

УДК 539.3, 621.891

© 2003 г. И. Г. Горячева

ИССЛЕДОВАНИЯ А.Ю. ИШЛИНСКОГО В ОБЛАСТИ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ И ИХ РАЗВИТИЕ

Приводятся результаты исследований А.Ю. Ишлинского и других авторов в теории контактного взаимодействия деформируемых тел при трении качения с учетом их несовершенной упругости и частичного проскальзывания в области контакта.

А.Ю. Ишлинский начал свою научную деятельность с исследований в области теории трения качения, результаты которых изложены в его кандидатской диссертации (1938 г.) [1] и первых публикациях [2–4]. Впоследствии он не раз снова возвращался к анализу этой проблемы [5, 6]. Им одним из первых проведено теоретическое исследование влияния двух основных источников сопротивления перекачиванию тел – относительного проскальзывания поверхностей в области контактного взаимодействия и гистерезисных потерь, связанных с несовершенной упругостью материалов.

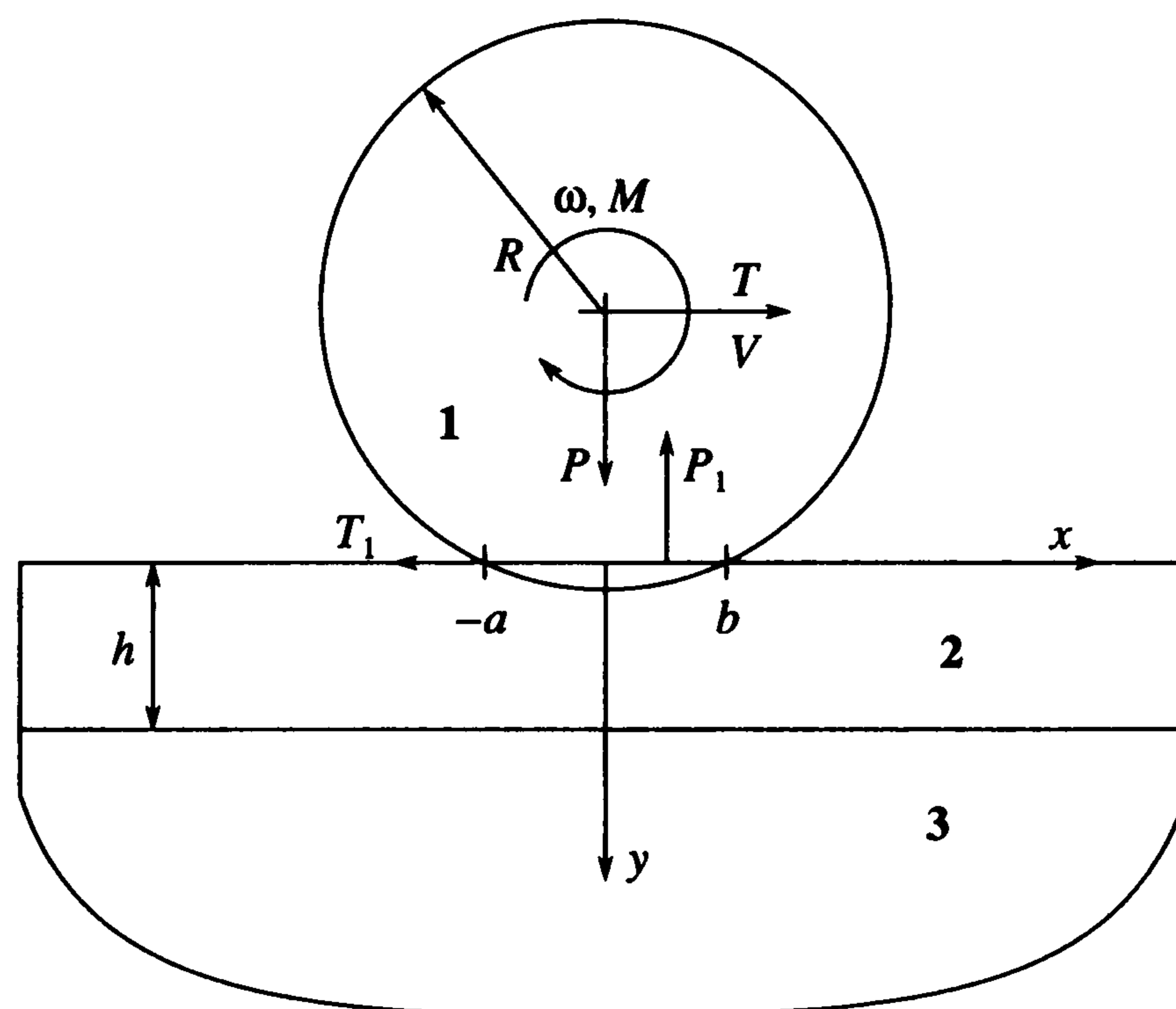
Впервые трение качения изучалось Кулоном [7], предложившим на основе экспериментальных исследований рассчитывать зависимость силы трения качения T от радиуса катка R и нагрузки на него P по формуле: $T = kP/R$, где k – коэффициент, именуемый обычно плечом трения. Впоследствии эта формула многократно подвергалась экспериментальной проверке для катков различных диаметров и материалов. В разных условиях трения проявлялась различная зависимость силы сопротивления от механических и геометрических характеристик взаимодействующих тел. Это связано с тем, что причины, вызывающие сопротивление перекачиванию, могут быть разными в зависимости от свойств материалов и условий взаимодействия.

Детальному изучению природы трения качения посвящена классическая работа Рейнольдса [8], в которой приведены результаты исследования качения резиновых и стальных катков по плоским поверхностям из разных материалов (стекло, самшит, резина, медь и т.д.). Им установлено, что действительное расстояние, пройденное стальным цилиндром за один оборот, при качении по мягкой резине меньше так называемого геометрического расстояния, равного длине развертки его поверхности. Рейнольдс объяснил причину трения качения в изучаемых им случаях относительным проскальзыванием точек на поверхностях взаимодействующих тел в отдельных участках области контакта вследствие деформирования тел. На эту же причину сопротивления движению колес по железнодорожным рельсам указывал и Н.П. Петров [9]. Таким образом, частичное проскальзывание – один из основных источников сопротивления перекачиванию тел.

Поскольку абсолютно упругих тел не существует, источником сопротивления перекачиванию являются также гистерезисные потери в телах за счет их деформирования. Этот механизм трения качения исследован экспериментально Табором [10]. Для неупругих материалов сопротивление качению существенно зависит от скорости перекачивания.

Оба эти источника сопротивления качению, а также молекулярное взаимодействие контактирующих поверхностей [11] играют большую роль в формировании силы трения качения, причем удельное значение каждой из этих причин меняется в зависимости от физико-химических свойств материалов и внешних условий.

1. Постановка задачи о стационарном качении деформируемых тел с учетом частичного проскальзывания в области контактного взаимодействия. Рассмотрим качение с угловой скоростью ω и линейной скоростью V , направленной вдоль оси x , од-



Фиг. 1

ного тела по поверхности другого (фиг. 1). Вследствие деформации точки на поверхностях ($y = 0$) взаимодействующих тел имеют касательные перемещения $u_{xi}(x, z, t)$ вдоль оси x и $u_{zi}(x, z, t)$ вдоль оси z (направлена перпендикулярно плоскости чертежа), а также перемещения по нормали к поверхности $u_{yi}(x, z, t)$.

