

УДК 539.3 : 534.1

© 2003 г. Э. Скарпетта, М. А. Сумбатян

ОДНОМОДОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ПРОХОЖДЕНИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ СРЕДУ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДЕФЕКТОВ

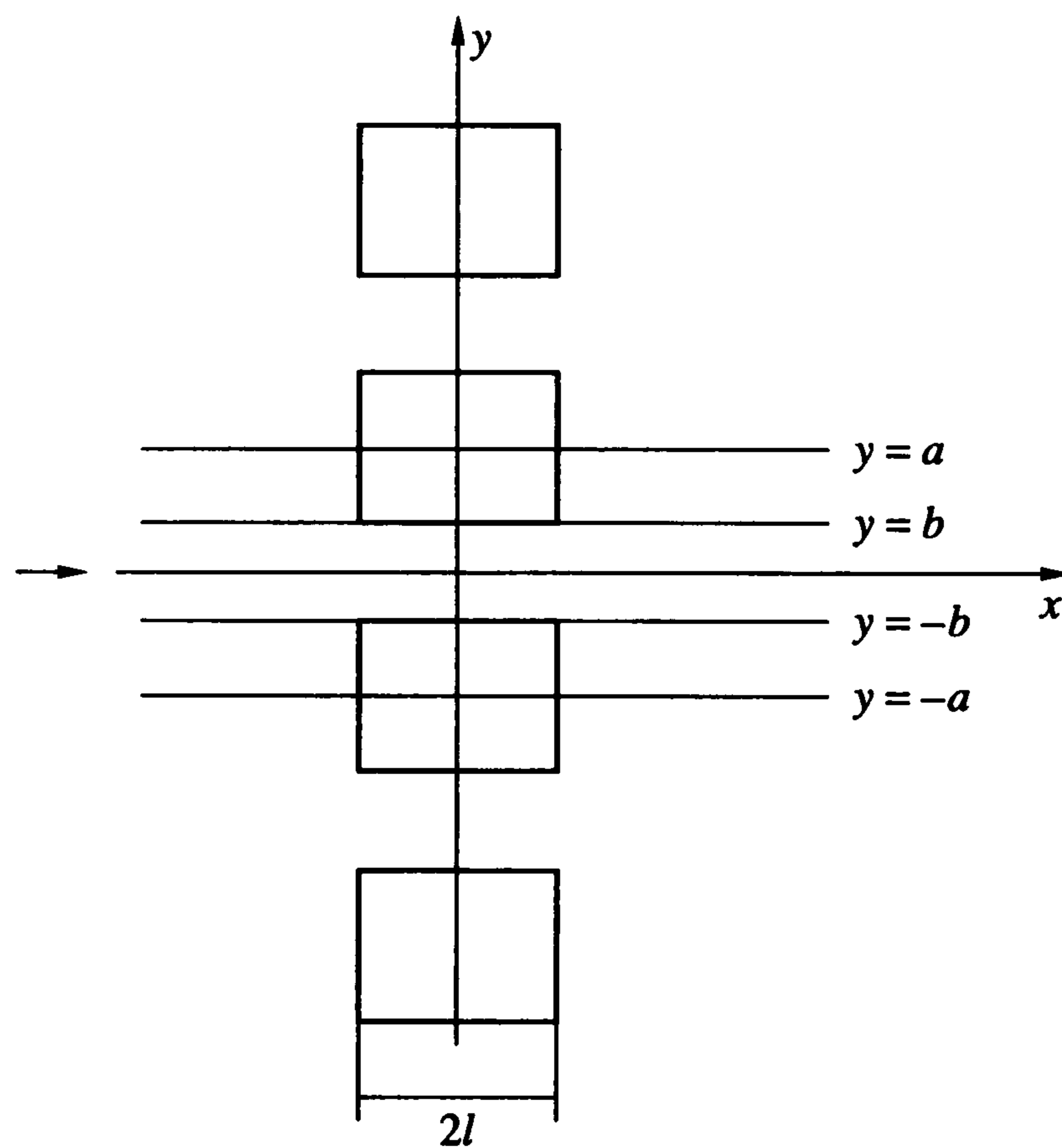
Предложенный авторами подход [1, 2] применяется к задаче о прохождении плоской продольной волны через упругую среду, содержащую периодическую систему прямоугольных дефектов. При помощи равномерной аппроксимации одномодового типа построены явные аналитические представления для коэффициентов рассеяния, а также уточненное низкочастотное решение. Приводится сравнение результатов с решениями, полученными другими методами.

Ранее [1, 2] авторы применили аналитический подход к решению задачи рассеяния как поперечной, так и продольной волны на периодической решетке прямоугольных препятствий. В проблеме прохождения волны через упругую среду с регулярно распределенными системами дефектов применение аналитических методов затруднено, поэтому подобные задачи исследовались, в основном, численно путем сведения к бесконечным системам алгебраических уравнений [3, 4]. Следует также отметить, что решетка периодических прямоугольных дефектов в двумерной среде эквивалентна экрану конечной толщины с периодической системой отверстий.

Антиплоская задача о прохождении SH -волны была сведена [1] к двум независимым интегральным уравнениям на отверстиях и затем с помощью аппроксимации, справедливой в одномодовом частотном диапазоне, получены формулы для параметров рассеяния в явной зависимости от частоты. Исследовался [2] более сложный и ранее не изучавшийся случай плоской задачи для так называемой волны P -типа; здесь задача свелась к двум 3×3 системам интегральных уравнений вдоль отрезков, совпадающих со сторонами прямоугольного отверстия, решение которой позволило бы дать полное аналитическое представление для рассеянного волнового поля. К этой системе был применен лишь прямой численный метод, что позволило получить численные значения всех характеристик рассеяния [2].

