

УДК 539.3

© 2003 г. А. А. Евтушенко, Е. В. Коваленко

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ПРИ УЧЕТЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОБРАЗОВАНИЯ
ВСЛЕДСТВИЕ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Рассматривается контактная задача о скольжении жесткого теплоизолятора с плоской поверхностью по границе осесимметричного упругого тела с учетом тепловыделения и термического искажения границы деформируемого тела при трении. Предполагается, что касательные напряжения не влияют на величину контактных давлений, что позволяет исследовать задачу в осесимметричной постановке. Решение строится в два этапа: сначала определяется форма термически искаженной поверхности с использованием известных выражений, полученных Карслоу и Егером, а также Барбером, а затем рассматривается условие контакта с учетом упругих перемещений и искажения формы поверхности за счет нагрева и выводится интегральное уравнение задачи для определения неизвестных контактных давлений. Последнее уравнение решается численно с использованием аппроксимации неизвестных контактных давлений кусочно-постоянной функцией.

Были рассмотрены [1–3] плоские контактные задачи термоупругости при учете нестационарного теплообразования за счет трения. Соответствующая осесимметричная задача впервые поставлена Барбером [4]. Однако решение было получено в предположении, что распределение контактного давления описывается формулами Герца на протяжении всего процесса взаимодействия. Ниже показано, что при этом предположении погрешность при определении радиуса площадки контакта равна 22%, и задача решена без указанного ограничения.

1. Постановка задачи. Рассматривается контактная задача для двух полубесконечных тел, одно из которых скользит по поверхности другого с постоянной скоростью V и вдавливается в него силой P (фиг. 1). Считаем, что поверхность неподвижного полупространства слегка искривлена с радиусом закругления R , и скольжение сопровождается выделением тепла в области контакта в виде направленного в подвижное тело теплового потока

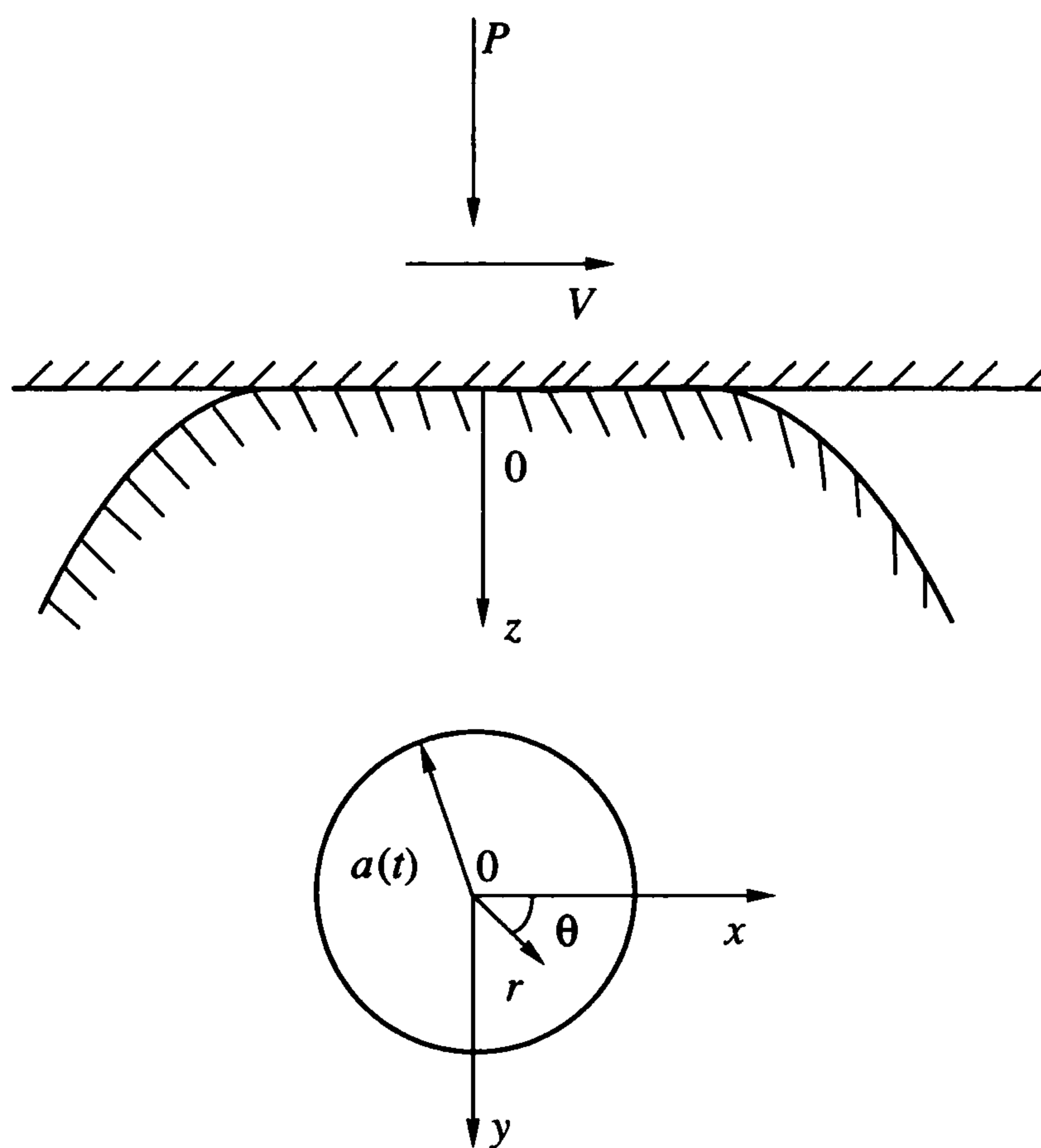
$$q(r, t) = fVp(r, t)H(a(t) - r), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

