УДК 539.3

© 2003 г. **В. М. Александров**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Регулярным и сингулярным асимптотическими методами строится решение осесимметричной контактной задачи для упругого слоя, изготовленного из несжимаемого материала и защемленного по основанию.

Аналогичная задача для слоя из сжимаемого материала с помощью тех же методов рассмотрена ранее [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть в цилиндрической системе координат r, φ, z упругий слой занимает область $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le h$ (h – толщина слоя). Слой изготовлен из несжимаемого материала (коэффициент Пуассона $\nu = 1/2$) и жестко защемлен по основанию. Как известно [1, 2], осесимметричная контактная задача для такого слоя сводится к определению контактного давления $q(r)$ из следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^a q(\rho)K\left(\frac{\rho}{h}, \frac{r}{h}\right)\rho d\rho = 2Gh\delta(r), \quad 0 \le r \le a \tag{1.1}$$

$$K(\sigma, \tau) = \int_0^\infty L(u)J_0(\sigma u)J_0(\tau u)du, \quad L(u) = \frac{\operatorname{sh}2u - 2u}{\operatorname{ch}2u + 1 + 2u^2} \tag{1.2}$$

Здесь a – радиус области контакта, G – модуль сдвига, $\delta(r)$ – осадка поверхности слоя в области контакта, $J_0(x)$ – функция Бесселя. Функция $L(u)$ ведет себя в нуле ($u \to 0$) и на бесконечности ($u \to \infty$) следующим образом:

$$L(u) = \frac{2}{3}u^3 - \frac{6}{5}u^5 + O(u^7), \quad L(u) = 1 + O(e^{-2u}) \tag{1.3}$$

На основании этих свойств функции $L(u)$ можно показать [1, 2], что ядро (1.2) интегрального уравнения (1.1) представимо в форме

$$\begin{gathered} K(\sigma, \tau) = K_0(\sigma, \tau) - F(\sigma, \tau) \\ K_0(\sigma, \tau) = \frac{2}{\pi(\sigma + \tau)}\mathbf{K}(k), \quad k = \frac{2\sqrt{\sigma\tau}}{\sigma + \tau} \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Функция $K_0(\sigma, \tau)$ содержит особенность вида $-\ln|\sigma - \tau|$. Функция $F(\sigma, \tau)$ непрерывна со всеми производными по совокупности переменных σ, τ в четверть-плоскости $0 \le \sigma, \tau < \infty$. В квадрате $0 \le \sigma, \tau < 1$ она представима абсолютно и равномерно сходящимся по совокупности переменных рядом

$$F(\sigma, \tau) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty b_{ij}\sigma^{2i}\tau^{2j}; \quad b_{ij} = \frac{(m!)^2}{(i!)^2(j!)^2}a_m, \quad m = i + j \tag{1.5}$$

Постоянные a_m определяются интегралами

$$a_m = \frac{(-1)^m}{[(2m)!!]^2}\int\limits_0^\infty [1 - L(u)]u^{2m}du \tag{1.6}$$

Вычисления дают $a_0 = 1.770217$, $a_1 = -0.957769$.

На основании представления (1.4) ядра $K(\sigma, \tau)$ можно показать [1, 2], что общее решение интегрального уравнения (1.1) имеет структуру

$$q(r) = \omega(r)/\sqrt{a^2 - r^2} \tag{1.7}$$

где функция $\omega(r)$ удовлетворяет условию Гёльдера в круге $r \le a$ с показателем $0 < \alpha \le 1$, если функция $\delta(r)$ такова, что ее производная удовлетворяет условию Гёльдера в круге $r \le a$ с показателем β, причем $\alpha \le \beta \le 1$.

2. Решение для относительно толстого слоя. Введем в рассмотрение безразмерный геометрический параметр $\lambda = h/a$ и будем предполагать, что $\lambda \ge 2$ (относительно толстая полоса).