Данная работа нацелена на получение аналитических результатов в рассматриваемой плоской задаче с прямоугольными рассеивателями в упругой среде. С использованием интегральных уравнений, выведенных ранее [2], предложенный одномодовый метод (развитый в [5] для совершенно другой задачи) получает здесь дальнейшее развитие, что позволяет вывести явные формулы для соответствующих механических характеристик, как это было сделано [1] для антиплоского случая. Кроме того, дается улучшенная аппроксимация в низкочастотном случае, более точная, чем полученное ранее тривиальное представление ([2], разд. 4). Приводятся результаты числовых расчетов как для рассматриваемой здесь задачи одномодового приближения, так и в низкочастотном приближении. Эти результаты сравниваются с точным численным решением, построенным ранее [2].

1. Формулировка задачи и сведение к интегральным уравнениям. Рассмотрим неограниченную двумерную упругую среду (случай плоской деформации) постоянной единичной плотности с бесконечной системой прямоугольных дефектов, расположенных периодически вдоль направления вертикальной оси y (фиг. 1). Период решетки – $2a$, просвет, т.е. расстояние между двумя соседними дефектами – $2b$, длина горизонтальной стороны дефектов – $2l$. На решетку падает плоская продольная вол-



Фиг. 1

на с потенциалом перемещений $\varphi_{inc} = e^{ik_1x}$, распространяющаяся вдоль оси x (см. фиг. 1, на которой направление распространения волны показано стрелкой).

Предполагая, что зависимость от времени всех волновых характеристик является гармонической, можно опустить общий множитель $e^{-i\omega t}$ (ω – круговая частота), подразумеваемый во всех входящих в решение задачи функциях. Заметим также, что естественная симметрия и периодичность вдоль оси y позволяют ограничить рассмотрение проблемы одним типичным слоем $|y| < a$ с сужением в виде ступеньки шириной $|y| < b$ и длиной $2l$.

Вводя поле перемещений $\mathbf{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$, запишем определяющие уравнения задачи:

соотношения Ламе

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

уравнения Гельмгольца

$$\Delta \varphi + k_1^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + k_2^2 \psi = 0 \quad (1.2)$$

уравнения состояния

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = c_2^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_x = c_1^2 \Delta \varphi - 2c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma_y = c_1^2 \Delta \varphi - 2c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)$$

к которым добавим следующие естественные граничные условия, выполняющиеся внутри слоя:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(\pm l, y) = \sigma_x(\pm l, y) = 0, \quad b < |y| < a \\ \tau_{xy}(x, \pm b) = \sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad |x| < l; \quad \tau_{xy}(x, \pm a) = u_y(x, \pm a) = 0, \quad |x| > l \end{aligned} \quad (1.4)$$

Во всех этих уравнениях c_1, c_2 – соответственно продольная и поперечная скорости звука в рассматриваемом материале, k_1, k_2 – соответствующие волновые числа ($k_1 = \omega/c_1 = k_2 c_2/c_1$). В данном контексте одномодовое приближение соответствует частотному диапазону

$$k_1 < k_2 < \pi/a \quad (1.5)$$

и означает, что, хотя в среде существует бесконечное число стоячих волн в окрестности решетки, на больших расстояниях может распространяться лишь плоская волна с заданным волновым числом, соответствующим скорости продольной волны в данной среде. В самом деле, для модового разложения [2] ввиду положительности всех волновых чисел высшего порядка имеет место следующее асимптотическое представление для потенциалов ϕ и ψ в дальней левой и правой зонах слоя:

$$\begin{aligned} \phi_l(x, y) \sim e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x}, \quad \psi_l(x, y) \sim 0, \quad x \rightarrow -\infty \\ \phi_r(x, y) \sim T e^{ik_1 x}, \quad \psi_r(x, y) \sim 0, \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Постоянные R и T , очевидно, определяют коэффициент отражения и коэффициент прохождения. Цель работы – построение явной зависимости этих коэффициентов от частоты.

Из полученных ранее результатов ([2], разд. 3) следует, что

$$R = -1 - \frac{1}{2ac_1^2 k_{1-b}^2} \int_{-b}^b g_1^\sigma(y) dy, \quad T = -\frac{1}{2ac_1^2 k_{1-b}^2} \int_{-b}^b g_2^\sigma(y) dy \quad (1.6)$$

где $g_1^\sigma(y)$ и $g_2^\sigma(y)$, $|y| < b$ – некоторые неизвестные функции, являющиеся решением двух 3×3 систем интегральных уравнений.

Положим для удобства

$$g_1^\pm(y) = g_2^\sigma(y) \pm g_1^\sigma(y), \quad g_2^\pm(y) = g_2^\tau(y) \mp g_1^\tau(y), \quad |y| < b, \quad g_3^\pm(x) = g_u^\pm(x), \quad |x| < l \quad (1.7)$$

где физический смысл введенных функций вытекает из следующих определений:

$$\begin{aligned} g_1^\sigma(y) \equiv \sigma_x(-l, y), \quad g_2^\sigma(y) \equiv \sigma_x(l, y), \quad g_1^\tau(y) \equiv \tau_{xy}(-l, y), \quad g_2^\tau(y) \equiv \tau_{xy}(l, y) \\ g_u^\pm(x) \equiv \frac{1}{2}[u_y(x, b) \pm u_y(-x, b)] \end{aligned}$$

Тогда обе рассматриваемые системы (одна – с верхним, другая – с нижним знаком) могут быть записаны в виде (δ_{ij} – символ Кронекера)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1-b}^2 \int_{-b}^b K_{jj}^\pm(\eta - y) g_j^\pm(\eta) d\eta + \int_{-l}^l K_{j3}^\pm(\xi, y) g_3^\pm(\xi) d\xi = \mp 2ik_1 \delta_{1j}, \quad |y| < b, \quad j = 1, 2 \\ \sum_{j=1-b}^2 \int_{-b}^b K_{3j}^\pm(x, \eta) g_j^\pm(\eta) d\eta + \int_{-l}^l K_{33}^\pm(x, \xi) g_3^\pm(\xi) d\xi = 0, \quad |x| < l \end{aligned} \quad (1.8)$$