Линейная скорость перемещения частицы, расположенной на поверхностях контактирующих тел ($i = 1, 2$), с компонентами v_{xi} вдоль оси x и v_{zi} вдоль оси z в системе координат $Oxyz$, связанной с движущимся телом, определяется следующими выражениями:

$$v_{xi} = V + \delta V_{xi} + V \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{xi}}{\partial t}, \quad v_{zi} = \delta V_{zi} + V \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial t}$$

где δV_{xi} и δV_{zi} – проекции на оси x и z скоростей проскальзывания контактирующих тел.

Скорости относительного проскальзывания $s_x(x, z, t)$ в направлении оси x и $s_z(x, z, t)$ в направлении оси z в точке (x, z) области контакта определяются разностью скоростей частиц взаимодействующих тел в этой точке, т.е.

$$s_x(x, z, t) = v_{x1} - v_{x2}, \quad s_z(x, z, t) = v_{z1} - v_{z2}$$

При стационарном качении, т.е. равномерном движении при постоянных силах, упругие перемещения в системе координат $Oxyz$ не зависят от времени. В этом случае $\frac{\partial u_{xi}}{\partial t} = \frac{\partial u_{zi}}{\partial t} = 0$ и скорости относительного проскальзывания $s_x(x, z, t)$ и $s_z(x, z, t)$, а также компоненты перемещений и напряжений – функции только координат x и z .

При качении вся область контакта Ω делится на две подобласти: подобласть Ω_a , в которой имеет место сцепление частиц, расположенных на поверхностях взаимодействующих тел, и Ω_s , где они проскальзывают. Граничные условия в области контакта записываются в виде:

в подобласти сцепления, $(x, z) \in \Omega_a$, отсутствует проскальзывание и тангенциальные напряжения $\tau(x, z)$ не превышают предельной величины, т.е.

$$s_x = s_z = 0, \quad |\tau(x, z)| \leq \mu p(x, z) \tag{1.1}$$

($p(x, z)$ – контактное давление, μ – коэффициент трения);

в подобласти проскальзывания, $(x, z) \in \Omega_s$, действует закон трения Кулона–Амонтона

$$|\tau(x, z)| = \mu p(x, z) \quad (1.2)$$

и направление тангенциальных напряжений $\tau(x, z)$ противоположно направлению проскальзывания, т.е.

$$\frac{\tau(x, z)}{|\tau(x, z)|} = -\frac{s(x, z)}{|s(x, z)|} \quad (1.3)$$

Заметим, что в случае полного скольжения закон Кулона–Амонтона (1.2) имеет место во всей области контакта Ω .

Условие соприкасания поверхностей взаимодействующих тел приводит к следующему соотношению, накладываемому на перемещения u_{yi} точки поверхности в направлении нормали к ней:

$$u_{y1} + u_{y2} = D - f_1(x, z) + f_2(x, z), \quad (x, z) \in \Omega \quad (1.4)$$

где $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ – уравнения поверхностей взаимодействующих тел, D – сближение тел в направлении оси y в результате их деформирования.

Для определения распределения напряжений и сопротивления качению необходимо решить контактную задачу с приведенными выше граничными условиями. Наибольшая трудность при ее решении состоит в определении расположения и границ зон сцепления и проскальзывания (их может быть несколько в области взаимодействия).

2. Качение упругих тел. Напряженное состояние упругих тел и сопротивление качению зависят от разницы кривизн тел в области контакта и соотношения модулей упругости. Два геометрически идентичных упругих тела с одинаковыми упругими характеристиками при свободном качении под действием только нормальной силы не испытывают сопротивления перекатыванию, при этом на площадке контакта не возникает частичного проскальзывания.

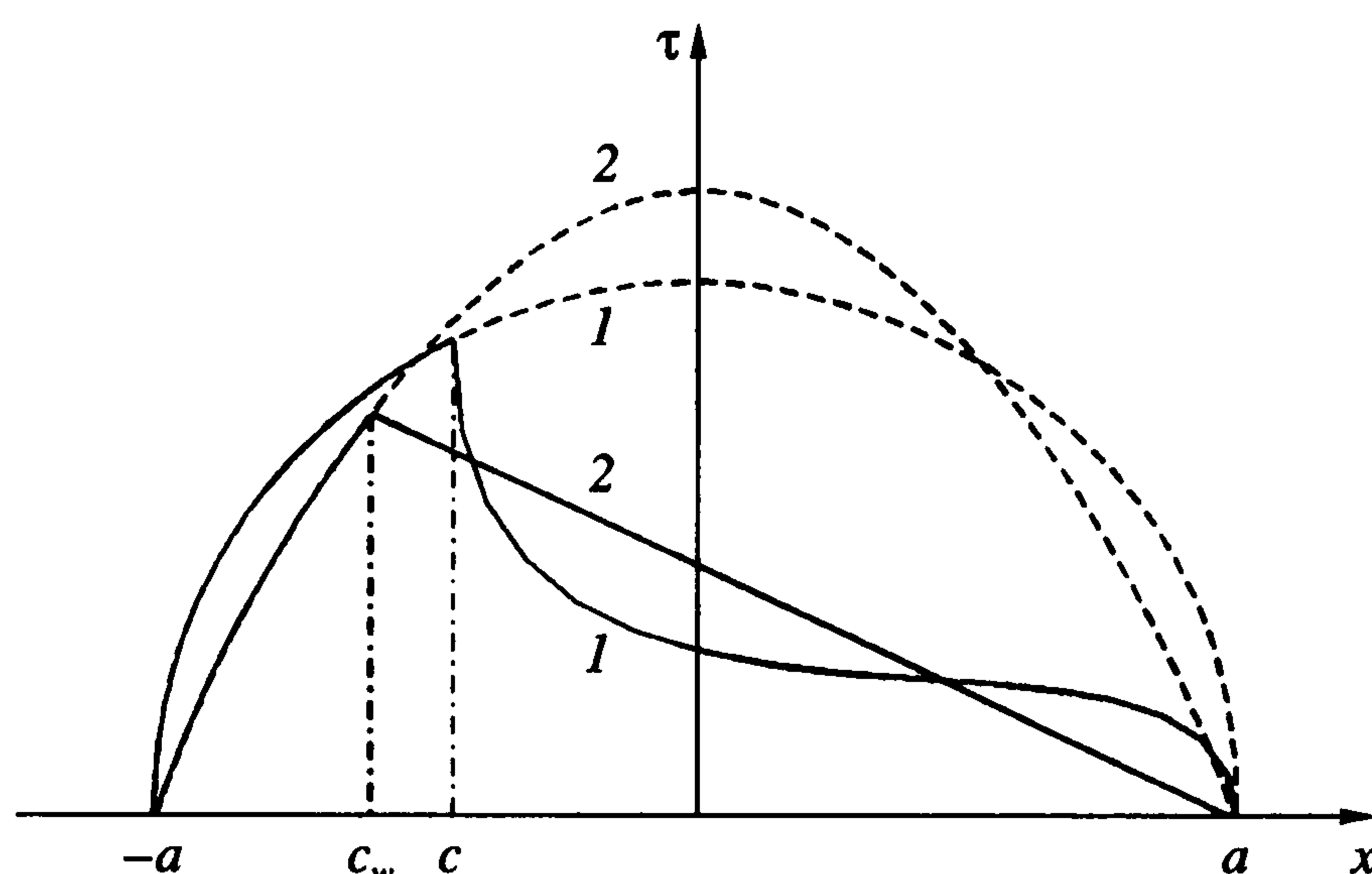
Исследованию контактной задачи в плоской постановке о качении упругого цилиндра радиуса R по основанию из того же материала под действием момента M и тангенциальной силы T посвящены работы [12–16].

