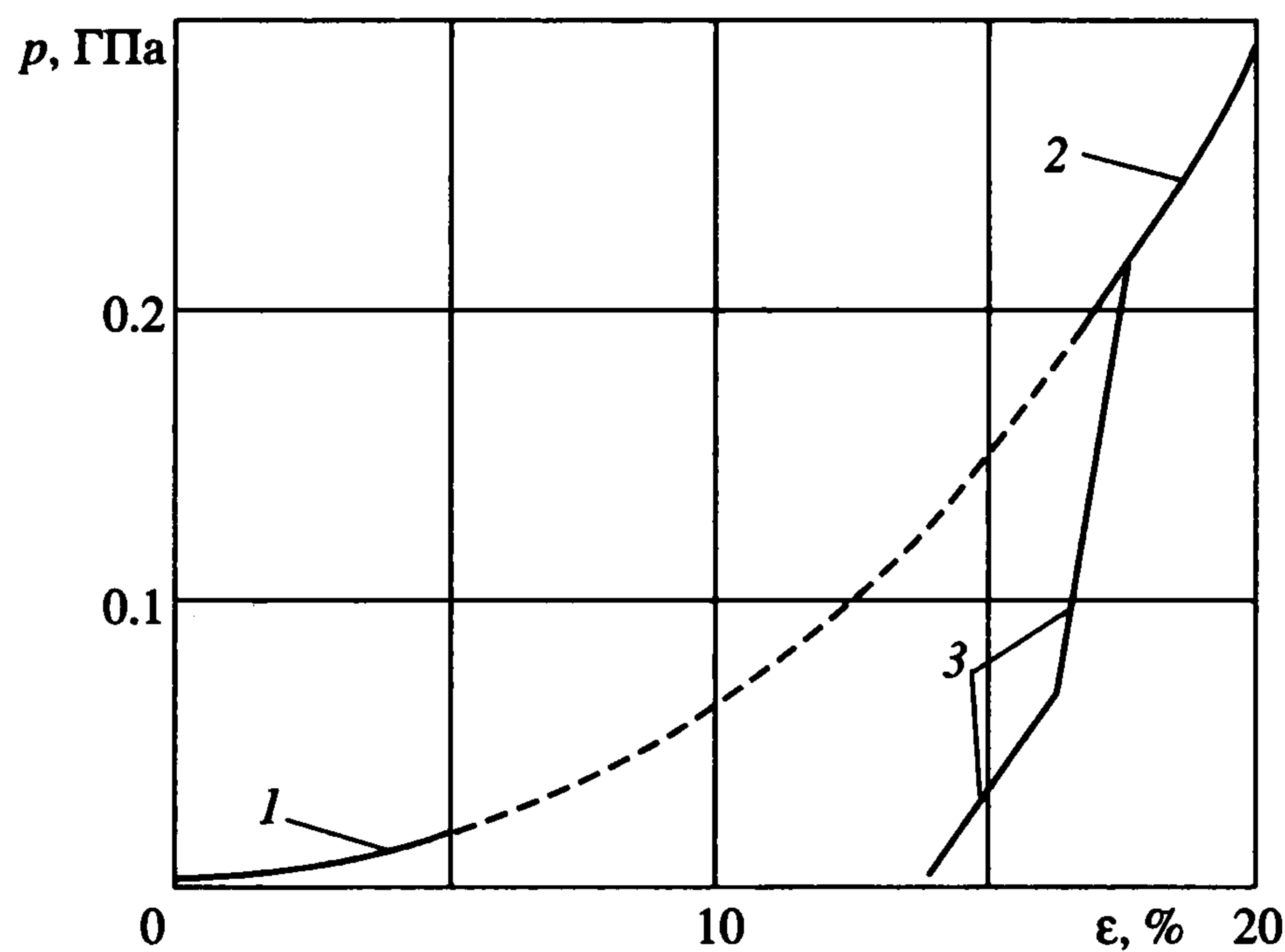
$$p = \rho_0 A^2 \varepsilon (1 - B\varepsilon)^{-2} \quad (2.2)$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность грунта,  $A$  и  $B$  – постоянные. В интервале 10–250 МПа используется интерполирующий параметрический кубический полином в форме Безье [18], обеспечивающий в узлах стыковки непрерывность скоростей звука (производной  $dp/d\rho$ )

$$\mathbf{r}(w) = \{\rho(w), p(w)\} = (1-w)^3 \mathbf{r}_1 + 3w(1-w)^2 \mathbf{r}_2 + 3w^2(1-w) \mathbf{r}_3 + w^3 \mathbf{r}_4 \quad (2.3)$$

Полином (2.3) в координатах  $(\rho, p)$  характеризуется тем, что при изменении параметра  $w$  от 0 до 1 он проходит через точки  $(\rho_1, p_1)$  и  $(\rho_4, p_4)$ , а касательная в этих точках совпадает с прямыми, проведенными через точки  $(\rho_1, p_1)$ ,  $(\rho_2, p_2)$  и  $(\rho_3, p_3)$ ,  $(\rho_4, p_4)$  соответственно, причем

$$\rho_2 = 1 + \alpha \cdot \rho_1, \quad \rho_3 = 1 - \beta \cdot \rho_4 \quad (2.4)$$



Фиг. 1

а соответствующие давления находятся подстановкой значений плотностей в уравнения касательных. Уравнения касательных и значения полинома в опорных точках  $(\rho_1, p_1)$  и  $(\rho_4, p_4)$  вычисляются в соответствии с диаграммами (2.1) и (2.2).

Диаграмма нагружения  $p(\epsilon)$  изображена на фиг. 1, где сплошной кривой 1 дана зависимость (2.1), 2 – УА в виде (2.2), штриховой линией показан аппроксимирующий полином (2.3). Разгрузка среды описывается двухзвенной ломаной [18] (кривая 3). Зависимость предела текучести от давления принята линейной [10]