(p – контактное давление, a – радиус контактного круга, f – коэффициент трения, H – функция Хевисайда, r – радиальная координата на поверхности полупространства $z \geq 0$). Предполагаем, что движущееся тело – жесткий теплоизолятор, поверхность упругого тела вне области контакта свободна от внешних усилий и теплоизолирована, влиянием касательных усилий на величину контактного давления пренебрегаем.

В такой постановке контактная задача будет осесимметричной. Ее решение представим в виде суперпозиции решений двух задач:

1) задачи термоупругости – определение температурных напряжений и деформаций в теплопроводном упругом полупространстве $z \geq 0$ вследствие его нагрева тепловым потоком (1.1);

2) контактной задачи термоупругости – определение контактных напряжений при сжатии массивных тел, поверхность одного из которых является термически деформированной.



Фиг. 1

Задача термоупругости. Температура поверхности полупространства вследствие его нагрева тепловым потоком (1.1) равна [5]

$$T(r, t) = \frac{1}{4\rho c(\pi k)^{3/2}} \int_0^{a(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty q(s, \tau) \exp[-S(r, \theta, s, k(t-\tau))] \frac{sd\theta ds d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}, \quad r \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

$$S(r, \theta, s, k(t-\tau)) = \frac{r^2 - 2rscos\theta + s^2}{4k(t-\tau)}$$

(k – коэффициент температуропроводности, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость), а соответствующее термическое нормальное перемещение имеет вид [6]

$$u_z^t(r, t) = -\frac{\delta}{4\pi} \int_0^{a(t)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty q(s, \tau) \Phi\left(\frac{3}{2}; 2; -S(r, \theta, s, k(t-\tau))\right) \frac{sd\theta ds d\tau}{t-\tau}, \quad r \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

($\delta = \alpha(1 + \nu)/\lambda$ – коэффициент термического искажения, $\lambda = \rho kc$ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент линейного температурного расширения, Φ – вырожденная гипергеометрическая функция).

Контактная задача термоупругости. Рассмотрим контактную задачу термоупругости в квазистатической постановке. В этом случае нормальное перемещение u_z^e поверхности полупространства, вызванное действием контактного давления $p(r, t)H(a(t) - r)$, $t > 0$, равно [7]

$$u_z^e(r, t) = \frac{1-\nu}{\mu} \int_0^{a(t)} p(s, t) L(r, s) ds, \quad r \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.4)$$

$$L(r, s) = \frac{2s}{r+s} \mathbf{K}\left(\frac{4rs}{(r+s)^2}\right)$$

($\mathbf{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона).