На фиг. 1 показаны силы и моменты, действующие на каток (цилиндр), которые делятся на активные и силы реакции. Момент M направлен в сторону вращения, если каток ведущий, и в обратную сторону при ведомом или заторможенном катке. Контактные давления $p(x)$ и тангенциальные напряжения $\tau(x)$ составляют силы реакции. Все силы считаются постоянными вдоль образующей цилиндра. В случае равномерного движения ведомого катка имеют место уравнения

$$T = \int_{-a}^b \tau(x) dx, \quad P = \int_{-a}^b p(x) dx, \quad TR = \int_{-a}^b xp(x) dx + M \quad (2.1)$$

где P – вертикальная сила, действующая на каток, $-a$ и b – абсциссы границ области контакта катка с основанием.

Если материалы взаимодействующих тел одинаковы, касательные напряжения не оказывают влияния на распределение контактных давлений и размер площадки контакта, которые определяются теорией Герца. Частичное проскальзывание на площадке контакта происходит за счет разницы в кривизнах взаимодействующих тел. Изучение вопроса о размерах и положении участков сцепления и проскальзывания на площадке контакта показало [12–14], что в случае одинаковых упругих постоянных на площадке контакта может образоваться только два участка, причем участок



Фиг. 2

сцепления находится впереди, на стороне набегания катка. Получено [12] следующее распределение тангенциальных напряжений $\tau(x)$ в области контакта $(-a, a)$:

$$\tau(x) = \frac{\mu}{\pi KR} \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq c \\ [\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{(a-c)(x-c)}], & c \leq x \leq a \end{cases}; \quad K = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (2.2)$$

где c – точка перехода зоны сцепления в зону проскальзывания, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона взаимодействующих тел. Для полуширины области контакта и размера зоны сцепления получены соотношения

$$2a = \sqrt{8KRP}, \quad \frac{a-c}{2a} = 1 - \frac{\delta R}{\mu a}; \quad \delta = \frac{\omega R - V}{V} \quad (2.3)$$

где ω – угловая скорость вращения цилиндра, δ – величина относительного проскальзывания.

Распределение тангенциальных напряжений, рассчитанных по формулам (2.2) и (2.3), при $T/(\mu P) = 0.5$ представлено на фиг. 2, кривая 1. Штриховой линией 1 показано распределение касательных усилий при полном проскальзывании, $\tau(x) = \mu p(x)$.

Тангенциальная сила T связана с величиной относительного проскальзывания δ соотношением:

$$\frac{T}{\mu P} = \frac{\delta R}{\mu a} \left(2 - \frac{\delta R}{\mu a} \right) \quad (2.4)$$

Экспериментальные данные [16] подтверждают полученное [12–14] расположение зон сцепления и проскальзывания в области контакта. Однако при исследовании задачи о взаимодействии двух вращающихся дисков разных радиусов из одного и того же упругого материала показано [17], что при некоторых значениях внешних сил осуществима схема качения с тремя зонами на площадке контакта (зона сцепления окружена двумя зонами проскальзывания).

При качении двух упругих тел из разных материалов возникает дополнительное проскальзывание за счет разницы в тангенциальных деформациях на взаимодействующих поверхностях вследствие различия их упругих постоянных.

Исследованию качения жесткого цилиндра по упругому основанию посвящены работы А.Ю. Ишлинского [1, 3]. В них использована упрощенная модель основания (обобщение модели Винклера на податливость при сдвиге), в которой нормальные u_y и касательные u_x перемещения точек поверхности связаны с давлением p и касательными напряжениями τ , действующими в области контактного взаимодействия, соотношениями

$$u_y = (h/K_n)p, \quad u_x = (h/K_\tau)\tau \quad (2.5)$$

Подстановка этих выражений в граничные условия (1.1)–(1.4) позволяет определить распределение нормальных и касательных напряжений в области контакта и расположение зон сцепления и проскальзывания на ней. В частности, давление на площадке контакта в этом случае распределяется по параболическому закону, а распределение касательных напряжений в зоне сцепления подчиняется линейному закону, что следует из решения обыкновенного дифференциального уравнения в зоне сцепления с условиями непрерывности напряжений в точках перехода зоны сцепления в зону скольжения или выхода ее на границу зоны контакта. График распределения касательных напряжений τ в области контакта при наличии одной зоны сцепления (c_w, a) и одной зоны проскальзывания $(-a, c_w)$ приведен на фиг. 2 (кривая 2).

Был проведен полный анализ положения зон сцепления и проскальзывания на площадке контакта и выведены условия, при которых осуществима схема с двумя (впереди, на стороне набегания катка, зона сцепления, которая переходит в зону проскальзывания) и тремя (зона сцепления находится между двумя зонами проскальзывания) участками в области контакта [4]. Даны также соотношения, позволяющие рассчитать силу сопротивления качению при больших и малых значениях момента M , а также приближенная формула для максимальной величины силы трения качения.

Упрощенная модель упругого основания, использованная А.Ю. Ишлинским для анализа контактных характеристик в задаче о качении цилиндра (плоская постановка), была в дальнейшем применена для решения трехмерных задач о качении упругих тел, а также при исследовании нестационарных задач о качении и переходных режимов к стационарному качению [18, 19]. Анализ возможности применения упрощенной модели (2.5) к исследованию контактных характеристик при качении упругих тел, проведенный [19] путем сравнения результатов решения задач для неупрощенной модели упругого основания (аналитических и численных) с упрощенной моделью, позволил заключить, что упрощенная модель позволяет с достаточной точностью (ошибка составляет не более 15%) рассчитать размеры и положение зон сцепления и проскальзывания в области контактного взаимодействия, а также величину относительного проскальзывания тел при качении.

Если в случае одинаковых упругих постоянных задача о качении цилиндра по основанию может быть сведена к задаче Римана–Гильберта для одной аналитической функции (см. ниже, разд. 3), решение которой имеет вид (2.2), то в случае разных упругих постоянных необходимо решать связанную задачу определения двух аналитических функций. Задача о качении упругого цилиндра по упругому основанию, когда на упругие свойства цилиндра и основания не накладывалось никаких ограничений, рассматривалась [20] в предположении, что площадка контакта состоит из двух участков – проскальзывания и сцепления поверхностей, причем на участке сцепления принималось, как и в работе [15], равенство тангенциальных перемещений взаимодействующих поверхностей. Решение сведено к исследованию задачи линейного сопряжения для двух аналитических функций, которая решалась путем построения дифференциального уравнения Гаусса с тремя особыми точками. Окончательное выражение для напряжений имеет достаточно сложный вид, что затрудняет даль-

нейший анализ полученных результатов. Таким образом, анализ сил трения в задаче о качении жесткого цилиндра по упругому основанию и расположения зон сцепления и проскальзывания в области взаимодействия, проведенный впервые А.Ю. Ишлинским [4], является до сих пор единственным при исследовании качения тел из материалов, модули упругости которых существенно различаются.