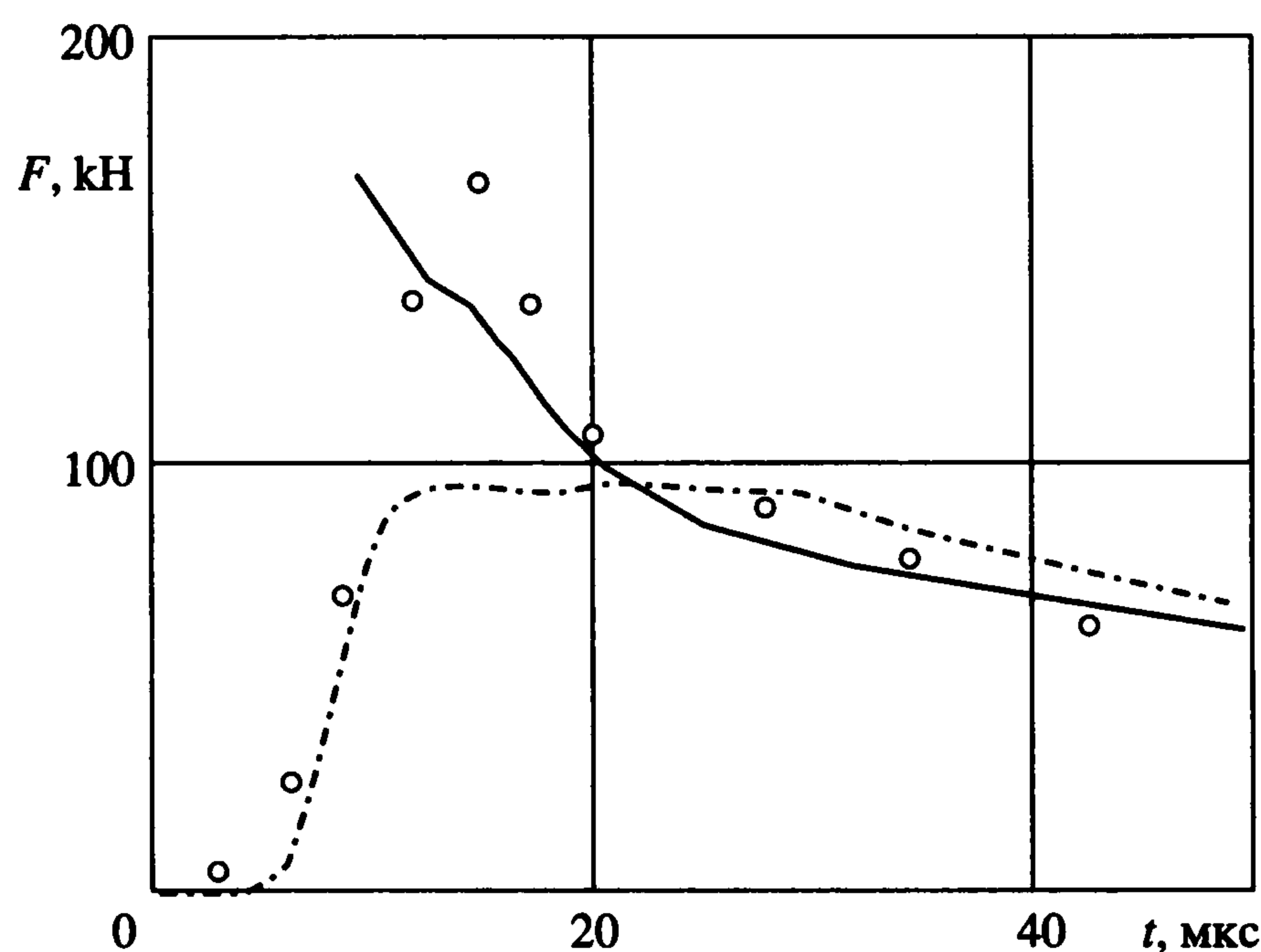
$$F(p) = \frac{1}{3}(2\alpha p + b)^2 \tag{2.5}$$

где  $\alpha$  – тангенс угла внутреннего трения,  $b$  – сцепление.

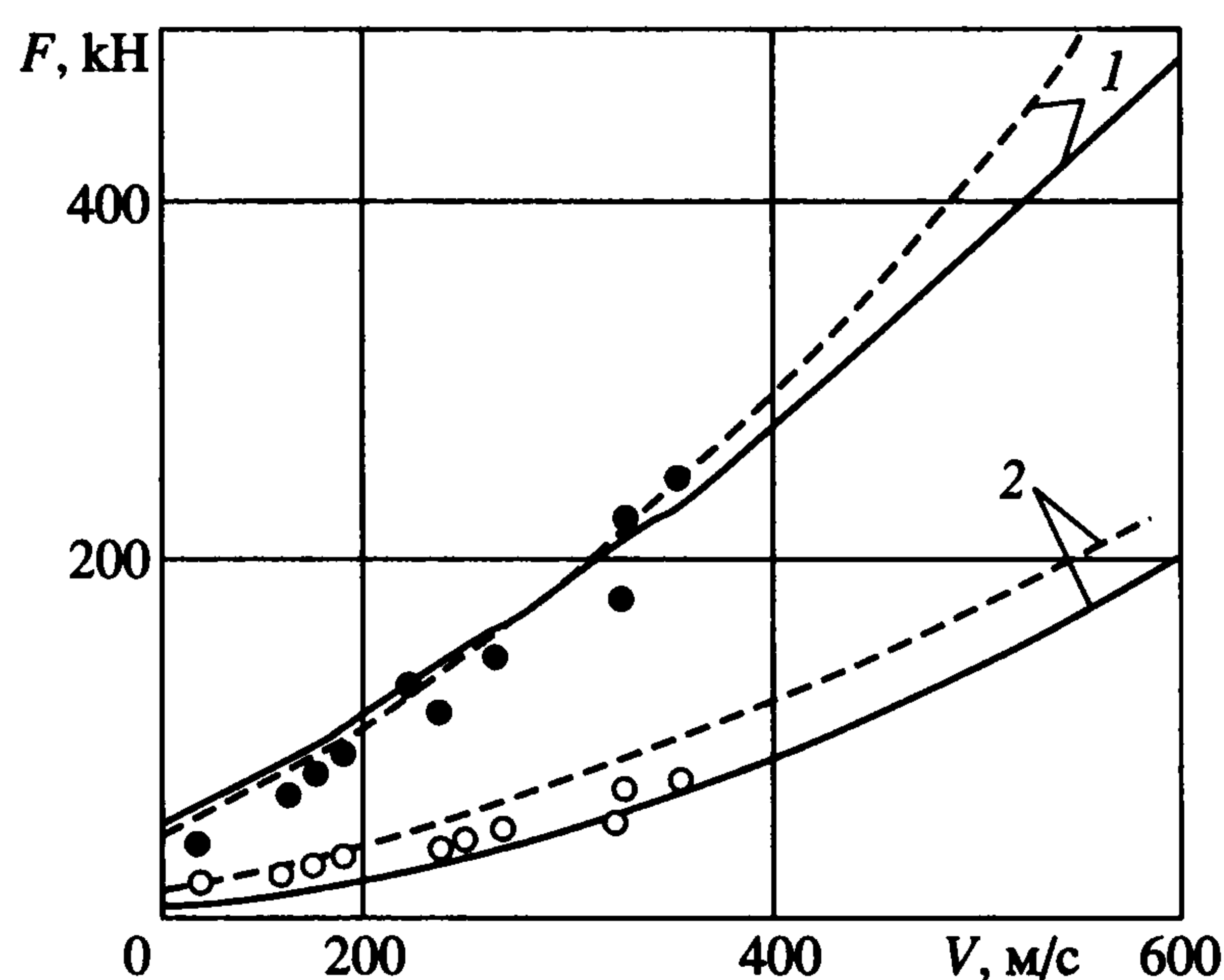
Приведенное уравнение состояния песка позволяет описывать нестационарное деформирование песка в широком диапазоне изменения нагрузки. Ранее это уравнение использовалось при исследовании взрывного воздействия на песчаный грунт [18], ударного [8] и волнового взаимодействия в системе разрезных стержней Гопкинсона [20].