Полное нормальное перемещение точек поверхности упругого полупространства будет равно

$$u_z(r, t) = u_z^e(r, t) + u_z^i(r, t), \quad r \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

Условие контакта тел имеет вид

$$g(r, t) = u_z(r, t) - \Delta(t) + r^2/(2R) = 0, \quad r \leq a(t), \quad t > 0 \quad (1.6)$$

($\Delta(t)$ – сближение тел).

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{a_{cr}}, & s^* &= \frac{s}{a_{cr}}, & t^* &= \frac{tk}{a_{cr}^2}, & \tau^* &= \frac{\tau k}{a_{cr}^2}, & a^* &= \frac{a}{a_{cr}} \\ p^* &= \frac{pa_{cr}^2}{P}, & T^* &= \frac{T}{T_0}, & q^* &= \frac{qa_{cr}^2}{fVP}, & a_0 &= \frac{a(0)}{a_{cr}}, & \Delta_0 &= \frac{\Delta}{\Delta(0)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Значения $a(0)$ и $\Delta(0)$, соответствующие решению изотермической задачи Герца, таковы [7]:

$$a(0) = \left[\frac{3PR(1-\nu)}{8\mu} \right]^{1/3}, \quad \Delta(0) = \frac{a^2(0)}{R}$$

Величина

$$a_{cr} = \frac{\pi\lambda(1-\nu)}{1.566\alpha\mu fV(1+\nu)} \quad (1.8)$$

представляет собой предельное (критическое) значение радиуса площадки контакта при достижении температурным полем (1.2) установившегося состояния и неограниченном ($P \rightarrow \infty$) увеличении прижимающей силы [8]. Отметим, что в изотермическом случае, упомянутом выше, такой предел не существует.

В центре контактного круга значение стационарной температуры равно [4]

$$T_0 = \frac{3fVP}{8\lambda a_{cr}} \quad (1.9)$$

Подставив выражения (1.3), (1.4) в соотношения (1.5), (1.6) и перейдя к безразмерным переменным (1.7) (звездочки далее опускаем), получим интегральное уравнение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^{a(t)} q(s, t) L(r, s) - \\ &- 0.16 \int_0^t \int_0^{a(\tau)} \int_0^{2\pi} q(s, \tau) \Phi \left[\frac{3}{2}; 2; -S(r, \theta, s, t - \tau) \right] \frac{sd\theta ds d\tau}{t - \tau} = \frac{3}{8a_0} \left[\Delta_0(t) - \frac{r^2}{2a_0^2} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$r \leq a(t), \quad t > 0$$

К интегральному уравнению (1.10) следует добавить условие равновесия тел

$$2\pi \int_0^{a(t)} p(s, t) s ds = 1 \quad (1.11)$$

и физические неравенства

$$p(r, t) \geq 0 \text{ при } r \leq a(t); \quad p(r, t) > 0 \text{ при } r > a(t); \quad t > 0 \quad (1.12)$$

которые служат для определения радиуса площадки контакта $a(t)$.

Кроме того, согласно обозначениям (1.7), из соотношения (1.2) получим выражение для безразмерной температуры в области контакта

$$T(r, t) = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int_0^{t a(\tau) 2\pi} \int_0^{\theta} \int_0^s q(s, \tau) \exp[-S(r, \theta, s, t - \tau)] \frac{sd\theta ds d\tau}{(t - \tau)^{3/2}}, \quad r \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.13)$$

Здесь звездочки также опущены.

При учете формулы (1.1), записанной в безразмерном виде

$$q(r, t) = p(r, t) \quad (1.14)$$

система уравнений (1.10), (1.11) позволяет определить контактное давление $p(r, t)$, тепловой поток $q(r, t)$ и сближение тел $\Delta_0(t)$. Ее решение зависит от одного безразмерного параметра a_0 , характеризующего отношение значений радиусов области контакта в начальный ($t = 0$) и конечный ($t \rightarrow \infty$) моменты времени.