При этом две девятки ядер, содержащих волновые числа, таковы:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{\pm}(y) &= \frac{1}{2abk_1c_1^2} \left[\pm a \begin{Bmatrix} \text{tg} \\ \text{ctg} \end{Bmatrix} (k_1l) + ib \right] - \frac{k_2^2}{ac_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \cos(a_n y) - \frac{k_2^2}{bc_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^+}{\Pi_n^{\pm}} \begin{Bmatrix} S_n \\ C_n \end{Bmatrix} \cos(b_n y) \\
 K_{12}^{\pm}(y) &= \frac{1}{ac_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n^2 - k_2^2 - 2q_n r_n}{\Delta_n} a_n \sin(a_n y) + \frac{1}{bc_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n R_n^{\pm}}{\Pi_n^{\pm}} \sin(b_n y) \\
 K_{13}^{\pm}(x, y) &= \frac{2c_2^2 - c_1^2}{bc_1^2 \cos(k_1 l)} \begin{Bmatrix} \cos(k_1 x) \\ 0 \end{Bmatrix} \mp \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Pi_n^{\pm}} \begin{Bmatrix} S_n L_n(x) \\ \frac{2p_n^{+2} + k_2^2}{k_2^2} b_n^2 R_n^- T_n(x) \end{Bmatrix} \cos(b_n y) + \\
 &+ \frac{2}{lk_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n l_n \left[\frac{2w_n \text{ch}(w_n y)}{\text{sh}(w_n b)} - \frac{(2l_n^2 - k_2^2) \text{ch}(v_n y)}{v_n \text{sh}(v_n b)} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin(l_n x) \end{Bmatrix} \\
 K_{21}^{\pm}(y) &= K_{12}^{\pm}(y) \\
 K_{22}^{\pm}(y) &= \frac{k_2^2}{ac_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\Delta_n} \cos(a_n y) + \frac{k_2^2}{bc_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^-}{\Pi_n^{\pm}} \begin{Bmatrix} C_n \\ S_n \end{Bmatrix} \cos(b_n y) \\
 K_{23}^{\pm}(x, y) &= \frac{2}{lk_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[(2l_n^2 - k_2^2) \frac{\text{sh}(v_n y)}{\text{sh}(v_n b)} - 2l_n^2 \frac{\text{sh}(w_n y)}{\text{sh}(w_n b)} \right] \begin{Bmatrix} \cos(l_n x) \\ 0 \end{Bmatrix} - \\
 &- \begin{Bmatrix} \frac{\sin(k_1 y)}{l \sin(k_1 b)} \\ 0 \end{Bmatrix} \mp \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{\Pi_n^{\pm}} \begin{Bmatrix} \frac{R_n^+ L_n(x)}{k_2^2} \\ p_n^- (2p_n^{+2} + k_2^2) S_n T_n(x) \end{Bmatrix} \sin(b_n y) \tag{1.9} \\
 K_{31}^+(x, y) &= \frac{K_{13}^+(x, y)}{4c_2^2} \\
 K_{31}^-(x, y) &= \frac{1}{2bc_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Pi_n^-} U_n^-(x) \cos(b_n y) - \frac{2c_2^2 - c_1^2}{4bc_1^2 c_2^2} \frac{\sin(k_1 x)}{\sin(k_1 l)} \\
 K_{32}^{\pm}(x, y) &= \frac{1}{bc_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Pi_n^+} Q_n^{\pm}(x) p_n^- b_n \sin(b_n y) \\
 K_{33}^{\pm}(x, \xi) &= \left\{ \frac{k_2 c_1}{2lc_2} \text{ctg}(k_1 b) - \frac{(2c_2^2 - c_1^2)^2 k_1}{bc_1^2 c_2^2 \sin(2k_1 l)} \cos[k_1(x - \xi)] \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{lk_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[4l_n^2 w_n \operatorname{cth}(w_n b) - \frac{(2l_n^2 - k_2^2)^2}{v_n} \operatorname{cth}(v_n b) \right] \cos[l_n(x - \xi)] +$$

$$+ \frac{2}{bk_{2n=1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Pi_n^{\pm}} \left\{ \frac{U_n^+(x)L_n(\xi)}{\frac{2b_n^2 p_n^-}{k_2^2} (2p_n^{+2} + k_2^2) Q_n^-(x) T_n(\xi)} \right\}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S_n \\ C_n \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{Bmatrix} (p_n^+ l) \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{Bmatrix} (p_n^- l) \\ R_n^{\pm} &= 2p_n^+ p_n^- \operatorname{sh}(p_n^{\pm} l) \operatorname{ch}(p_n^{\mp} l) - (2b_n^2 - k_2^2) \operatorname{ch}(p_n^{\pm} l) \operatorname{sh}(p_n^{\mp} l) \\ Q_n^{\pm}(x) &= (2b_n^2 - k_2^2) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^+ l) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^- x) - (2b_n^2 + k_2^2) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^- l) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^+ x) \\ U_n^{\pm}(x) &= 4b_n^2 p_n^+ p_n^- \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{Bmatrix} (p_n^+ l) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^- x) - (2b_n^2 - k_2^2) (2p_n^{+2} + k_2^2) \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{Bmatrix} (p_n^- l) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{Bmatrix} (p_n^+ x) \\ L_n(x) &= \frac{2b_n^2 p_n^+ p_n^-}{\operatorname{sh}(p_n^- l)} \operatorname{ch}(p_n^- x) - \frac{(2b_n^2 - k_2^2) (2p_n^{+2} + k_2^2)}{2 \operatorname{sh}(p_n^+ l)} \operatorname{ch}(p_n^+ x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$T_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(p_n^- x)}{\operatorname{sh}(p_n^- l)} - \frac{\operatorname{sh}(p_n^+ x)}{\operatorname{sh}(p_n^+ l)}$$