**3. Постановка задач и основные результаты.** Ниже приводятся результаты расчетов удара и проникания в песок стальных цилиндрических ударников диаметром 20 мм со следующими механическими характеристиками материала ударника: модуль Юнга 200 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, плотность 7.8 г/см<sup>3</sup>, предел текучести 1.8 ГПа. Для песка плотностью  $\rho_0 = 1.76$  г/см<sup>3</sup> постоянные степенной зависимости (2.1) были приняты такими:  $M = 2.1$  ГПа,  $n = 1.8$  [9], а постоянные УА в форме (2.2)  $A = 500$  м/с и  $B = 2.4$  [10]. Значения постоянных интерполирующего полинома:  $\alpha = \beta = 0.06$ ,  $\rho_1 = 1.86$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_4 = 2.15$  г/см<sup>3</sup>. Параметры функциональной зависимости для описания разгрузки:  $\gamma_c = 2$ ,  $\gamma_p = 5$  (обозначения соответствуют принятым ранее [11]), начальная скорость звука при разгрузке  $c_0 = 350$  м/с, модуль сдвига  $G = 150$  МПа, постоянные зависимости (2.5)  $\alpha = 0.6$ ,  $b = 0$  [9].

*Взаимодействие с песчаным грунтом протяженного ударника с плоским торцом.* Приведем численные результаты исследования процессов соударения, формирования импульса сжатия и распространения его в стержне-ударнике при ударе по нему контейнером с песком со скоростью 276 м/с. Формулировка задач соответствует постановке обращенного эксперимента [8].



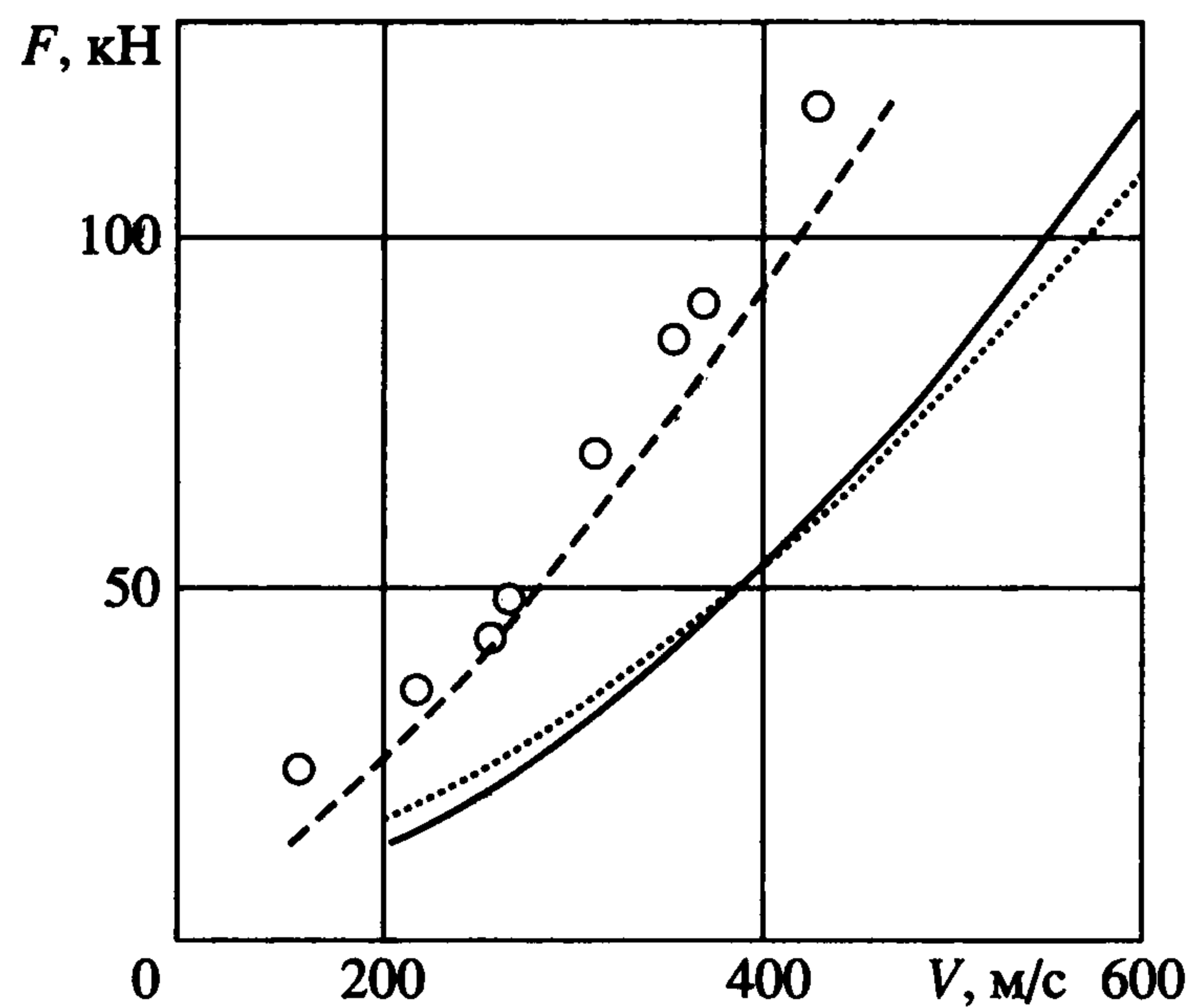
Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что начальная стадия процесса взаимодействия ударника с грунтом сопровождается образованием каверны, что подтверждает аналогичные выводы, полученные ранее [3, 8]. На фиг. 2 сплошной линией показана величина расчетной интегральной контактной силы, которая сравнивалась с результатами эксперимента, показанными светлыми точками. Отношение максимального значения сил к их значениям на квазистационарной стадии проникания равно приблизительно 2. Максимальные значения контактных сил в случае удара о грунт жесткого и упруго деформируемого ударников (предел текучести 1.8 ГПа) различаются не более чем на 5%. Образование пластических деформаций в стержне-ударнике с пределом текучести 0.3 ГПа (штрихпунктирная линия на фиг. 2) приводит к значительному снижению значения силы сопротивления, рассчитанной по продольным напряжениям в стержне, и заметным ошибкам в определении контактных сил.

На фиг. 3 приведены экспериментальные зависимости максимальных значений силы сопротивления (темные точки) и сил на квазистационарной стадии внедрения



Фиг. 4

(светлые точки). Сплошной линией 1 изображены максимумы сил сопротивления, рассчитанные по известной методике [3], штриховой линией 1 – результаты численных расчетов.