2. Численное решение задачи. Численное решение интегрального уравнения (1.10) при условиях (1.11), (1.12) построим методом кусочно-постоянной аппроксимации [9]. С этой целью временной отрезок $[0, t]$ разделим точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = t$ на l частей длины $\delta t = t/l$. Площадку контакта разобьем концентрическими окружностями с радиусами $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = a(t)$ на n колец шириной $\delta a = a/n$. Предположим, что в каждой временно-пространственной области $[t_{j-1}, t_j] \times [a_{i-1}, a_i]$ тепловой поток постоянен и равен q_{ij} . Тогда в момент времени $t = t_l$ получим дискретный аналог уравнений (1.10), (1.11) в виде

$$\sum_{i=1}^n q_{il} \left(\frac{1}{\pi} b_{ik} - 1.28\pi c_{ilk} \right) = \frac{3}{8a_0} \left[\Delta_0(t_l) - \frac{r_k^2}{2a_0^2} \right] + 1.28\pi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l-1} q_{ij} c_{ijkl}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$2\pi\delta a \sum_{i=1}^n q_{il} r_i = 1 \quad (2.2)$$

Здесь

$$b_{ik} = F_0(r_k, a_i) - F_0(r_k, a_{i-1})$$

$$c_{ijkl} = \begin{cases} \zeta_{ijkl}^- - \zeta_{ijkl}^+, & j \neq l \\ -\zeta_{ijkl}^+, & j = l \end{cases}$$

$$\zeta_{ijklm}^\pm = t_{jl}^\pm [(A_{ijl}^\pm)^2 F_m(R_{kjl}^\pm, A_{ijl}^\pm) - (A_{i-1, jl}^\pm)^2 F_m(R_{kjl}^\pm, A_{i-1, jl}^\pm)], \quad m = 1, 2$$

$$R_{kjl}^\pm = \frac{r_k}{2(t_{jl}^\pm)^{1/2}}, \quad A_{ijl}^\pm = \frac{a_i}{2(t_{jl}^\pm)^{1/2}}, \quad t_{jl}^\pm = \left(l - j \pm \frac{1}{2} \right) \delta t$$

$$r_k = a_k - \frac{1}{2} \delta a, \quad a_i = i \delta a; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, l$$

$$F_0(r, a) = \begin{cases} 2aE(r/a), & r \leq a \\ 2e[E(a/r) - (1 - a^2/r^2)K(a/r)], & r > a \end{cases}$$

$$F_1(R, A) = \begin{cases} \ln(A/2) + (R^2/A^2 + \gamma)/2 + C_1(R, A), & R < A \\ \ln(R/2) + (1 + \gamma)/2 + C_2(R, A), & R \geq A \end{cases}$$

$$G_m(R, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)!!}{(2i+2)!!i!} H_{im}(R, A), \quad m = 1, 2$$

$$H_{i1}(R, A) = (-A^2)^i \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \frac{(R/A)^{2j}}{(i-j+1)}$$

$$H_{i2}(R, A) = (-R^2)^i \sum_{j=0}^i (C_j^i)^2 \frac{(A/R)^{2j}}{(j+1)}, \quad C_j^i = \frac{i}{(i-j)!j!}$$

($\gamma = 0.577216$ – постоянная Эйлера, $E(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл второго рода). Функция $F_0(r, a)$ записана согласно известным результатам [7], а вид функции $F_1(R, A)$ был найден ранее [10].

Система $n + 1$ линейных алгебраических уравнений (2.1), (2.2) служит для определения искомым величин q_{il} ($i = 1, 2, \dots, n$) и $\Delta_0(t_l)$. После ее решения найдем контактное давление по формуле (1.14).

Радиус площадки контакта $a(t_l)$ определяется с помощью неравенств (1.12). Если этот радиус определен неточно, то в точках площадки контакта окажется отрицательным контактное давление или возникнет взаимопроникновение материалов тел. Освобождаем от контакта точки первого вида, вводим в контакт точки второго вида и повторяем процедуру. Расчеты показали, что достаточно пяти итераций для получения относительной погрешности менее 1% при вычислении $a(t_l)$.