$$a_n = \frac{\pi n}{a}, \quad b_n = \frac{\pi n}{b}, \quad l_n = \frac{\pi n}{l}, \quad q_n = \sqrt{a_n^2 - k_1^2}, \quad r_n = \sqrt{a_n^2 - k_2^2}, \quad p_n^+ = \sqrt{b_n^2 - k_1^2}$$

$$p_n^- = \sqrt{b_n^2 - k_2^2}, \quad v_n = \sqrt{l_n^2 - k_1^2}, \quad w_n = \sqrt{l_n^2 - k_2^2}, \quad \Delta_n = (2a_n^2 - k_2^2)^2 - 4a_n^2 q_n r_n$$

$$\Pi_n^{\pm} = (2b_n^2 - k_2^2)^2 \operatorname{ch}(p_n^{\pm} l) \operatorname{sh}(p_n^{\mp} l) - 4b_n^2 p_n^+ p_n^- \operatorname{sh}(p_n^{\pm} l) \operatorname{ch}(p_n^{\mp} l); \quad n = 1, 2, \dots$$

2. Одномодовое приближение и явные представления. Применим к ядрам (1.9) приближение, при котором они окажутся представленными в виде, не содержащем волновых чисел. В этой связи предположим, что: 1) $l \leq a$, т.е. длина прямоугольников не превосходит периода решетки, 2) в области частот, определяемых уравнением (1.5), справедливы следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} q_n \approx r_n \approx a_n, \quad p_n^{\pm} \approx b_n, \quad v_n \approx w_n \approx l_n, \quad q_n r_n \approx a_n^2 - (k_1^2 + k_2^2)/2 \\ p_n^+ p_n^- \approx b_n^2 - (k_1^2 + k_2^2)/2, \quad v_n w_n \approx l_n^2 - (k_1^2 + k_2^2)/2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

совпадающие с главными членами асимптотики соответствующих выражений при больших n . Отсюда следуют соотношения

$$\Delta_n \approx 2a_n^2(k_1^2 - k_2^2), \quad \Pi_n^{\pm} \approx 2b_n^2(k_1^2 - k_2^2) \operatorname{sh}(b_n l) \operatorname{ch}(b_n l), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

а также аналогичные асимптотические приближения для всех других выражений, входящих в ядра. В качестве примера приведем лишь два из них

$$4l_n^2 w_n \operatorname{cth}(w_n b) - \frac{(2l_n^2 - k_2^2)^2}{v_n} \operatorname{cth}(v_n b) \approx 2(k_2^2 - k_1^2) l_n \operatorname{cth}(l_n b) \quad (2.3)$$

$$U_n^\pm(x) \approx 2b_n^2 (k_1^2 - k_2^2) \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{array} \right\} (b_n l) \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{array} \right\} (b_n x)$$

Заметим, что в стандартном одномодовом приближении соотношения (2.1) справедливы лишь для $n \geq 2$, а для случая $n = 1$ должны быть сохранены в точном виде. Однако приближение (2.1) точнее, чем обычное низкочастотное приближение, и не сводится к последнему, поскольку, например, для $ak_2 = \pi/4$ имеем $r_1/a_1 = \sqrt{1 - (ak_2/\pi)^2} = 0.968$. Поэтому рассматриваемое в данной работе приближение следовало бы назвать "почти одномодовое", однако для простоты сохраняем традиционный термин "одномодовое приближение".

С учетом принятых аппроксимаций обе 3×3 системы удастся свести к виду, в котором ядра свободны от частотных параметров k_1 и k_2 . Для этого надо использовать следующие табличные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(a_n y)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\pi y}{2a} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a_n y) - \sin(b_n y)}{n} = \frac{\pi(a-b)}{2ab} y, \quad |y| < 2a \quad (2.4)$$

В результате рассматриваемые системы в данном одномодовом приближении сводятся к виду (во всех уравнениях $|y| < b$, $|x| < l$)