Пространственная задача о качении упругих тел всесторонне исследована в монографии Калкера [19], где содержится также исторический обзор работ в области трения качения упругих тел. При решении пространственных контактных задач используется вариационный подход [21], который состоит в отыскании минимума в пространстве допустимых функций касательных напряжений, действующих на площадке контакта, функционала вида

$$I = \int_{\Omega} (|\dot{s}|\tau + \mu p \dot{s})^2 dS \quad (2.6)$$

Доказана [22, 23] эквивалентность вариационной постановки (2.6) задаче о контакте качения тел из одинаковых материалов с граничными условиями (1.1)–(1.4). При использовании вариационного подхода неизвестные границы подобластей сцепления и проскальзывания строятся после решения вариационной задачи по найденному полю скоростей. При численной реализации исходная вариационная задача аппроксимируется дискретной задачей нелинейного программирования [23].

Результаты численного решения задачи показали, что форма площадки контакта при качении шара по плоскости близка к круговой. Анализ решения [19] в случае контакта тел из одинаковых материалов позволил установить, что распределение тангенциальных напряжений на линии, проходящей через центр площадки контакта и коллинеарной направлению действия силы тяги T , близко к распределению, представленному на фиг. 2. Полученные результаты послужили основанием для использования при решении пространственных задач о качении приближенных методов, в основе которых лежит суперпозиция решений плоской задачи о качении упругих тел. Так, в теории полос [24] область контакта делится на тонкие полосы, параллельные направлению качения. Решение задачи в плоской постановке используется для каждой такой полосы, при этом пренебрегается их взаимодействием. Был дан обзор различных методов решения пространственных задач о качении упругих тел из одинаковых материалов в предположении, что область контакта много меньше радиусов кривизн взаимодействующих тел [23].

3. Качение вязкоупругих тел. При качении происходит нагружение и разгрузка взаимодействующих тел, что в силу реологических свойств материалов приводит к гистерезисным потерям.

В 1938 г. А.Ю. Ишлинским впервые рассмотрена задача о стационарном качении жесткого цилиндра (катка) по вязкоупругому основанию, решение которой позволило рассчитать момент трения качения и исследовать его зависимость от скорости качения, нагрузки, а также механических и геометрических характеристик взаимодействующих тел [2]. Для приближенного решения задачи были использованы две одномерные модели материала, для которых давление $p(x)$ в области взаимодействия связано с перемещением $u_y(x)$ поверхности по нормали к ней соотношениями

$$p(x) = K_n u_y(x) + \kappa \partial u_y(x) / \partial t \quad (3.1)$$

$$\partial u_y(x) / \partial t = K_1 p(x) + k_2 \partial p(x) / \partial t \quad (3.2)$$

где K_n , κ , K_1 и K_2 – постоянные материала.

При решении задачи предполагалось, что тангенциальные напряжения на площадке контакта отсутствуют, а сопротивление качению возникает только за счет

несимметрии давления, приводящего к возникновению момента сопротивления. Было показано, что для модели (3.1), обладающей ограниченной ползучестью, при малых скоростях качения сила сопротивления перекачиванию описывается соотношением

$$T = \frac{\kappa VP}{K_n R} \quad (3.3)$$

а в случае больших скоростей

$$T = \frac{4}{3} \left[\frac{P^3}{2\kappa VRl} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

Любопытно отметить, что эти две асимптотические формулы, будь они получены много раньше, могли бы положить конец горячей дискуссии [25], которая возникла между Дюпюи и Мореном в начале XIX в. по поводу того, как зависит сопротивление перекачиванию от радиуса катка. Если первый считал, что сила T пропорциональна $R^{-1/2}$, то второй отстаивал другую закономерность: сила T пропорциональна R^{-1} .

Для упруговязкого грунта, подчиняющегося закону деформирования (3.2), полученная А.Ю. Ишлинским [2] зависимость силы трения от механических и геометрических характеристик контактирующих тел при больших значениях скорости качения V имеет вид

$$T = \frac{K_1}{5V} \left[\frac{18P^5}{K_2 R l^2} \right]^{1/3} \quad (3.5)$$

Одномерные (стержневые) модели для описания несовершенной упругости основания при качении по нему цилиндрических и сферических тел использовались впоследствии [26, 27], при этом поведение стержней при сжатии описывалось различными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Решение задачи о качении жесткого цилиндра по основанию, описываемому моделью сплошной вязкоупругой среды, было получено [28] также в предположении отсутствия тангенциальных сил на площадке контакта. В качестве модели материала основания принималась простейшая линейная среда, для которой функция релаксации $\gamma(t)$ имеет вид

$$\gamma(t) = \frac{1}{G_D} (1 + \beta(1 - e^{-t/T}))$$

где G_D – динамический модуль сдвига, T – время релаксации. Для таких же вязкоупругих материалов рассматривался [29, 30] контакт двух цилиндров с разными и одинаковыми упругими постоянными. При этом находились решения, соответствующие спектру времен релаксации. Установлено, что сила сопротивления качению имеет максимум, когда время запаздывания материала сравнимо со временем контакта. Было найдено [31] распределение нормальных напряжений при качении вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала, для которого зависимость между напряжениями и деформациями выражалась интегральными соотношениями Вольтерры с экспоненциальным ядром.

Задача о качении вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала рассматривалась в предположении, что соотношения между напряжениями и деформациями в вязкоупругом теле имеют вид [32]

$$\epsilon_x^* = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x^* - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y^*, \quad \epsilon_y^* = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y^* - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x^*, \quad \gamma_{xy}^* = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^* \quad (3.6)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x}, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}, \quad i = x, y \quad (3.7)$$

Здесь T_ε и T_σ характеризуют вязкие свойства среды, ν – коэффициент Пуассона, E – длительный модуль упругости материала. Мгновенный модуль упругости для рассматриваемой модели определяется величиной $H = \alpha E$, где $\alpha = T_\varepsilon / T_\sigma$. Заметим, что для аморфных линейных полимеров $\alpha = 10^5 \dots 10^7$, для полимеров с высокой степенью кристалличности $\alpha = 10 \dots 10^2$, для черных металлов $\alpha = 1.1 \dots 1.5$.

При постановке задачи предполагалось [32], что вся площадка контакта $(-a, b)$ разбивается на зону проскальзывания $(-a, c)$ и зону сцепления (c, b) , расположенную впереди на стороне набегания цилиндра. Граничные условия (1.1)–(1.4) позволили свести задачу к определению двух аналитических в нижней полуплоскости функций

$$w_1(z) = \int_{-a}^b \sigma_y^*(t, 0) \frac{dt}{t-z} = U_1(x, y) - iV_1(x, y) \quad (3.8)$$

$$w_2(z) = \int_{-a}^b \tau_{xy}^*(t, 0) \frac{dt}{t-z} = U_2(x, y) - iV_2(x, y) \quad (3.9)$$

действительные и мнимые части которых удовлетворяют на границе ($y = 0$) следующим соотношениям:

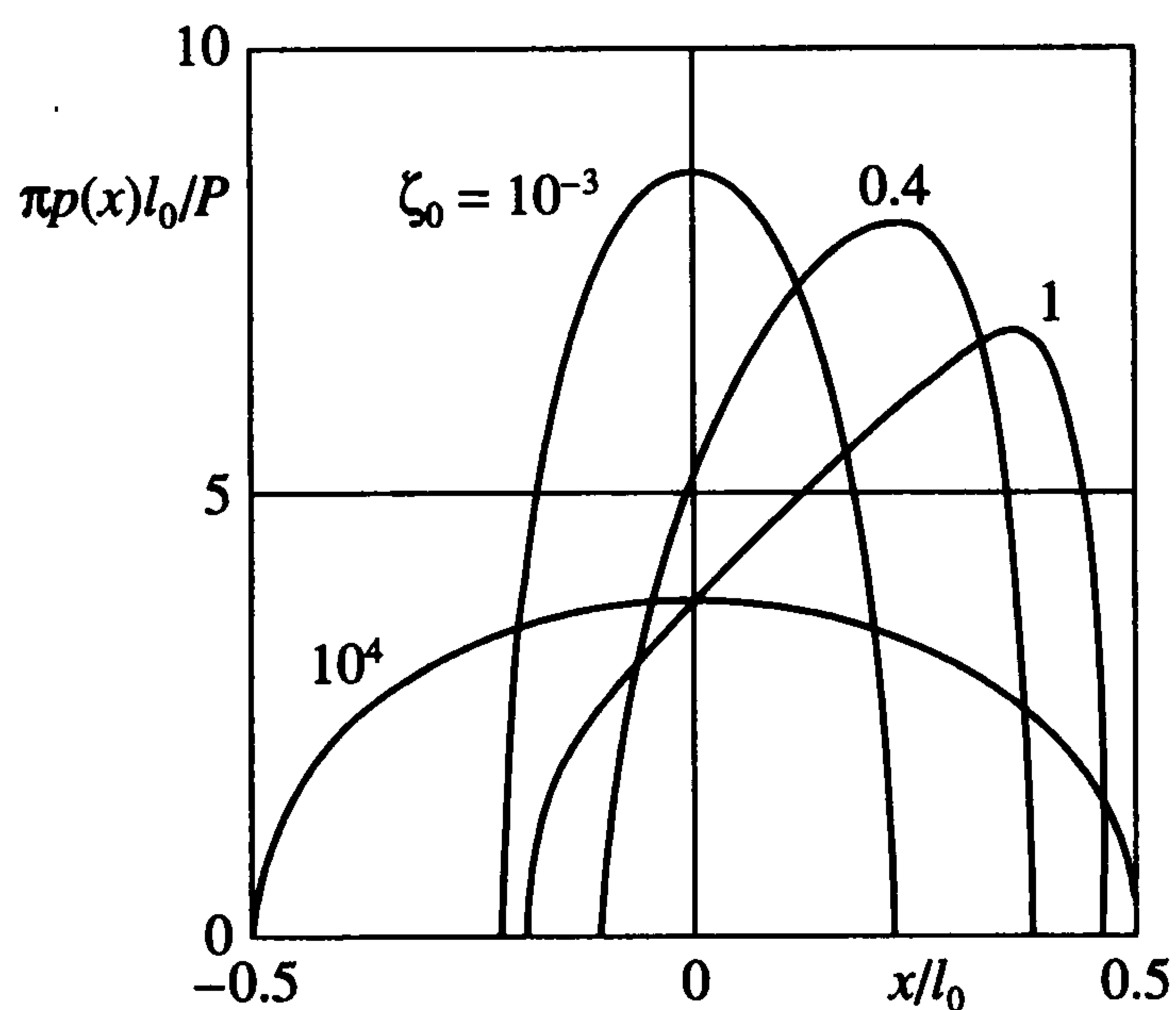
$$V_1 = V_2 = 0, \quad x \notin (-a, b)$$

$$U_1 = -\frac{x - T_\varepsilon V}{2KR}, \quad V_2 + \mu V_1 = 0, \quad x \in (-a, c) \quad (3.10)$$

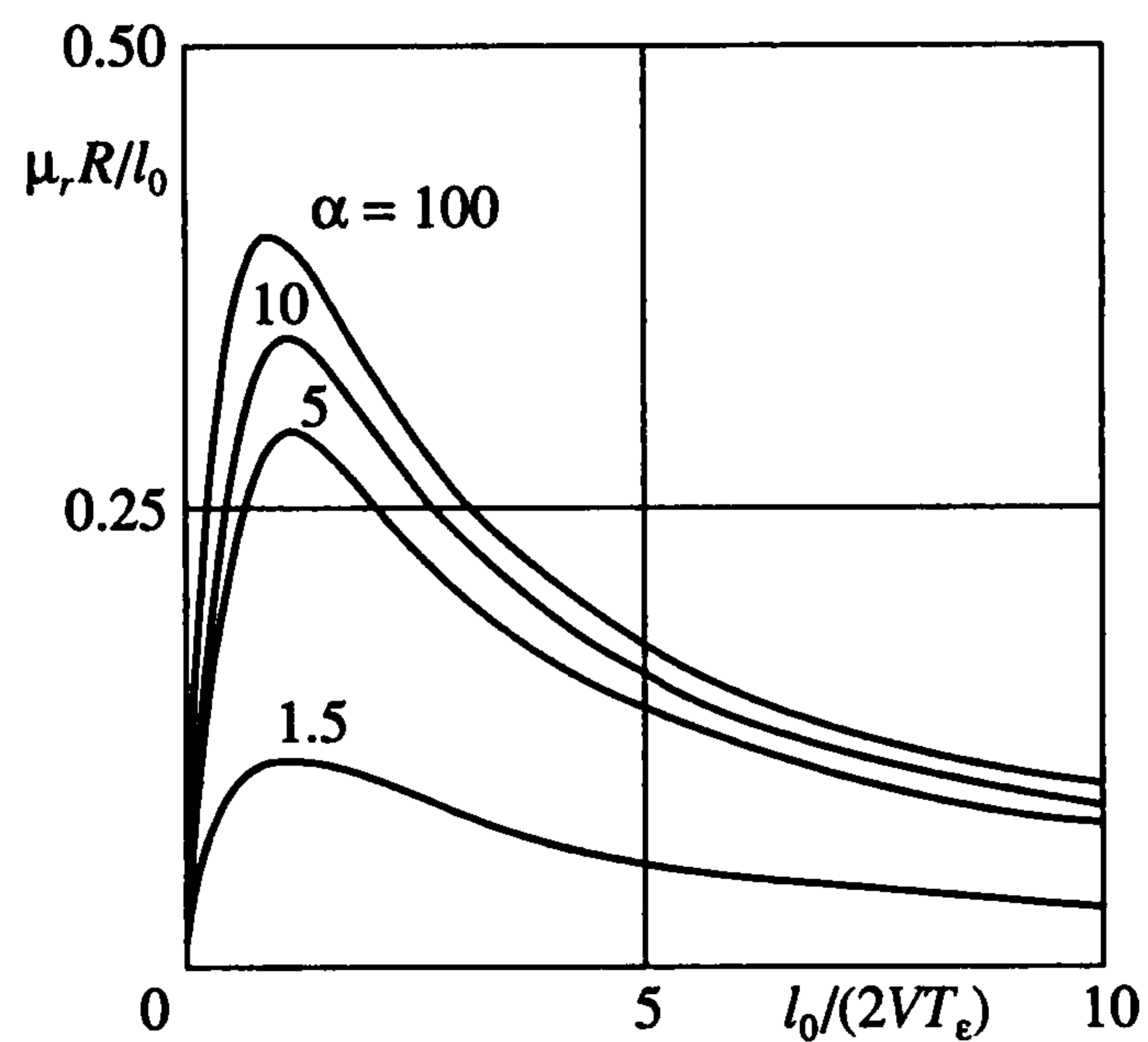
$$U_1 = -\frac{x - T_\varepsilon V}{2KR}, \quad U_2 = \frac{\delta}{2K}, \quad x \in (c, b)$$

Величины K и δ определены последними соотношениями (2.2) и (2.3). Граничные условия (3.10) позволяют сначала решить задачу определения функции $w_1(z)$ (3.8), а затем, используя найденную функцию $V_1(x, 0)$, определить функцию $w_2(z)$ (3.9). Функции ε_{ij}^* и σ_{ij}^* на действительной оси выражаются через действительные и мнимые части функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Тогда истинные напряжения и перемещения, действующие на границе полуплоскости, находятся из решений дифференциальных уравнений (3.7). Были получены [32, 33] аналитические выражения для нормальных и касательных напряжений, действующих на площадке контакта, а также уравнения для определения размеров зон сцепления и проскальзывания.