Для оценки сил на квазистационарной стадии воспользуемся полученными ранее результатами [3] для дозвукового движения тела при постоянной скорости внедрения

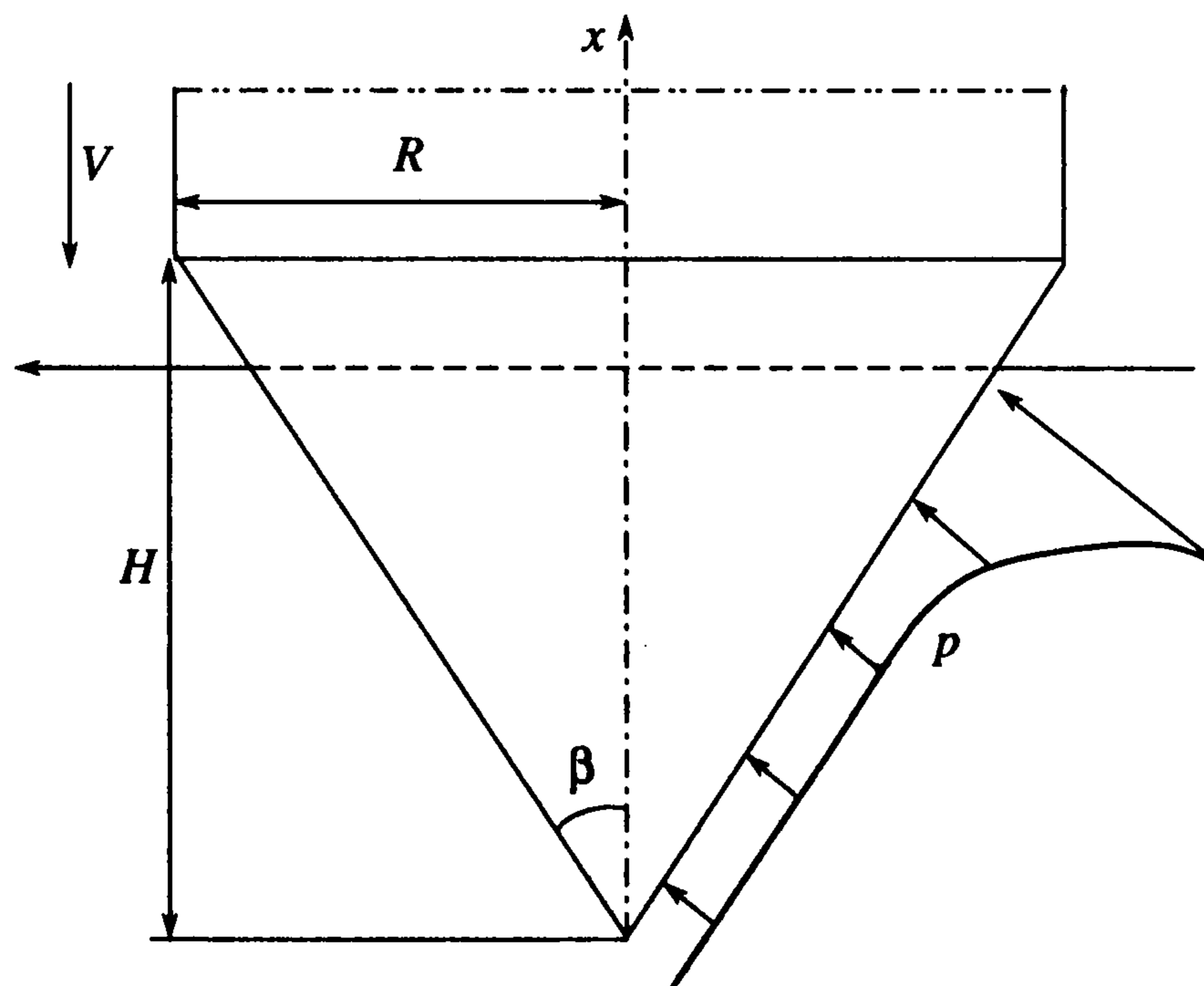
$$F = C_x(1 + 4\alpha l/d)S\rho_0 V^2/2 \quad (3.1)$$

Здесь  $l$  – расстояние миделева сечения до передней точки – вершины поверхности тела,  $d$  – диаметр поперечного сечения тела. При квазистационарном движении цилиндра с плоским торцом образуется область уплотненного грунта, движущаяся вместе с телом. В формуле (3.1) в качестве параметров  $l$  и  $d$  необходимо брать размеры уплотненной области. Если предположить, что уплотненное ядро имеет вид полусферы или оживала, то  $l = 1$ ,  $d = 2$  см. Остальные параметры определяются следующим образом:  $S = \pi d^2/4$ ,  $V$  – скорость внедрения тела. Сплошная линия 2 соответствует результатам, полученным по формуле (3.1) при  $C_x = 1$ , штриховая линия 2 соответствует численным расчетам. В диапазоне скоростей удара 100–600 м/с различие сил на квазистационарной стадии внедрения, полученных по данным эксперимента и численно, не превышает 15%.

В данной задаче сдвиговая прочность и необратимость объемных деформаций грунта практически не влияют на максимальные значения продольных напряжений в стержне-ударнике. Различие проявляется лишь с течением времени, на стадии развитого квазистационарного проникания и может достигать 100% [8]. Влияние учета сил трения скольжения грунта на поверхности ударника невелико, что объясняется малым радиальным смещением грунта на торце ударника и отсутствием взаимодействия с боковой поверхностью стержня, при кавитационном характере обтекания.

*Взаимодействие с грунтом полусферического ударника.* Численный расчет процесса взаимодействия с грунтом полусферического ударника также проводился в постановке, соответствующей обращенному эксперименту [8]. Предполагалось, что внедрение происходит с постоянной скоростью.

На фиг. 4 светлыми точками показаны экспериментальные данные – максимальные значения силы сопротивления внедрению в зависимости от скорости удара полусферического ударника, штриховой линией нанесены результаты численных расчетов. Видно удовлетворительное соответствие численных и экспериментальных



Фиг. 5

результатов в диапазоне скоростей 150...400 м/с, расхождение находится в пределах погрешности эксперимента (10...20%).