$$\begin{aligned} & \frac{c_1^2}{2\pi c_2^2 (c_2^2 - c_1^2)} \int_{-b}^b g_1^\pm(\eta) \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\pi(\eta - y)}{2a} \right| - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[b_n(\eta - y)]}{n} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{th} \\ \operatorname{cth} \end{array} \right\} (b_n l) \right] d\eta + \frac{a-b}{4ab(c_2^2 - c_1^2)} \int_{-b}^b g_2^\pm(\eta)(\eta - y) d\eta - \\ & - \left\{ \begin{array}{c} \frac{2}{b} \\ \frac{2c_2^2}{lc_1^2} \end{array} \right\} \int_{-l}^l g_3^\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \begin{array}{c} \frac{\operatorname{ch}(b_n \xi) \cos(b_n y)}{\operatorname{ch}(b_n l)} \\ \frac{\operatorname{ch}(l_n y) \sin(l_n \xi)}{\operatorname{sh}(l_n b)} \end{array} \right\} d\xi = \mp 2ik_1 - \frac{1}{2abk_1 c_1^2} \left[ib \pm \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{tg} \\ \operatorname{ctg} \end{array} \right\} (k_1 l) \right] G_\sigma^\pm + \\ & + \frac{(2c_2^2 - c_1^2)}{bc_1^2 \operatorname{ctg}(k_1 l)} \left[\frac{k_1}{2l} \left\{ \begin{array}{c} G_{u2}^+ \\ 0 \end{array} \right\} - \chi \left\{ \begin{array}{c} G_u^+ \\ 0 \end{array} \right\} \right] \quad (2.5) \\ & \frac{(a-b)}{4ab(c_2^2 - c_1^2)} \int_{-b}^b g_1^\pm(\eta)(\eta - y) d\eta - \frac{c_1^2}{2\pi c_2^2 (c_2^2 - c_1^2)} \int_{-b}^b g_2^\pm(\eta) \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\pi(\eta - y)}{2a} \right| - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[b_n(\eta - y)]}{n} \left\{ \begin{array}{l} \text{cth} \\ \text{th} \end{array} \right\} (b_n l) \Big] d\eta + \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array} \right\} \int_{-l}^l g_3^{\pm}(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \\
 & \times \left[\frac{c_2^2 \text{ch}(b_n \xi)}{bc_1^2 \text{sh}(b_n l)} \sin(b_n y) - \frac{\text{sh}(l_n y)}{l \text{sh}(l_n b)} \cos(l_n \xi) \right] d\xi = \left(\frac{y}{lb} + \frac{2k_1^2}{\pi l p_1^2} \sin \frac{\pi y}{b} \right) \left\{ \begin{array}{l} G_u^+ \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-b}^b g_1^{\pm}(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(b_n \eta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{ch}(b_n x)}{\text{ch}(b_n l)} \\ \frac{\text{sh}(b_n x)}{\text{sh}(b_n l)} \end{array} \right\} d\eta + 2 \int_{-b}^b g_2^{\pm}(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(b_n \eta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{ch}(b_n x)}{\text{sh}(b_n l)} \\ \frac{\text{sh}(b_n x)}{\text{ch}(b_n l)} \end{array} \right\} d\eta + \\
 & + \frac{4c_2^2(c_1^2 - c_2^2)^l}{lc_1^2} \int_{-l}^l g_3^{\pm}(\xi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} bl_n \text{cth}(l_n b) \cos[l_n(x - \xi)] - \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lb_n \text{ch}(b_n x) \text{ch}(b_n \xi)}{\text{sh}(b_n l) \text{ch}(b_n l)} \right] d\xi = \\
 & = \frac{2c_2^2 - c_1^2}{2c_1^2} \left[\text{tg}(k_1 l) \left(\chi - \frac{k_1}{2l} x^2 \right) \left\{ \begin{array}{l} G_{\sigma}^+ \\ 0 \end{array} \right\} + \left(\frac{x}{l} + \frac{2k_1^2}{\pi v_1^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ G_{\sigma}^- \end{array} \right\} \right] + \\
 & + \left[\frac{(2c_2^2 - c_1^2)^2 k_1}{c_1^2 \cos(k_1 l)} \left(\chi - \frac{k_1}{2l} x^2 \right) - \frac{bc_1 c_2 k_2 \text{ctg}(k_1 b)}{l} \right] \left\{ \begin{array}{l} G_u^+ \\ 0 \end{array} \right\} - \frac{(2c_2^2 - c_1^2)^2 k_1^2}{2lc_1^2 \cos(k_1 l)} \left\{ \begin{array}{l} G_{u2}^+ \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi & = \frac{6 + k_1^2 l^2}{6k_1 l}, \quad G_{\sigma}^{\pm} = \int_{-b}^b g_1^{\pm}(\eta) d\eta = \int_{-b}^b [g_2^{\sigma}(\eta) \pm g_1^{\sigma}(\eta)] d\eta \\
 G_u^+ & = \int_{-l}^l g_3^+(\xi) d\xi = \int_{-l}^l g_u^+(\xi) d\xi, \quad G_{u2}^+ = \int_{-l}^l g_u^+(\xi) \xi^2 d\xi \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

(G_{σ}^{\pm} , G_u^+ , G_{u2}^+ – некоторые неизвестные постоянные). Следует также заметить, что все описанные ядра вещественны и не содержат частотных параметров k_1 и k_2 .

При выводе системы (2.5)–(2.7) основную трудность представляют члены, в которых одновременно присутствуют и волновое число, и пространственная координата, поскольку в этих членах невозможно явное выделение частотных параметров. Чтобы преодолеть указанную трудность, эти функции раскладывались в ряды Фурье, в которых затем было использовано стандартное одномодовое приближение ($|x| < l$)

$$\begin{aligned}
 \sin(k_1 x) & = -\frac{2\pi}{l^2} \sin(k_1 l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{v_n^2} \sin(l_n x) \approx \\
 & \approx -\frac{2\pi}{l^2} \sin(k_1 l) \left[-\frac{1}{v_1^2} \sin(l_1 x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{l_n^2} \sin(l_n x) \right] = \sin(k_1 l) \left(\frac{x}{l} + \frac{2k_1^2}{\pi v_1^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

и аналогично ($|t| < 2l$)

$$\begin{aligned} \cos(k_1 t) &= \frac{\sin(k_1 l)}{k_1 l} - \frac{2k_1 l \sin(k_1 l)}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v_n^2} \cos(l_n t) \approx \\ &\approx \sin(k_1 l) \left(\frac{1}{k_1 l} - \frac{2k_1 l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(l_n t) \right) = \sin(k_1 l) \left(\chi - \frac{k_1 t^2}{2l} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь были использованы следующие формулы суммирования:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(l_n x) = -\frac{\pi x}{2l}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(l_n t) = \frac{\pi^2 t^2}{4l^2} - \frac{\pi^2}{12}$$

Запишем теперь систему (2.5)–(2.7) в символическом виде (всюду далее Σ' означает суммирование от $j' = 1$ до $j' = 3$)

$$\Sigma' K_{jj'}^{\pm} g_j^{\pm} = f_j^{\pm}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

и введем вспомогательные вещественные функции h_{ij}^- ($i = 1, 2, 3$) как решение следующих систем, в которые не входит частота колебания:

$$\Sigma' K_{jj'}^- h_{1j}^- = \delta_{1j}, \quad \Sigma' K_{jj'}^- h_{2j}^- = \delta_{3j} \frac{x}{l}, \quad \Sigma' K_{jj'}^- h_{3j}^- = \delta_{3j} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.12)$$

Тогда в силу линейности имеем

$$g_j^- = \left[2ik_1 + \frac{a \operatorname{ctg}(k_1 l) - ib}{2abk_1 c_1^2} G_{\sigma}^- \right] h_{1j}^- + \frac{2c_2^2 - c_1^2}{2c_1^2} G_{\sigma}^- \left(h_{2j}^- + \frac{2k_1^2}{\pi v_1^2} h_{3j}^- \right) \quad (2.13)$$

Очевидно, постоянная G_{σ}^- (2.8) может быть определена из соотношения (2.13) путем интегрирования по отрезку $|\eta| \leq b$, что приводит к выражению

$$G_{\sigma}^- = 2ik_1 H_{11}^- \left[1 - \frac{a \operatorname{ctg}(k_1 l) - ib}{2abk_1 c_1^2} H_{11}^- - \frac{2c_2^2 - c_1^2}{4c_1^2} \left(H_{21}^- + \frac{2k_1^2}{\pi v_1^2} H_{31}^- \right) \right]^{-1} \quad (2.14)$$

в котором постоянные

$$H_{i1}^- = \int_{-b}^b h_{i1}^-(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

не содержат волнового числа.