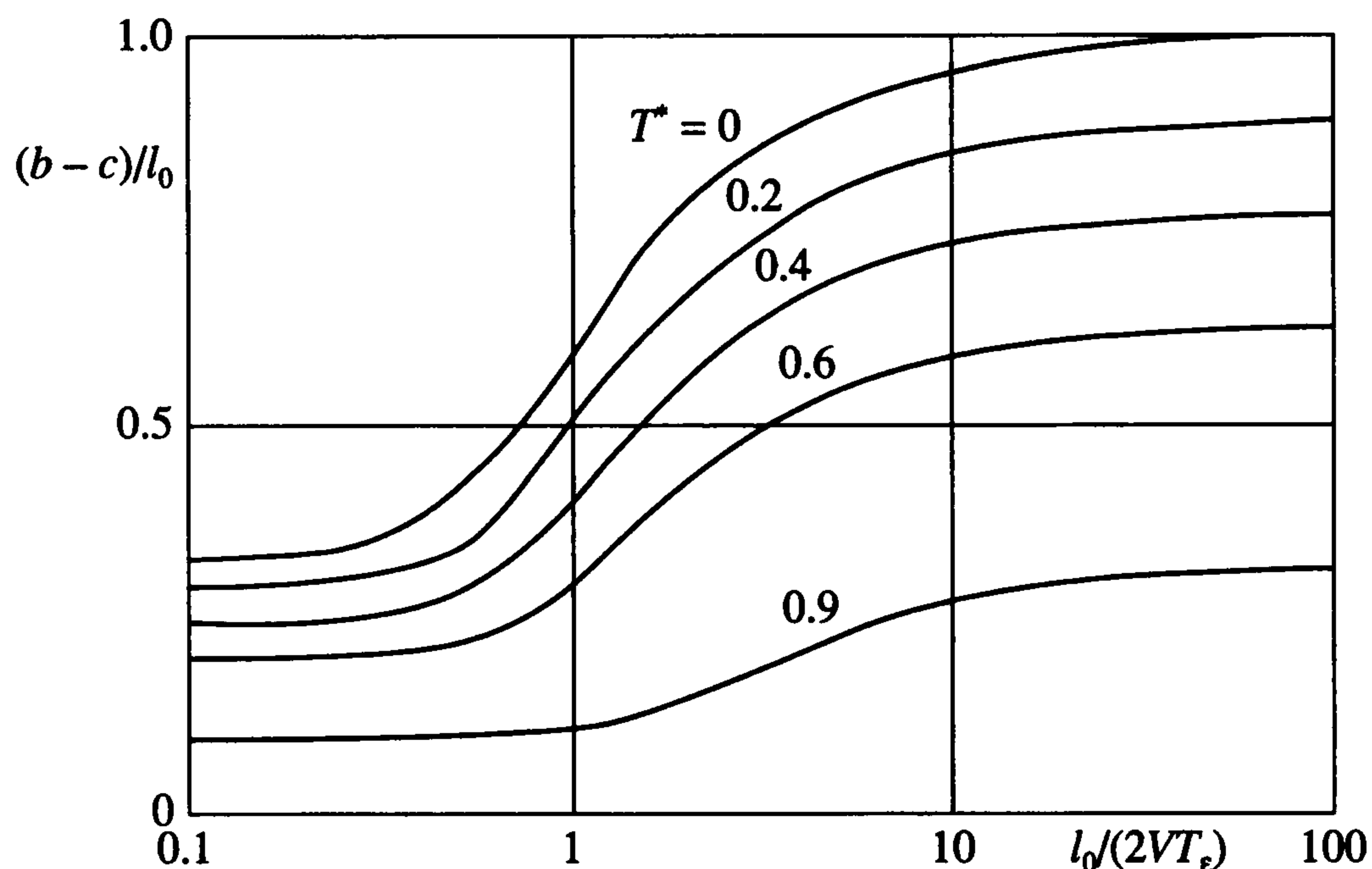
Исследование задачи [33] позволило выявить безразмерный параметр $\zeta_0 = l_0 / (2T_\varepsilon V)$, существенно влияющий на характер распределения давления, размер и смещение площадки контакта и т.д. Здесь $l_0 = \sqrt{8KRP}$ – ширина области контакта для упругих тел, характеризующихся упругими постоянными E и ν . На фиг. 3 приведены эпюры распределения давления $p(x) = -\sigma_y(x)$ при $\alpha = 5$ и разных значениях параметра ζ_0 . При низких скоростях качения, когда время прохождения области контакта больше времени последействия материала ($\zeta_0 \gg 1$), распределение давления и размер площадки контакта приближаются к значениям, соответствующим случаю упругого материала с длительным модулем упругости. При высоких скоростях ($\zeta_0 \ll 1$) распределение давления и размер площадки контакта вновь приближаются к значениям, соответствующим случаю упругого материала, но с мгновенным модулем упругости.