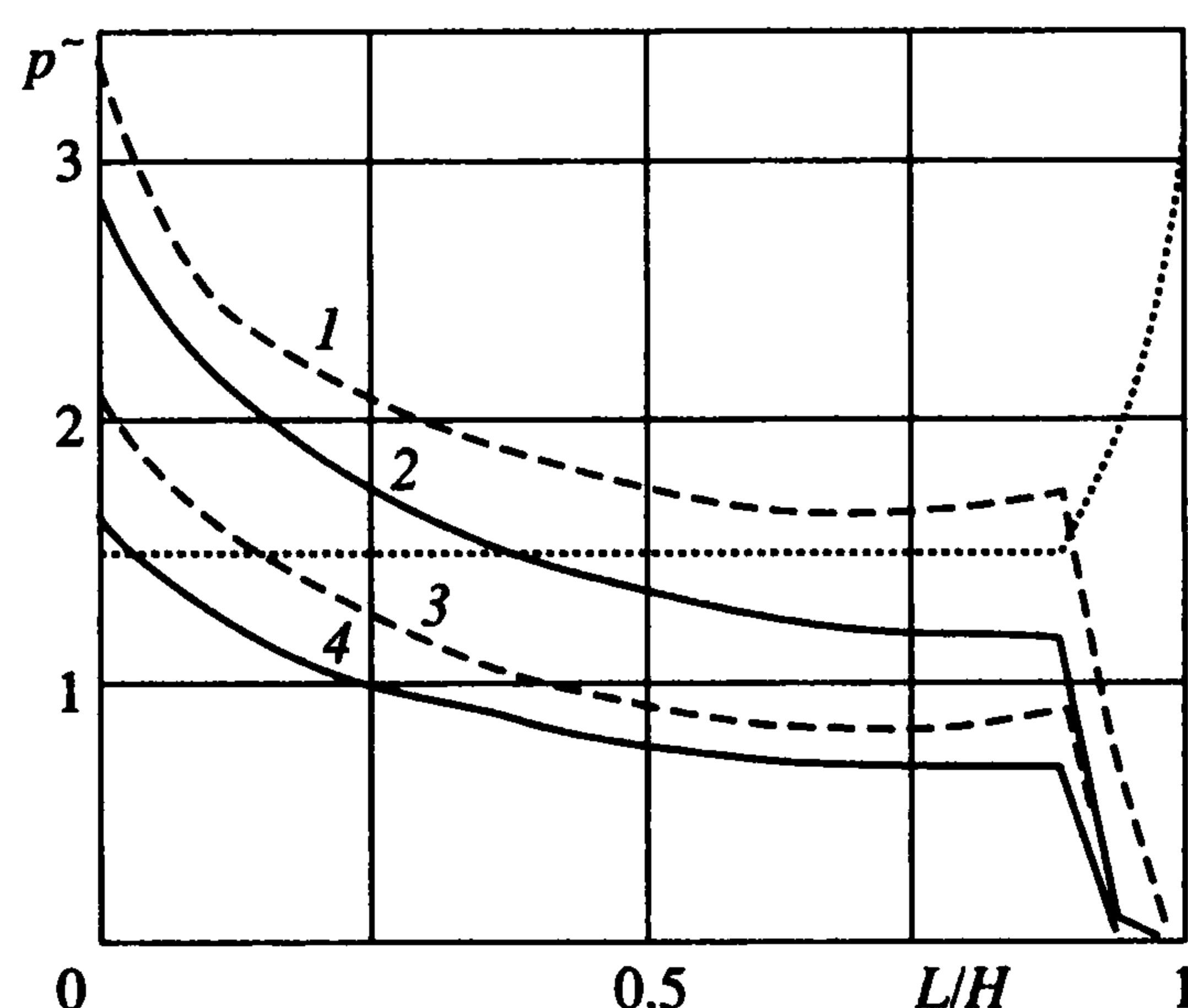
Для случая дозвукового движения в грунте тела с полусферическим оголовком значения сил на квазистационарной стадии также оценивались формулой (3.1). В экспериментах и численных расчетах наблюдался угол срыва потока, равный 60 ... 70 градусов. При этом значении угла расстояние миделева сечения до вершины тела приблизительно равно 0.5,  $d = 1.73$  см. Сплошной линией на фиг. 4 показаны силы на квазистационарной стадии внедрения, полученные по формуле (3.1) при  $C_x = 1$ , пунктиром представлены результаты численных расчетов. Хорошее соответствие численных и аналитических результатов подтверждает применимость приближенных формул [3] для оценки параметров квазистационарной стадии движения полусферических ударников.

Известно, что при движении затупленных тел в грунте пренебрежение сдвиговой прочностью приводит к уменьшению силы сопротивления в  $1/(1 + 4al/d) \sim 0.6$  раза [3]. В численных расчетах предположение об отсутствии сдвиговых свойств грунта приводит к снижению силы сопротивления приблизительно в 0.5–0.6 раза, что также подтверждается экспериментальными данными [8]. В отличие от случая внедрения ударника с плоским торцом при учете трения в численных расчетах максимальное значение силы сопротивления увеличивается на 15...20%. Значения сил на квазистационарной стадии внедрения увеличиваются на 5...10%. С ростом скорости внедрения (более 400 м/с) влияние трения скольжения на силу сопротивления уменьшается.

**Проникание в грунт цилиндрического ударника с коническим оголовком.** Схема задачи о вертикальном проникании в грунт конуса с произвольным углом при вершине  $2\beta$  приведена на фиг. 5. Рассматриваются главным образом переходные явления: удар о поверхность грунта и последующий начальный период проникания в грунт.

Ранее [12] вводились следующие допущения, при которых задача проникания конуса конечного раствора допускает аналитическое решение:

- 1) частицы грунта движутся по нормали к поверхности проникающего конуса;
- 2) за фронтом образующейся в грунте при проникании ударной волны плотность сохраняет достигнутое максимальное значение;
- 3) распределение давления вдоль контактной поверхности постоянно при изменении  $x$  от 0 до  $h \cos^2 \beta$  и нелинейно возрастает при  $x \in [h \cos^2 \beta, h]$ .