Аналогично исследуется (3×3) -система, соответствующая верхнему знаку плюс.

Введем следующие постоянные, зависящие от частоты:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \operatorname{tg}(k_1 l) + ib}{2abk_1 c_1^2}, \quad B = \frac{2c_2^2 - c_1^2}{bc_1^2 \operatorname{ctg}(k_1 l)} \chi, \quad C = \frac{2c_2^2 - c_1^2}{bc_1^2 \operatorname{ctg}(k_1 l)} \frac{k_1}{2l} \\ D &= \frac{2k_1^2}{\pi l p_1^2}, \quad E = \frac{(2c_2^2 - c_1^2)^2 k_1}{2bc_1^2 c_2^2 \cos(k_1 l)} \chi - \frac{c_1 k_2 \operatorname{ctg}(k_1 b)}{2lc_2}, \quad F = -\frac{(2c_2^2 - c_1^2)^2 k_1}{2bc_1^2 c_2^2 \cos(k_1 l)} \frac{k_1}{2l} \\ G &= \frac{(2c_2^2 - c_1^2) \operatorname{tg}(k_1 l)}{4bc_1^2 c_2^2} \chi, \quad H = -\frac{(2c_2^2 - c_1^2) \operatorname{tg}(k_1 l) k_1}{4bc_1^2 c_2^2} \frac{k_1}{2l} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда в системе (2.11) правые части f_j^+ приобретают вид

$$\begin{aligned} f_1^+ &= AG_\sigma^+ + BG_u^+ + CG_{u2}^+ - 2ik_1 \\ f_2^+(y) &= \left(\frac{y}{bl} + D \sin \frac{\pi y}{b}\right) G_u^+ \\ f_3^+(x) &= GG_\sigma^+ + EG_u^+ + FG_{u2}^+ + (HG_\sigma^+ + FG_u^+)x^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Как и выше, введем вспомогательные вещественные функции h_{ij}^+ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) как решение следующих систем, не содержащих частотного параметра:

$$\begin{aligned} \sum K_{jj}^+ h_{1j}^+ &= \delta_{1j}, \quad \sum K_{jj}^+ h_{2j}^+ = \delta_{2j} \frac{y}{b}, \quad \sum K_{jj}^+ h_{3j}^+ = \delta_{2j} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \sum K_{jj}^+ h_{4j}^+ &= \delta_{3j}, \quad \sum K_{jj}^+ h_{5j}^+ = \delta_{3j} x^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда в силу линейности задачи имеем

$$\begin{aligned} g_j^+ &= (AG_\sigma^+ + BG_u^+ + CG_{u2}^+ - 2ik_1)h_{1j}^+ + G_u^+ \left(\frac{1}{l}h_{2j}^+ + Dh_{3j}^+\right) + \\ &+ (GC_\sigma^+ + EG_u^+ + FG_{u2}^+)h_{4j}^+ + (HG_\sigma^+ + FG_u^+)h_{5j}^+, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интегрируя соотношение (2.19) по $|\eta| < b$ при $j = 1$, затем по $|\xi| < l$ при $j = 3$ и, наконец, при $j = 3$ еще раз по $|\xi| < l$ после умножения на ξ^2 , получаем, что данное представление приводит к алгебраической системе относительно неизвестных G_σ^+ , G_u^+ , G_{u2}^+ , содержащей, помимо постоянных A, B, \dots, H , постоянные

$$H_{k1}^+ = \int_{-b}^b h_{k1}^+(\eta) d\eta, \quad H_{k3}^+ = \int_{-l}^l h_{k3}^+(\xi) d\xi, \quad H_{k3}^{+2} = \int_{-l}^l h_{k3}^+(\xi) \xi^2 d\xi, \quad k = 1, \dots, 5 \quad (2.20)$$