Температуру на контакте найдем из соотношения (1.13), записанного в дискретной форме [10]

$$T(r_k, t_l) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l q_{ij} d_{ijkl}$$

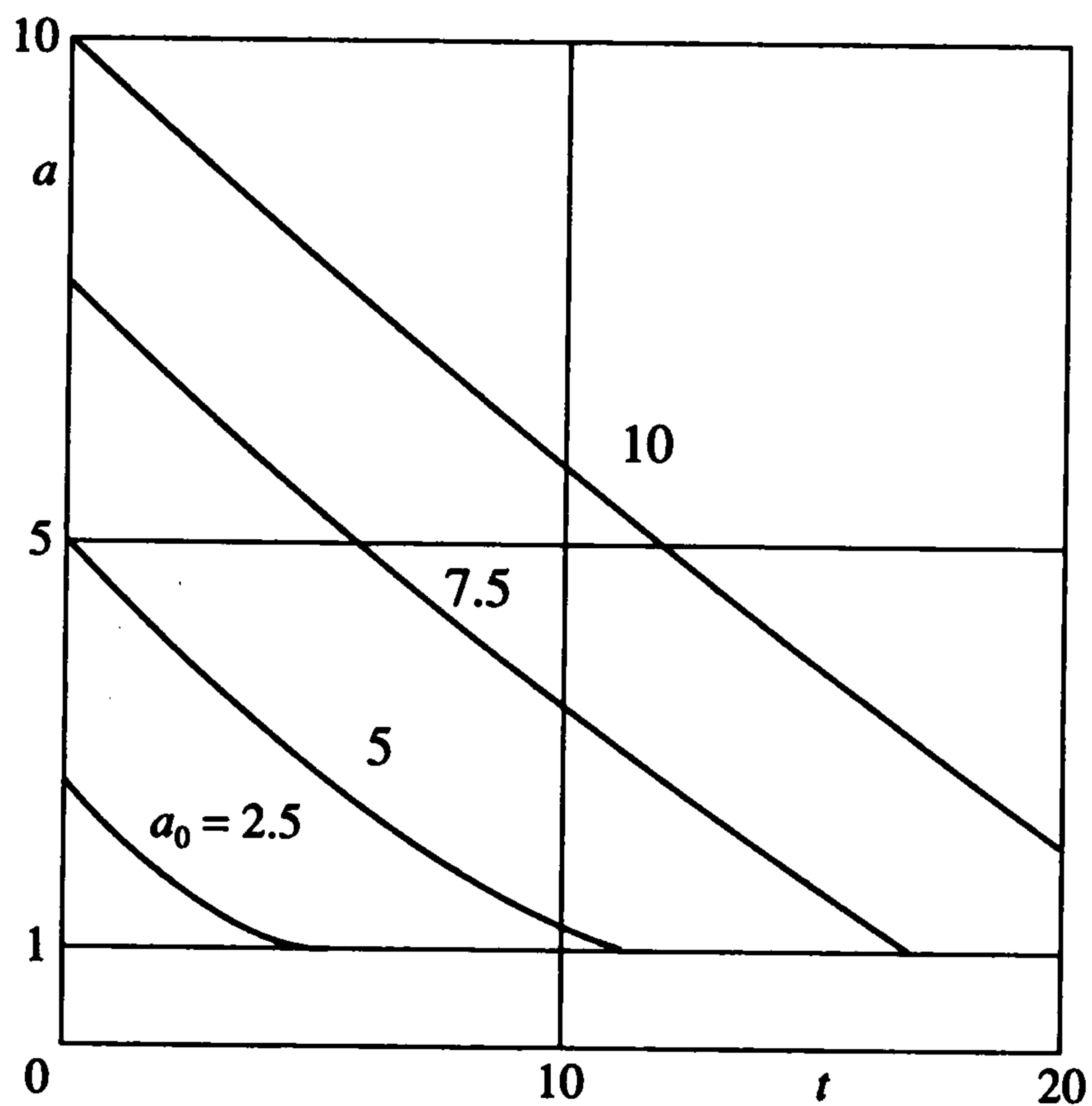
$$d_{ijkl} = \begin{cases} \zeta_{ijkl}^+ - \zeta_{ijkl}^-, & j \neq l \\ \zeta_{ijkl}^+, & j = l \end{cases}$$

$$F_2(R, A) = \begin{cases} 2(\pi A)^{-1} E(R/A) - D_1(R, A), & R < A \\ 2R(\pi A^2)^{-1} [E(A/R) - (1 - A^2/R^2)K(A/R)] - D_2(R, A), & R \geq A \end{cases}$$