Фиг. 6

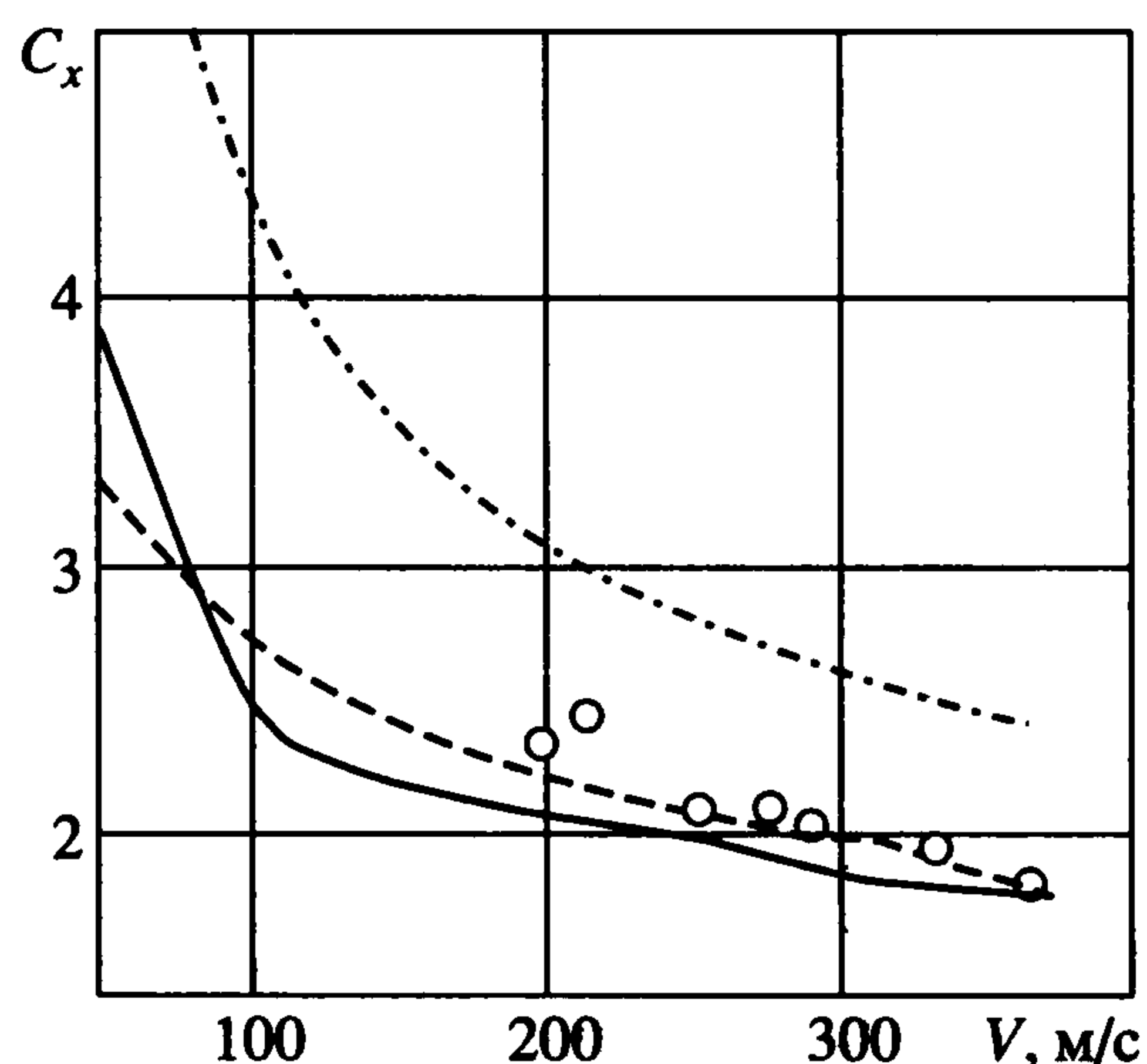
Здесь изменение  $x$  отсчитывается в направлении от вершины проникающего конуса,  $h$  – расстояние от вершины до свободной поверхности грунта (глубина проникания),  $\beta$  – угол полураствора конуса.

Для проверки этих гипотез был проведен численный анализ процесса проникания конического ударника в песчаный грунт.

Рассчитывались варианты проникания конуса массы 44 г с учетом падения скорости и проникание конуса в грунт с постоянной скоростью  $V = 225$  м/с,  $R = 1$  см,  $2\beta = 60^\circ$ . В первой серии расчетов не учитывалось трение скольжения частиц о поверхности конуса, во второй серии учет трения проводился по закону Кулона. В случае отсутствия трения движение частиц грунта происходит практически по нормали к контактной поверхности. Наличие трения приводит к отклонению траекторий частиц по направлению движения проникающего конуса. В дальнейших расчетах учитывалось трение скольжения. Значение коэффициента трения в процессе расчета оставалось постоянным и равным 0.3 [18].

Как показывают многочисленные эксперименты, разгрузка в реальном грунте близка к вертикальной только при больших давлениях порядка 1 ГПа. При уменьшении нагрузки существенно уменьшается и разгрузочный модуль. Теоретическая предпосылка о сохранении плотностью достигнутого максимального значения соответствует бесконечной (или достаточно большой) скорости волны разгрузки в грунте. Анализ влияния величины разгрузочного модуля на параметры процесса проникания проводился следующим образом. Рассчитывались варианты, в которых скорость волны разгрузки  $c_0$  при малом начальном давлении [18] была равна 200 и 2000 м/с.

Результаты сравнения представлены на фиг. 6 в виде распределения вдоль образующей конуса безразмерного контактного давления  $p^* = p/(\rho V^2/2)$ . Сплошными линиями показаны результаты расчетов с начальной скоростью разгрузки 200 м/с, штриховыми – при  $c_0 = 2000$  м/с. Кривые 1 и 2 соответствуют результатам расчетов внедрения конуса с постоянной скоростью  $V = 225$  м/с. Результаты расчета проникания конуса массы 44 г показаны кривыми 3, 4. Кривые представлены на момент времени  $2t^*$ , ( $t^* = H/V$ ). Видно, что влияние разгрузки на распределение контактного давления в большей степени сказывается при движении с постоянной скоростью (кривые 1 и 2). Максимальное значение при выбранных параметрах (угол раствора, скорость проникания, тип грунта) достигается в окрестности вершины конуса. Разгружающее действие свободной поверхности распространяется на узкий приповерхностный слой. Таким образом, высказанное ранее предположение [12] о наличии максимума



Фиг. 7

контактного давления на пересечении конуса со свободной поверхностью, показанное на фиг. 6 пунктирной линией, оказывается неверным. Постоянное значение безразмерного контактного давления получено по формуле [12]

$$p = \frac{2 \sin^2 \beta}{b} \left[ b a^{v/2} - \frac{a^{v/2-1} - 1}{v-2} + \frac{a^{v/2} - 1}{v} \right] S \quad (3.2)$$

$b = \frac{\rho_0}{\rho}$ ,  $\rho$  – плотность на ударной волне (УВ),  $a = \frac{1}{1-b}$ ,  $v = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$ ,  $S = \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \beta$ , угол внутреннего трения  $\varphi = 30^\circ$ .