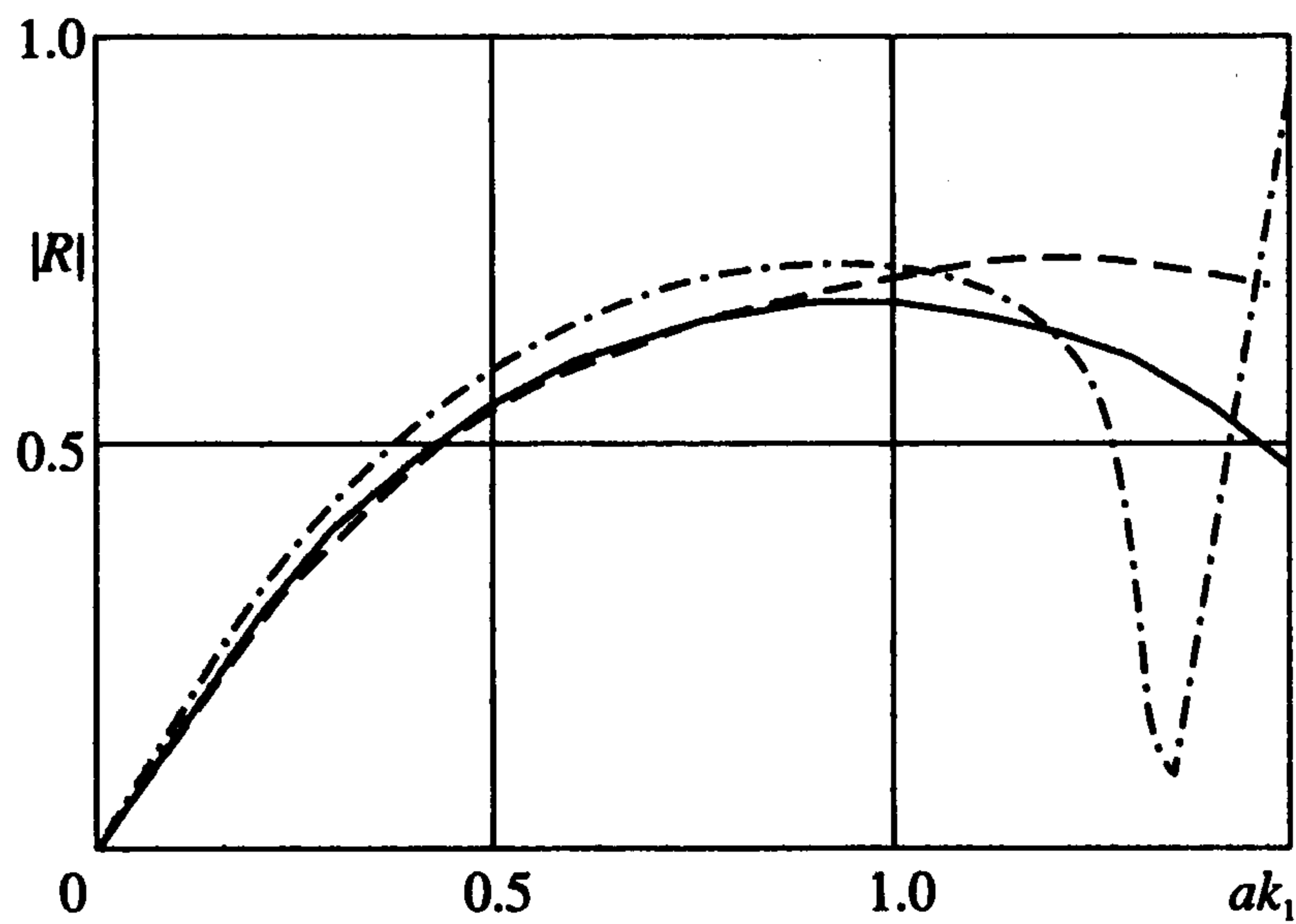
которые не зависят от волновых чисел.

Решая эту систему относительно неизвестной G_σ^+ , получаем зависимость от частоты в явном виде. Заметим, что частота входит лишь в постоянные A, B, \dots, H (2.16). Поскольку

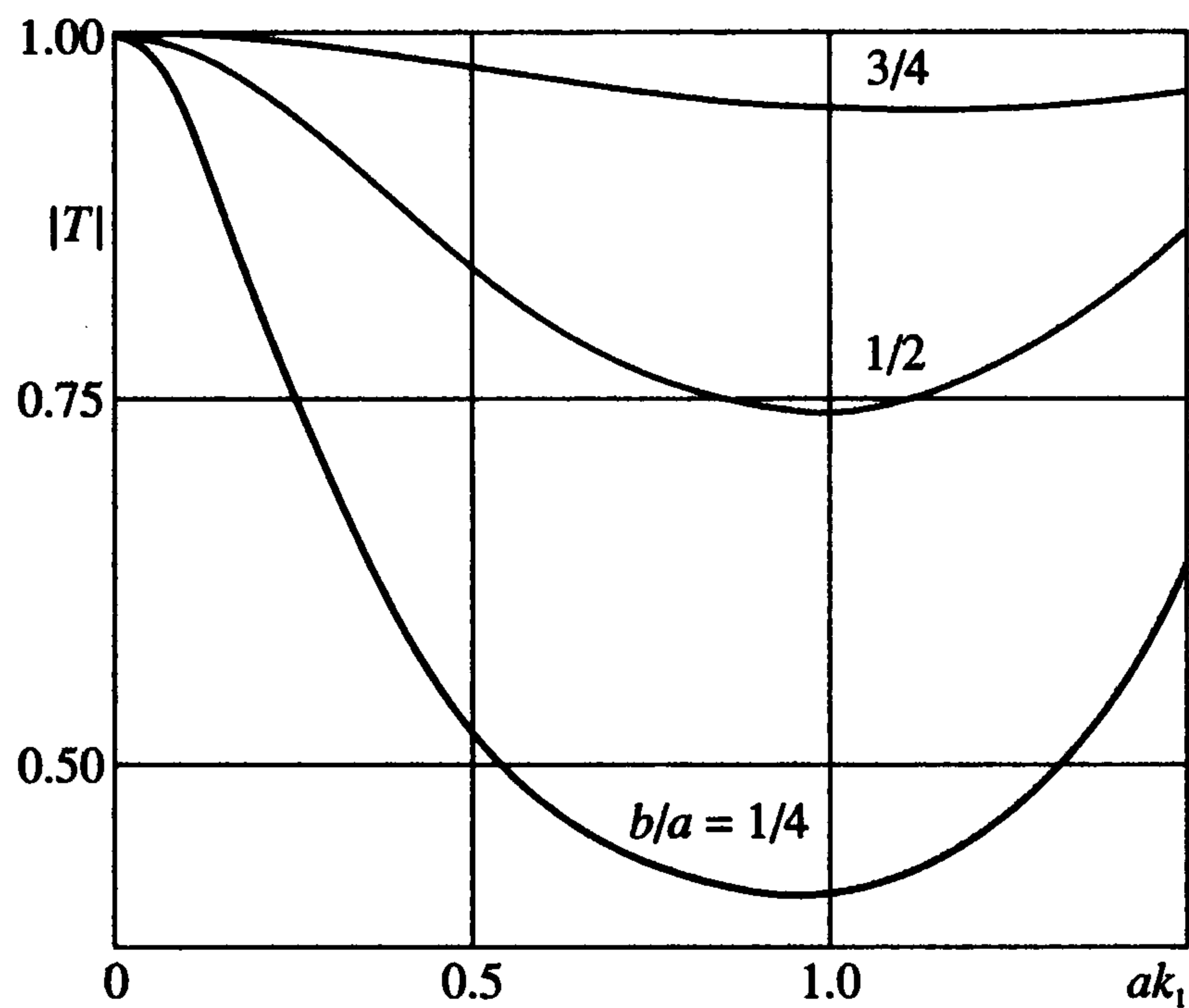
$$\int_{-b}^b g_1^\sigma(\eta) d\eta = \frac{1}{2}(G_\sigma^+ - G_\sigma^-), \quad \int_{-b}^b g_2^\sigma(\eta) d\eta = \frac{1}{2}(G_\sigma^+ + G_\sigma^-) \quad (2.21)$$