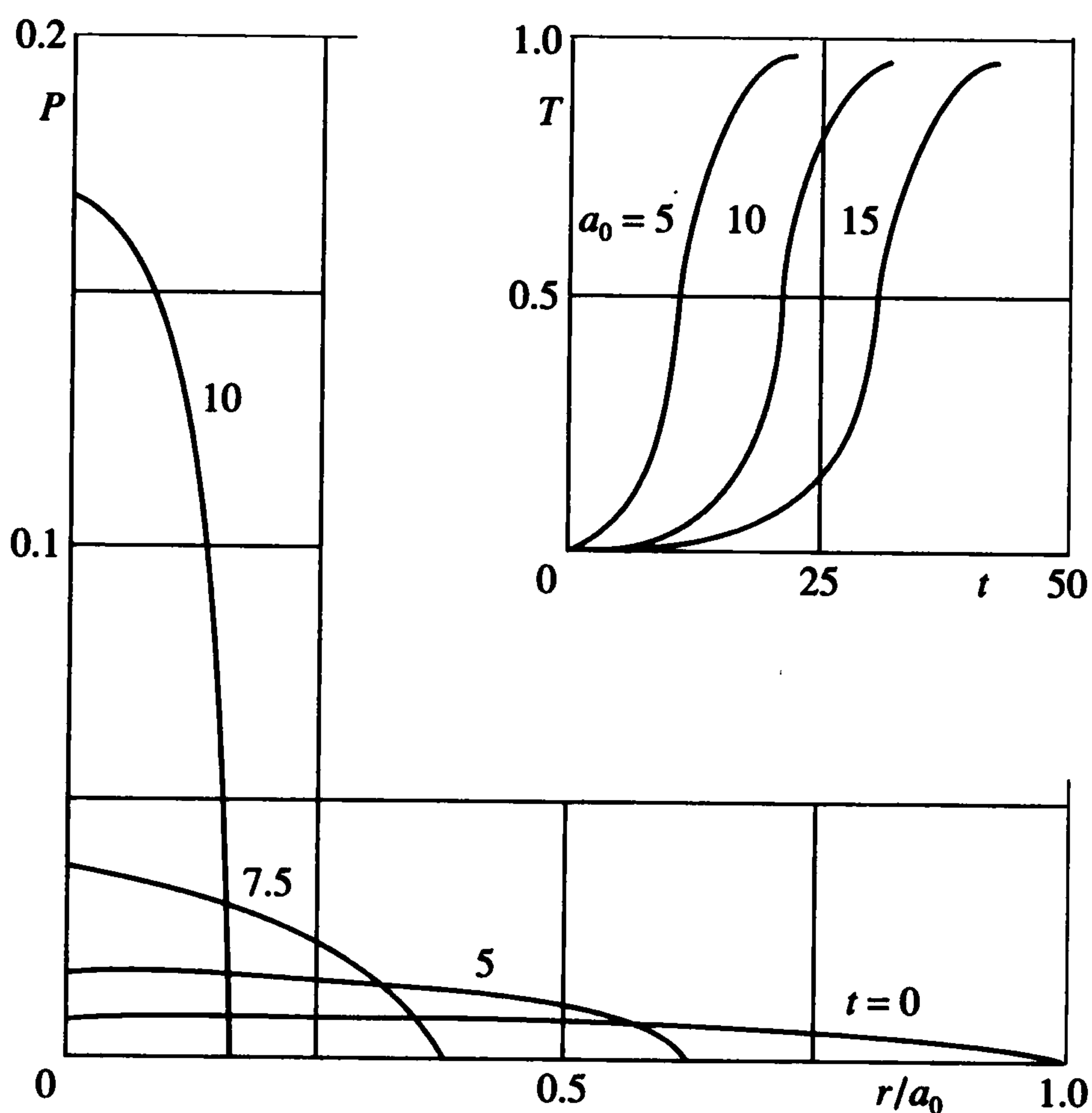
$$D_m(R, A) = \pi^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(2i+1)} H_{im}(R, A), \quad m = 1, 2$$

Функции $H_{im}(R, A)$ имеют вид (2.3).