Ранее [12] давление на УВ рассчитывалось по формуле

$$p = \rho_0 \operatorname{tg}^2 \beta V^2 \quad (3.3)$$

и далее, с использованием уравнения состояния грунта типа (1.3), вычислялась соответствующая плотность, используемая в выражении (3.2). Коэффициент сопротивления определялся отношением давления (3.2) к площади поперечного сечения конуса. В численных решениях задачи значение коэффициента сопротивления вычислялось по формуле

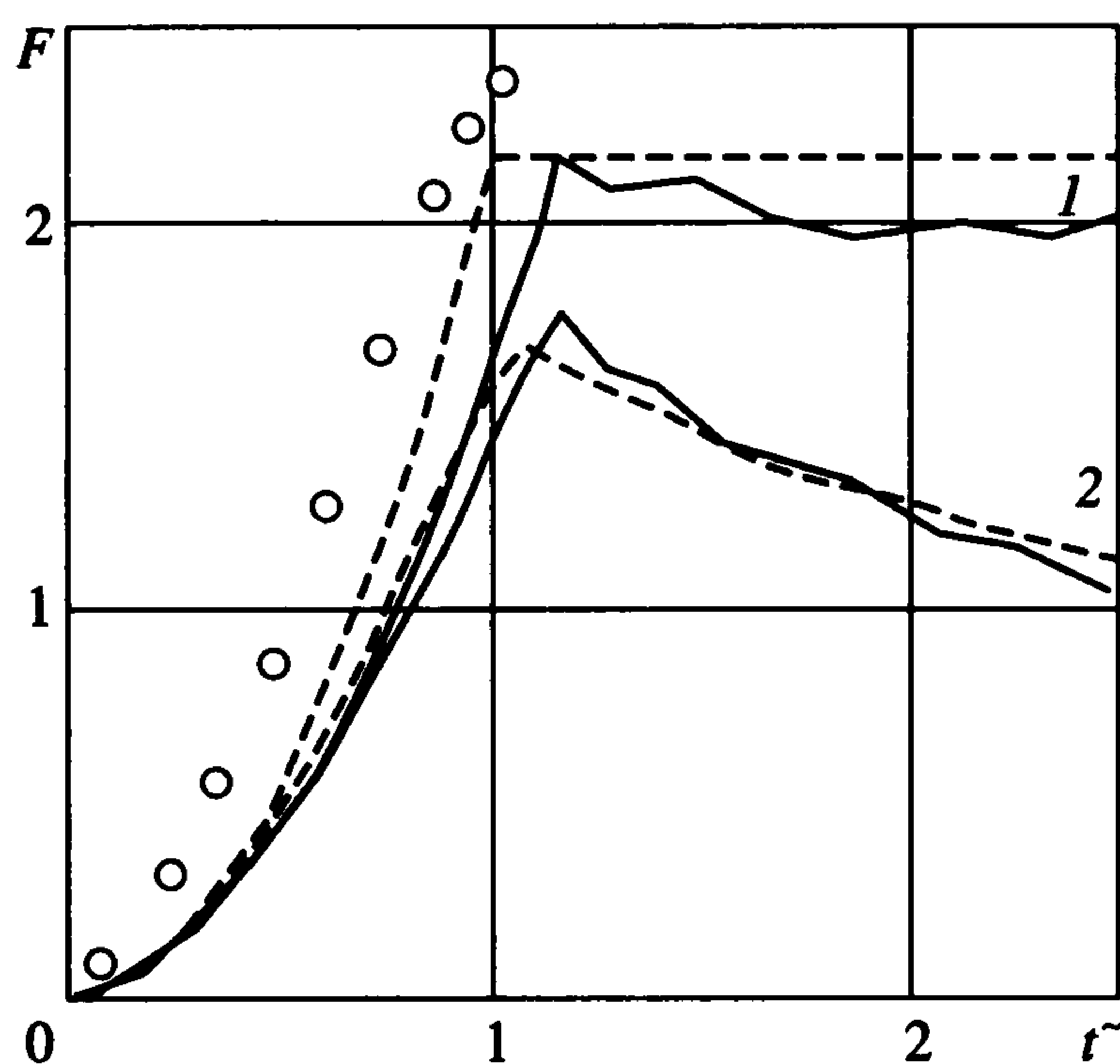
$$C_x = F(t) \left( \frac{1}{2} \rho_0 V^2(t) \pi r^2(t) \right)^{-1} \quad (3.4)$$

где  $F(t)$  – численное значение силы сопротивления внедрению конуса в грунт,  $r$  – радиус поперечного сечения заглубленной части конуса. При внедрении на глубину  $H$  и далее площадь поперечного сечения остается постоянной ( $r(t) = \operatorname{const} = R$ ).

На фиг. 7 приведены зависимости коэффициента сопротивления внедрению от скорости проникания. Штрихпунктиром показаны аналитические решения, полученные по формулам (3.2), (3.3), сплошной линией – результаты численных расчетов, светлыми точками – результаты обращенного эксперимента. Для всего исследованного диапазона скоростей удара численные и аналитические [12] результаты значительно различаются, особенно при скоростях удара менее 100 м/с.

Аналитическое решение можно уточнить, если плотность на фронте ударной волны  $\rho$  определять с учетом нелинейности диаграммы сжатия грунта из решения задачи о распаде произвольного разрыва [21]. Значение скорости  $U$  контактного разрыва (КР) определяется из уравнения

$$(U - u_0)^2 = (\sigma - \sigma_0) \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (3.5)$$



Фиг. 8

где  $u_0$  – скорость,  $\sigma_0$  – напряжение перед фронтом волны. В начальный момент проникания  $u_0 = \sigma_0 = 0$ . Если допустить, что частицы грунта движутся по нормали к поверхности проникающего конуса, то скорость КР определится выражением  $U = V \sin^2 \beta$ , уравнение (3.5) преобразуется к виду