то при учете соотношений (1.6), (2.14) искомое явное представление для коэффициентов рассеяния можно получить в окончательном виде.

3. Низкочастотное приближение. Чтобы получить асимптотические результаты для предельно низких частот, рассмотрим вначале соотношение (2.14) для G_σ^- при $k_1 \rightarrow 0$: главный член асимптотики (как для вещественной, так и для мнимой части) равен $[a \operatorname{ctg}(k_1 l) - ib]/(2abk_1 c_1^2)$; следовательно, искомое низкочастотное приближение есть



Фиг. 2



Фиг. 3

$$G_{\sigma}^{-} = \frac{4abc_1^2 k_1^2}{b + ia \operatorname{ctg}(k_1 l)} \quad (3.1)$$

Что касается алгебраической системы для определения постоянной G_{σ}^{+} , то из выражений (2.16) следует, что постоянные C, D, F, H стремятся к нулю как k_1^2 при $k_1 \rightarrow 0$. Следовательно, постоянная G_{σ}^{+} может быть найдена из 2×2 алгебраической системы, в результате решения которой получаем

$$G_{\sigma}^{+} = 2ik_1 [H_{11}^{+}(\Phi_3^{+} - 1) - H_{13}^{+}\Phi_1^{+}] [(\Psi_1^{+} - 1)(\Phi_3^{+} - 1) - \Psi_3^{+}\Phi_1^{+}]^{-1} \quad (3.2)$$

$$\Phi_k^{+} = BH_{1k}^{+} + \frac{1}{l}H_{2k}^{+} + EH_{4k}^{+}, \quad \Psi_k^{+} = AH_{1k}^{+} + GH_{4k}^{+}, \quad k = 1, 2, 3$$

Подставляя полученные выше значения G_{σ}^{+} в соотношения (2.21) и используя выражение (1.6), приходим к корректной низкочастотной аппроксимации для коэффициентов рассеяния. По сравнению с результатами, полученными авторами ранее ([4], формулы (4.20), (4.21)), лишь постоянная G_{σ}^{-} (3.1) в низкочастотном пределе выражается в элементарном виде. Определение же постоянной G_{σ}^{+} требует решения некоторых интегральных уравнений, не содержащих частотного параметра.

4. Численные результаты. К системе интегральных уравнений (2.12) и (2.18) был применен прямой численный метод, в результате были получены значения всех постоянных H_{j1}^{-} ($j = 1, 2, 3$) и H_{j1}^{+} , H_{j3}^{+} , H_{j3}^{+2} ($j = 1, \dots, 5$), входящих в соотношения для определения постоянных G_{σ}^{-} и G_{σ}^{+} . В качестве упругого материала был взят алюминий, для которого $c_1 = 6200$ м/с, $c_2 = 3080$ м/с (так что $ak_1 = (c_2/c_1)ak_2 \leq ak_2/2 \leq 3/2$)).

На фиг. 2 показано поведение коэффициента отражения в зависимости от частоты в одномодовом режиме (1.5) для случая квадратных препятствий: $b/a = l/a = 1/2$. Сплошная кривая соответствует полученной в данной работе явной формуле в одномодовом приближении, а именно: величина $|R|$ как функция от ak_1 взята согласно соотношениям (1.6), (2.21). Штриховой кривой показана низкочастотная аппроксимация. Приведена также штрихпунктирная кривая, соответствующая точному решению, построенному прямым численным методом ([2], линия 1 на фиг. 2). Видно, что построенное в настоящей работе низкочастотное приближение для $|R|$ гораздо точнее полученного ранее ([2], линия 4 на фиг. 2) и имеет истинное асимптотическое поведение на предельно низких частотах.

На фиг. 3 отражено одномодовое приближение для коэффициента прохождения как функции частоты для трех частных значений относительного открытия b/a ; для всех кривых $l/a = 1/2$. Помимо очевидного факта, состоящего в том, что решетка с меньшим просветом порождает меньшее прохождение, заметим, что сравнение кривой для $b/a = 1/2$ на фиг. 3 со сплошной кривой на фиг. 2 показывает весьма строгое выполнение хорошо известного соотношения баланса энергии $|R|^2 + |T|^2 = 1$ в одномодовом случае [2, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. Wave penetration through elastic solids with a periodic array of rectangular flaws // *Meccanica*. 2001. V. 36. № 2. P. 191–199.
2. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2002. V.69. № 2. P. 179–188.
3. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
4. Solokhin N.V., Sumbatyan M.A. Artificial layer // *Research Nondestr. Eval.* 1994. V.6. № 1. P. 19–34.
5. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. Wave propagation through a periodic array of inclined cracks // *Europ. J. Mech. Ser. A/Solids*. 2000. V. 19. № 6. P. 949–959.
6. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland, 1973. 425 p.

Салерно (Италия)
Ростов-на-Дону
e-mail: scarpett@diima.unisa.it
sumbat@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
11.VI.2002