3. Результаты расчетов. Изменение безразмерного радиуса площадки контакта $a(t)$ для разных значений безразмерного параметра a_0 показано на фиг. 2. Установлено, что радиус площадки контакта на протяжении почти всего переходного процесса взаимодействия уменьшается линейно в соответствии с уравнением $a(t) = a_0 - 0.425t$, полученным авторами ранее [11] методами асимптотического анализа. При достижении системой стационарного состояния радиус площадки контакта достигает критического значения. Отметим, что приближенная методика решения контактных



Фиг. 2



Фиг. 3

задач с учетом нестационарного теплообразования вследствие трения, основанная на предположении об эллиптическом характере распределения контактного давления, не позволяла осуществить переход к стационарному решению. Было показано [4, 11], что $a \rightarrow 0.783$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, указанной приближенной методикой решения рассматриваемого класса задач можно пользоваться при малых значе-

ниях времени взаимодействия тел. Величина этого временного промежутка зависит от входного параметра a_0 , характеризующего отношение радиусов площадки контакта в начале ($t = 0$) и в конце ($t \rightarrow \infty$) взаимодействия. С увеличением a_0 временной интервал применимости приближенных решений увеличивается.

Эпюры безразмерного контактного давления p при $a_0 = 5$ в разные моменты времени представлены на фиг. 3. Вследствие уменьшения размеров площадки контакта наблюдается локализация давления. При этом характер его распределения близок к давлению по Герцу.

Изменение со временем безразмерной температуры T в центре области нагрева ($r = 0$) показано в правой верхней части фиг. 3 при разных значениях a_0 . Видно, что температура на контакте является достаточно низкой в течение всего процесса разогрева и только вблизи стационарного состояния происходит ее резкое увеличение, т.е., в соответствии с обозначениями (1.7), истинная температура стремится к значению T_0 вида (1.9).

Результаты данной работы показывают, что учет теплообразования в результате действия сил трения на фрикционном контакте скольжения приводит к существенному (по сравнению с изотермическим случаем) перераспределению контактных напряжений. В результате температурного разогрева происходит тепловое искривление поверхности упругого тела, что приводит к уменьшению площадки контакта. Вследствие этого образуются пятна контакта с большим давлением и высокой температурой, на них температура может существенно превышать допустимые для данной пары трения пределы, что, в свою очередь, приводит к местному сцеплению, задиру или другим изменениям структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Azarkhin A., Barber J.R. Transient thermoelastic contact problem of two sliding half-planes // *Wear*. 1995. 102. № 1–2. P. 1–13.
2. Azarkhin A., Barber J.R. Transient contact of two sliding half-planes wear // *Trans. ASME. Ser. F.J. Tribology*. 1987. 109. № 4. P. 598–603.
3. Yevtushenko A.A., Pauk V.Jo. The plain transient contact problem for rough sliding bodies with wear and heat generation // *Wear*. 1994. V. 173. № 1–2. P. 39–50.
4. Barber J.R. Transient thermoelastic contact of a sphere sliding on a plane // *Wear*. 1980. V. 59. № 1. P. 21–29.
5. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959 = Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука, 1964. 487 с.
6. Barber J.R. Distortion of the semi-infinite solid due to transient surface heating // *Intern. J. Mech. Sci.* 1972. V. 14. № 6. P. 377–393.
7. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. N.Y. etc.: Cambridge Univ. Press, 1985 = Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. Yevtushenko A.A., Kulchytsky-Zhyhailo R.D. Determination of limiting radii of the contact area in axisymmetric contact problems with frictional heat generation // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1995. V. 43. № 4. P. 599–604.
9. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы*. М.: Наука, 1981. 416 с.
10. Евтушенко А.А., Уханская О.М. Определение нестационарных поверхностных искажений осесимметрично нагреваемого полупространства методом функций Грина // *Инж.-физ. ж.* 1994. Т. 66. № 5. С. 627–633.
11. Евтушенко А.А., Коваленко Е.В. О взаимодействии фрикционного теплообразования и износа на нестационарном контакте скольжения // *ПММ*. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 485–492.