Фиг. 3



Фиг. 4

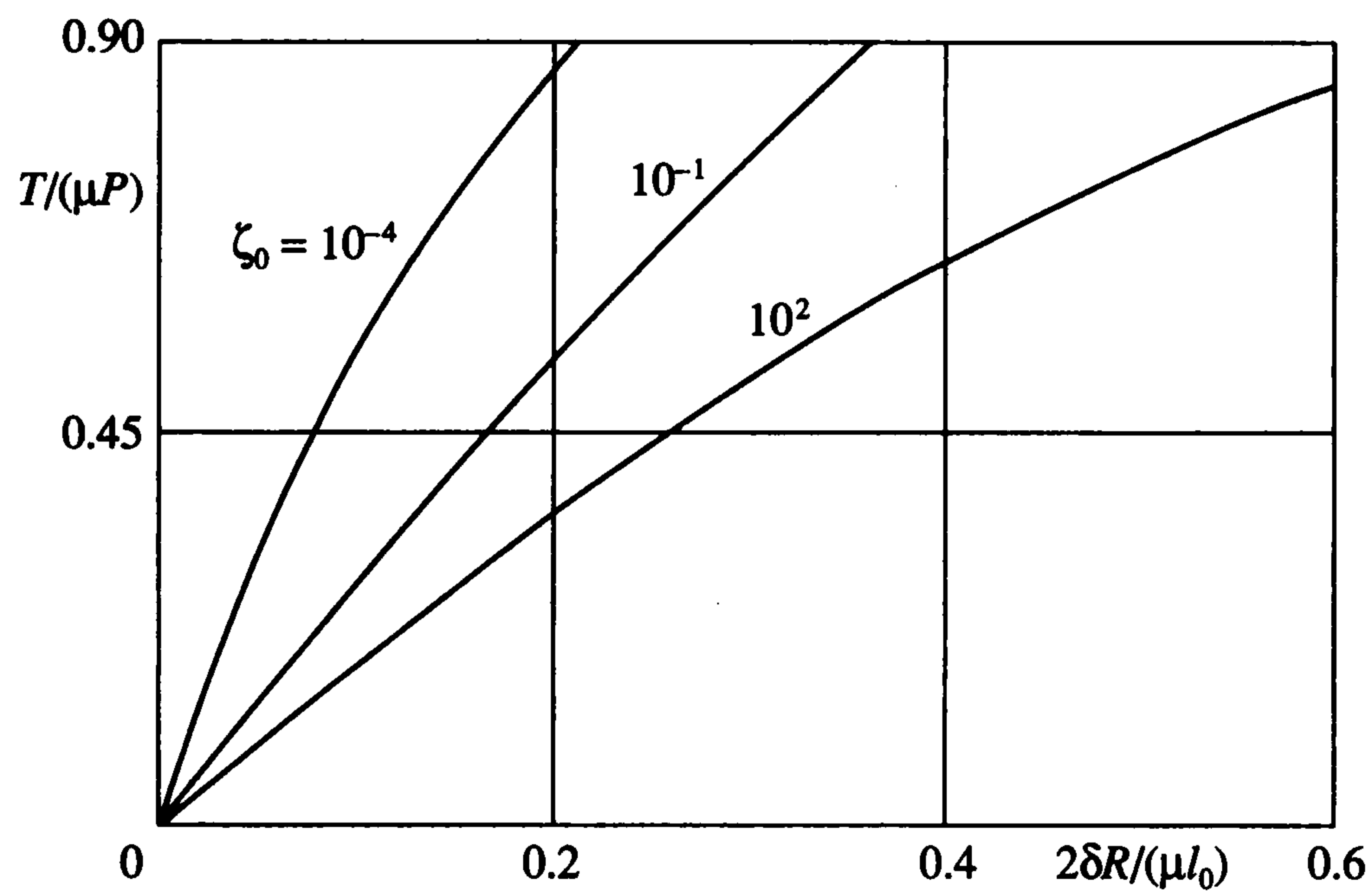


Фиг. 5

При $\zeta_0 \sim 1$ наблюдается наибольшее смещение площадки контакта относительно оси симметрии цилиндра, при этом несимметрия эпюры давления на ней также возрастает.

В результате несимметрии давления возникает момент M сопротивления качению. Характерная зависимость коэффициента трения качения $\mu_r = M/(PR)$ от параметра ζ_0 для случая свободного качения ($T = 0$) приведена на фиг. 4 для разных значений α . Из анализа результатов следует, что релаксация и последствие материалов взаимодействующих тел проявляются при качении, когда время прохождения области контакта соизмеримо со временем релаксации ($\zeta_0 \sim 1$), что совпадает с выводами работ [30, 31], а также с зависимостью силы трения качения от скорости движения катка, полученной А.Ю. Ишлинским [2].

Графики зависимости длины зоны сцепления от параметра ζ_0 , полученные [32, 33] при решении задачи о качении вязкоупругого цилиндра радиуса R по основанию из того же материала при наличии частичного проскальзывания в области контакта, представлены на фиг. 5 при разных значениях величины $T^* = T/(\mu P)$. Длина зоны сцепления возрастает с уменьшением T^* , а также с увеличением параметра ζ_0 .



Фиг. 6

На фиг. 6 приведены зависимости величины T^* от относительного проскальзывания δ (кривые проскальзывания) при разных значениях параметра ζ_0 , $T \geq 0$. Кривые построены при $\alpha = 10$ и разных значениях параметра ζ_0 . На основании результатов расчетов можно заключить, что при фиксированном значении $T/(\mu P)$ величина относительного проскальзывания уменьшается с уменьшением параметра ζ_0 (с ростом скорости V). При этом кривая, построенная при $\zeta_0 = 10^2$, практически совпадает с графиком функции (2.4), соответствующей качению упругого цилиндра с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν по основанию из того же материала.

Решение рассмотренной задачи [32] позволило изучить совместное влияние двух основных источников трения качения – последствий и релаксации материалов, а также частичного проскальзывания взаимодействующих поверхностей в области контакта (и соответственно коэффициента трения скольжения) – на контактные характеристики и коэффициент трения качения для частного случая одинаковых материалов взаимодействующих тел.

Известны также другие решения контактных задач в различных постановках о качении тел из вязкоупругих материалов [18, 34].

4. Роль тонких поверхностных слоев при трении качения. На характеристики трения значительное влияние оказывают свойства поверхности и поверхностных слоев, которые существенно отличаются от свойств основного материала. В реальных условиях (например, на железных дорогах) наблюдаемые коэффициенты проскальзывания ниже теоретически определенных, что объясняется, в частности, наличием на поверхностях взаимодействующих тел тонких пленок масел и разного рода загрязнений [35]. Для анализа взаимодействия поверхностей, покрытых тонкими твердыми слоями или пленками, используются решения контактных задач для слоистых сред. При этом реологические свойства поверхностных слоев учитываются при постановке контактных задач путем моделирования поверхностного слоя вязкоупругой средой. Методом преобразований Фурье была рассмотрена [36] задача в плоской постановке о движении нагрузки по границе вязкоупругой полосы, сцепленной с вязкоупругой полуплоскостью, и исследованы деформации и напряжения сдвига в слое и основании. Теоретически и экспериментально изучалось [37, 38] контактное взаимодействие при качении двух цилиндров, покрытых вязкоупругими слоями. В этих работах развиты численные методы определения напряжений в контактных задачах

для слоистых упругих и вязкоупругих тел. Заметим, что полученное А.Ю. Ишлинским решение задачи о качении жесткого цилиндра по вязкоупругому основанию [2] позволяет оценить влияние реологических свойств поверхностного слоя на силу сопротивления перекатыванию, если предположить, что модуль упругости основания много больше модуля упругости слоя (т.е. в предположении абсолютной жесткости основания).

Была рассмотрена [39, 40] контактная задача в плоской постановке для упругого цилиндра и основания, состоящего из вязкоупругой полосы 2 толщины h , сцепленной с упругой полуплоскостью 3 (фиг. 1). Цилиндр катится с постоянной линейной скоростью V и угловой скоростью ω . Контактующая поверхность цилиндра описывается функцией $f(x) = -x^2/(2R)$ (R – радиус цилиндра).

Для установившегося движения цилиндра в системе координат (x, y) граничные условия в области взаимодействия имеют вид (1.1)–(1.4). Для описания нормальной и тангенциальной податливости слоя в предположении, что толщина h вязкоупругого слоя много меньше ширины $(a + b)$ площадки контакта, использована одномерная модель Максвелла, а именно:

$$\dot{u}_x = \frac{h}{E_\tau} \left(\frac{\tau}{T_\tau} + \dot{\tau} \right), \quad \dot{u}_y = \frac{h}{E_n} \left(\frac{p}{T_n} + \dot{p} \right) \quad (4.1)$$

где u_x и u_y – смещения границы слоя по касательной и нормали к поверхности ($y = 0$), точка сверху означает производную по времени, $E_n(E_\tau)$ и $T_n(T_\tau)$ – модуль упругости и время релаксации слоя соответственно в направлении оси y (оси x). Эта модель является аналогом стержневой модели упругого тела, предложенной А.Ю. Ишлинским [3].