Общее решение уравнения (1.1) для этого случая дается формулами [1, 2]

$$\begin{gathered} q(r) = q_*(r) + \frac{2}{\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}\times \\ \times\int\limits_0^a p(\xi)\left[A_0\left(1 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 + \frac{2}{3}A_1\right) + A_1(1 + A_0)\left(\frac{2r^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{a^2} - 1\right)\right]d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \\ P = 2\pi\int\limits_0^a q(\rho)\rho d\rho = \\ = 4\int\limits_0^a p(\xi)\left[1 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 + A_0^4 + \frac{2}{3}A_0A_1 + A_1(1 + A_0)\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{1}{3}\right)\right]d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \\ q_*(r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int\limits_r^a \frac{p'(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\right], \quad p(x) = 2G\left[\delta(0) + x\int\limits_0^x \frac{\delta'(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}\right] \\ A_0 = \frac{2a_0}{\pi\lambda}, \quad A_1 = \frac{4a_1}{\pi\lambda^3} \end{gathered} \tag{2.1}$$

где P – вдавливающая сила.

3. Вырожденное решение для относительно тонкого слоя. Теперь будем предполагать, что $\lambda \le 2$ (относительно тонкая полоса). Построим вырожденное (проникающее) решение задачи при малых значениях λ.

Применим к обеим частям интегрального уравнения (1.1) оператор по r вида

$$\int\limits_0^r \frac{d\eta}{\eta}\int\limits_0^\eta (\ldots)\xi d\xi \tag{3.1}$$

В результате будем иметь

$$\int\limits_0^a q(\rho)M\left(\frac{\rho}{h}, \frac{r}{h}\right)\rho d\rho = -\frac{2G}{h}g(r) \tag{3.2}$$

$$M(\sigma,\tau) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u^2} J_0(\sigma u) J_0(\tau u) du \tag{3.3}$$

$$g(r) = \int_0^r \delta(\rho) \ln\frac{r}{\rho} \rho d\rho + C_0 \tag{3.4}$$

В выражении (3.4) для функции $g(r)$ отброшено произвольное нерегулярное слагаемое вида $C_1 \ln r$.

Заметим, что поскольку ядро (1.2) уравнения (1.1) содержало особенность $-\ln|\sigma - \tau|$, то ядро (3.3) уравнения (3.2) содержит особенность $(\sigma - \tau)^2 \ln|\sigma - \tau|$. Вследствие этого общее решение интегрального уравнения имеет структуру [3, 4]

$$q(r) = \Omega(r)/(a^2 - r^2)^{3/2} \tag{3.5}$$

где функция $\Omega(r)$ такова, что ее производная удовлетворяет условию Гёльдера в круге $r \le a$ с показателем α.

При $\lambda \to 0$ ядро (3.3) в силу первого соотношения (1.4) принимает вид

$$M(\sigma,\tau) = \frac{2}{3} h^2 \delta(\rho, r) \tag{3.6}$$

где $\delta(\rho, r)$ – осесимметричная дельта-функция, определяемая интегралом [1, 2]

$$\delta(\rho, r) = \int_0^\infty \alpha J_0(\rho\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha, \quad \alpha = \frac{u}{h} \tag{3.7}$$

Учитывая равенство (3.6), находим, что вырожденное решение задачи при малых значениях λ имеет форму

$$q(r) = -\frac{3G}{h^3} g(r) \tag{3.8}$$

Постоянная C_0 в выражении (3.4) функции $g(r)$ должна быть далее найдена из условия, что решение в форме (3.5) имеет структуру (1.7), т.е. из условия

$$\Omega(a) = 0 \tag{3.9}$$

4. Главный член асимптотики решения для относительно тонкого слоя. Перейдем к построению решения типа пограничного слоя при малых значениях λ в окрестности контура $r = a$ области контакта.