$$\sigma(\rho)(1/\rho - 1/\rho_0) = V^2 \sin^2 \beta \quad (3.6)$$

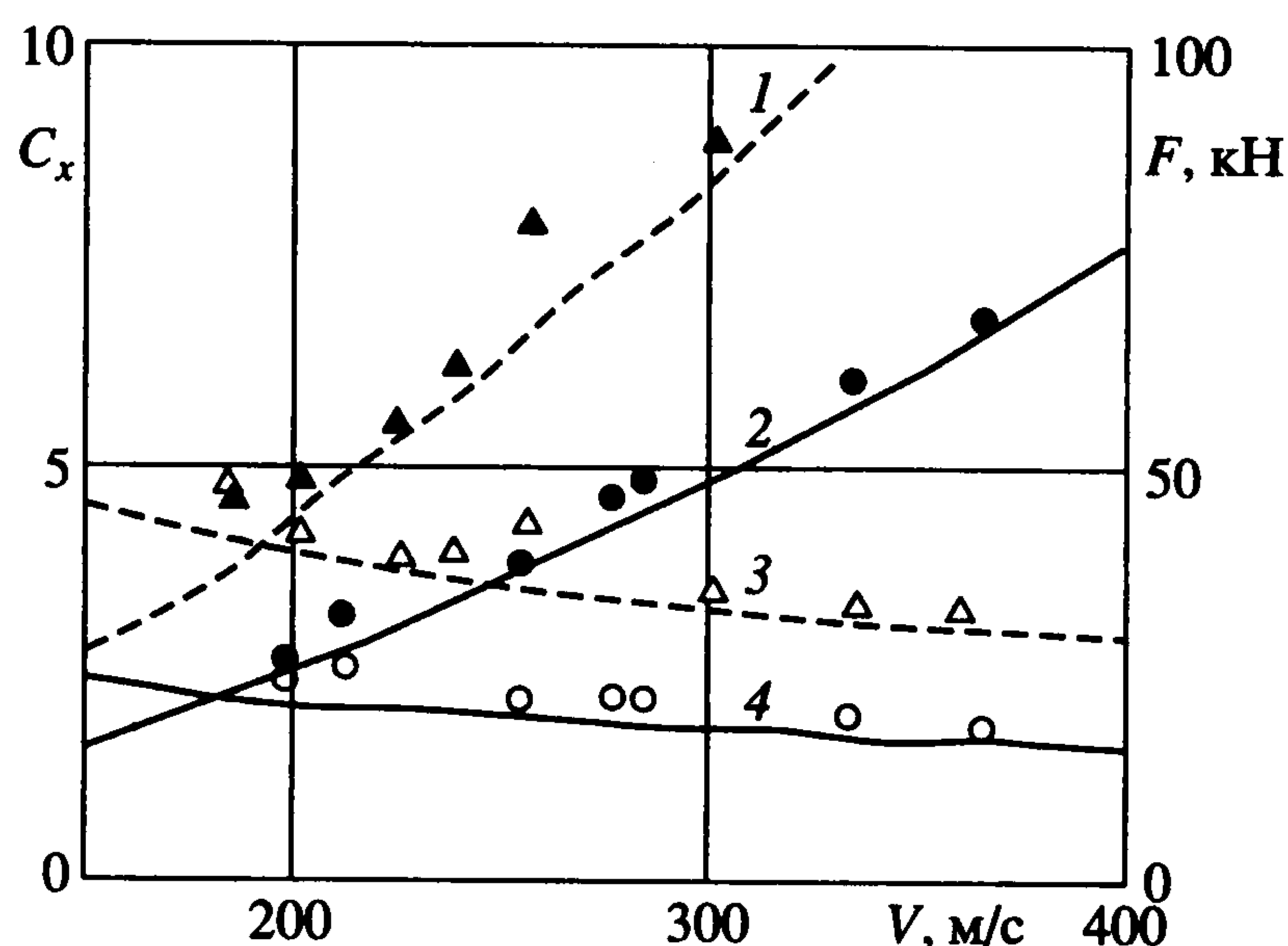
При известной зависимости напряжения от плотности

$$\sigma(\rho) = -p(\rho) - \frac{4}{3}G \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

из уравнения (3.5) значение плотности может быть вычислено методом Ньютона с учетом зависимости предела текучести от давления (2.5). При таком способе расчета коэффициента сопротивления аналитические результаты (штриховая кривая на фиг. 7) лучше соответствуют численным и экспериментальным данным.

На фиг. 8 представлены зависимости безразмерной силы сопротивления внедрению от безразмерного времени (значение силы отнесено к  $1/2\rho V^2 \pi R^2$ , времени – к  $t^*$ ). Обозначения те же, что на фиг. 7. Кривые 1 соответствуют постоянной скорости внедрения, кривые 2 получены с учетом падения скорости при движении тела массой 44 г. Расчеты, проведенные без учета трения скольжения, привели к уменьшенному в  $(1 + \operatorname{ctg} \beta) k_{mp} \approx 1.5$  раза значению силы.

Сравнение результатов численных расчетов максимальной силы  $F$  (кривые 1 и 2), коэффициента сопротивления  $C_x$  (кривые 3, 4) и экспериментов в зависимости от скорости удара  $V$  в диапазоне 150...400 м/с показано на фиг. 9 для конусов с углом раствора  $2\beta = 60^\circ$  (расчетные данные изображены сплошными линиями, данные эксперимента – светлыми и темными кружками) и для конуса с углом раствора  $100^\circ$  (расчетные данные изображены штриховыми линиями, а данные эксперимента нанесены светлыми и темными треугольниками). Кривые 1, 3 построены при следующих значениях параметров:  $2\beta = 100^\circ$ , кривые 2, 4 – при  $2\beta = 60^\circ$ . Экспериментальные данные: светлые кружки – коэффициент сопротивления, темные кружки – сила сопротивления внедрению конуса с углом раствора  $2\beta = 60^\circ$ , светлые треугольники – коэффициент сопротивления, темные треугольники – сила сопротивления внедрению конуса с углом раствора  $2\beta = 100^\circ$ .



Фиг. 9

Авторы благодарят А.К. Ломунова и В.В. Баландина за проведение экспериментов, а также С.В. Крылова за участие в проведении расчетов и обсуждение результатов.

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1136.2003.8), при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00556, 02-01-00594) и Минобразования РФ (PD02-2.10-4, E00-4.0-85).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
2. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1072.
3. Григорян С.С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 4. С. 18–24.
4. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Под ред. Н.А. Златина и Г.И. Мишина. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. Аллен У., Мэйфилд Э., Моррисон Г. Динамика проникания снаряда в песок // Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1957. № 6. С. 125–137.
6. Forrestal M.J., Lee L.M., Jenrette B.D., Seatchell R.E. Gas-gun experiments determine forces on penetrators into geological targets // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 602–607.
7. Бухарев Ю.Н., Гандурин В.П., Кораблев А.Е., Моротов В.А., Хаймович М.И. Экспериментальное исследование проникания недеформируемого ударника в глинистую среду и снег // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1991. Вып. 48. С. 99–106.
8. Баженов В.К., Котов В.Л., Крылов С.В., Баландин В.В., Брагов А.М., Цветкова Е.В. Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 6. С. 190–198.
9. Рыков Г.В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте // ПМТФ. 1964. № 1. С. 85–89.
10. Лагунов В.А., Степанов В.А. Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях // ПМТФ. 1963. № 1. С. 88–96.

11. *Вовк А.А., Замышляев Б.В., Евтерев Л.С. и др.* Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
12. *Сагомонян А.Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
13. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Мир, 1976. 400 с.
14. *Кириленко Г.А., Сагомонян А.Я.* Численное моделирование проникания в грунт // Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. № 1. С. 47–51.
15. *Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В.* Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникании тел в сжимаемую жидкость // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 2. С. 125–127.
16. *Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Угодчиков А.Г.* Высокоскоростной удар упругопластических тонкостенных конструкций о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 161–169.
17. *Баженов В.Г., Козлов Е.А., Крылов С.В.* Численное моделирование нелинейных двумерных задач ударного взаимодействия деформируемых сред и конструкций на основе метода С.К. Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций: Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. Вып. 45. С. 99–106.
18. *Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Исследование волновых процессов в грунтовой среде при взрыве накладного заряда. // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 70–77.
19. *Баженов В.Г., Зефиоров С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Пакет программ “Динамика-2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 67–72.
20. *Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Зефиоров С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Ломунов А.К.* Анализ применимости модифицированного метода Кольского для динамических испытаний грунтовых сред в деформируемой обойме // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 3. С. 155–162.
21. *Котов В.Л.* Решение нелинейной задачи о распаде разрывов волн в мягких грунтовых средах // Вестник Нижегород. ун-та. Сер. Механика. 2000. Вып. 1. С. 135–144.