Было показано [1, 2], что плоский пограничный слой в окрестности контура области контакта может быть найден из интегрального уравнения Винера – Хопфа

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \varphi(\tau) M_*(\tau - t) d\tau = -\pi f(t), \quad M_*(y) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u^3} \cos uy du \\ t = \frac{a-r}{h}, \quad \tau = \frac{a-\rho}{h}, \quad \varphi(t) = \frac{q(\rho)}{2G}, \quad f(t) = \frac{g(r)}{h^3}\end{gathered} \tag{4.1}$$

причем при $y \to 0$ функция $M_*(y)$ ведет себя, как $y^2 \ln|y|$. Метод решения уравнений вида (4.1) хорошо известен [5].

Можно показать, что функция $\varphi(t)$ будет иметь вид

$$\varphi(t) = \Omega_*(t)t^{-3/2} \tag{4.2}$$

где функция $\Omega_*(t)$ такова, что ее производная удовлетворяет условию Гёльдера при $0 \le t \le R < \infty$ с показателем α.

Для определения постоянной C_0 в представлении (3.4) будем иметь условие

$$\Omega_*(0) = 0 \tag{4.3}$$

5. Пример. Рассмотрим случай вдавливания в слой штампа с плоским основанием $\delta(r) \equiv \delta = \text{const}$.

Из последней формулы (2.1) найдем, что $p(x) = 2G\delta$, и первые три формулы (2.1) значительно упрощаются. Из формулы (3.4) имеем $g(r) = \delta r^2/4 + C_0$, и вырожденное решение (3.8) имеет вид

$$q(r) = -\frac{3G}{h^3}\left(\frac{\delta r^2}{4} + C_0\right) \tag{5.1}$$

С целью построения аналитического выражения для функции $\varphi(t)$ аппроксимируем функцию $L(u)$ согласно асимптотическим формулам (1.4) выражением

$$L_*(u) = \frac{u^3}{(u^2 + A^2)\sqrt{u^2 + B^2}}$$

где $A = 0.761310$, $B = 2.588024$. Погрешность такой аппроксимации не превосходит 23% при всех $0 \le u < \infty$.

Условие (4.3) приводит к соотношению

$$C_0 = -\frac{1}{4}\delta a^2(1 + D_1\lambda + D_2\lambda^2); \quad D_1 = \frac{2B + A}{AB}, \quad D_2 = \frac{4B - A}{4AB^2}$$

Решение типа пограничного слоя дается выражением

$$q(r) = \frac{2G\delta}{h^3}\left[\frac{a^2}{4}(D_1\lambda + D_2\lambda^2)\varphi_0(t) + \frac{ha}{2}\varphi_1(t) - \frac{h^2}{4}\varphi_2(t)\right]$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{3}{2}\operatorname{erf}(\sqrt{Bt}) + \frac{3}{2}\frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi Bt}} \\
\varphi_1(t) &= \frac{3}{2}t\operatorname{erf}(\sqrt{Bt}) + \frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi Bt}}\left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4B}\right) \\
\varphi_2(t) &= \operatorname{erf}(\sqrt{Bt})\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{27}{5}\right) + \frac{e^{-Bt}}{\sqrt{\pi Bt}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{A^2}{2}t - \frac{8B^2 + A^2}{4B}\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – интегралы вероятности.

Можно убедиться, что решение типа пограничного слоя (5.2) автоматически сращивается при удалении от контура $r = a$ в глубь области контакта с вырожденным решением (5.1).

Пользуясь вырожденным решением, приведем связь между вдавливающей силой P, определяемой формулой (2.1), и осадкой штампа δ

$$P = \frac{3\pi G\delta a^4}{4h^3}\left(\frac{1}{2} + D_1\lambda + D_2\lambda^2\right)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00346) и программы "Университеты России" (УР.04.03.005).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
3. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. *Зеленцов В.Б.* О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983–991.
5. *Noble B.* Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958 = *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IX.2002