Для определения распределения контактного давления $p(\xi)$, длины L и смещения ε области контакта, а также максимального внедрения Δ_{\max} цилиндра в вязкоупругий слой получено [40] интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\int_{-1}^1 F(\xi') \left[\ln|\xi - \xi'| + \frac{\alpha_n}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \xi') - \frac{1 + \xi'}{2} \ln(1 + \xi') - \right. \\ \left. - \frac{1 - \xi'}{2} \ln(1 - \xi') + \frac{\alpha_n \xi'}{2} \right] d\xi' - \frac{\beta_n}{2} F(\xi) = \xi L, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (4.2)$$

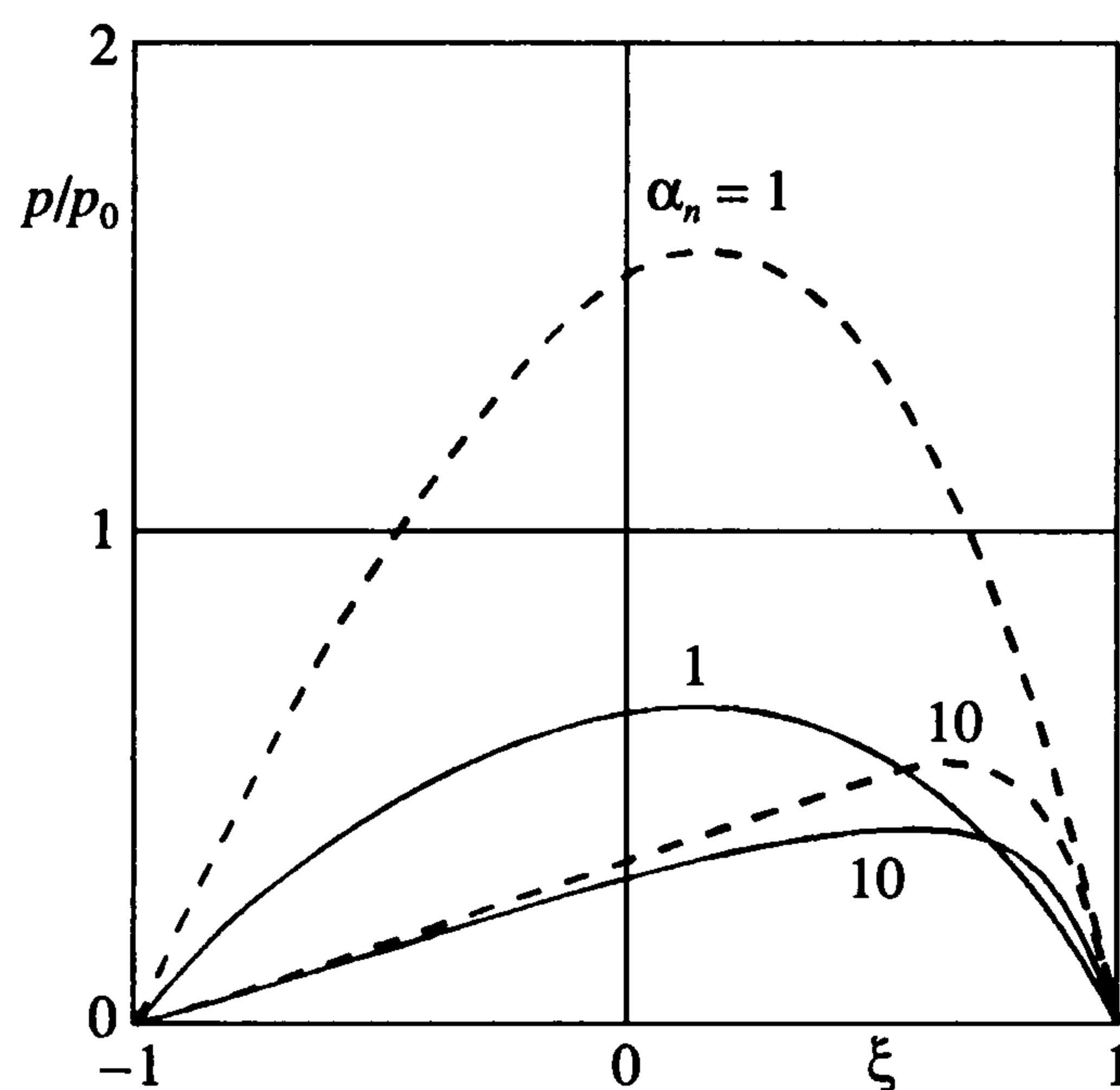
а также соотношения

$$\tilde{P} = \frac{2P}{\pi R E^*} = -L \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi, \quad F(\xi) = \tilde{p}'(\xi) \\ \varepsilon = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 F(\xi) [(1 + \xi) \ln(1 + \xi) + (1 - \xi) \ln(1 - \xi) - \alpha_n \xi] d\xi \quad (4.3)$$

$$\Delta_{\max} = \max_{-a < x < b} \frac{u_3(x)}{R} = L \max_{-1 < x < 1} \Phi(\xi)$$

где

$$\alpha_n = \frac{h\pi E^*}{2VE_n T_n}, \quad \beta_n = \frac{h\pi E^*}{2RE_n}, \quad L = \frac{a+b}{2R}, \quad \varepsilon = \frac{b-a}{a+b} \\ E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_3^2}{E_3} \right)^{-1}, \quad \tilde{p}(\xi) = \frac{2}{\pi E^*} p \left(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right) \quad (4.4)$$



Фиг. 7

Здесь E_i и ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона материалов цилиндра ($i = 1$) и основания ($i = 3$). Было приведено решение уравнения (4.2) и дан анализ результатов [39–41].

Заметим, что если пренебречь упругостью цилиндра и основания и определить давление в области контакта из решения уравнения (4.1) с граничными условиями (1.4), то получим следующее выражение для безразмерного контактного давления:

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{L}{\alpha_n} \left[\operatorname{cth} \frac{1}{\tilde{\zeta}} + \xi - \frac{\exp(\xi/\tilde{\zeta})}{\operatorname{sh}(1/\tilde{\zeta})} \right], \quad \tilde{\zeta} = \frac{\beta_n}{\alpha_n L} = \frac{2T_n V}{a + b} \quad (4.5)$$

где $\tilde{\zeta}$ – число Деборы, представляющее собой отношение времени релаксации T_n материала слоя ко времени, которое требуется для прохождения элементом половины ширины площадки контакта, т.е. $(a + b)/2$ (см. [18]). Выражение (4.5) определяет распределение контактных давлений в случае, когда податливость слоя в нормальном направлении много больше податливостей основания и цилиндра, т.е. $E_n/E^* \ll 1$.

На фиг. 7 представлены графики функции контактного давления $p(\xi)/p_0$, где $p_0 = E^*L/2$ – максимальное контактное давление Герца, построенные при $\beta_n = 0.1$ и разных значениях параметра α_n . Сплошные линии соответствуют общему случаю контактного взаимодействия упругих тел при наличии между ними вязкоупругого слоя, штриховые линии построены по формуле (4.5) в случае пренебрежения упругими свойствами индентора и основания. Расчеты проводились при постоянной ширине площадки контакта $L = 0.1$, при этом варьировалась нагрузка, действующая на цилиндр. Результаты показывают, что с уменьшением скорости V перемещения индентора, т.е. с увеличением параметра α_n (см. (4.4)), эпюра распределения давлений $p(\xi)$ становится более несимметричной. При фиксированном размере площадки контакта и заданных вязкоупругих характеристиках слоя контактные давления и их максимальные значения существенно зависят от упругих свойств индентора и основания при малых значениях параметра α_n (больших скоростях V). Однако при уменьшении скорости ($\alpha_n = 10$), различие между распределением давления в обоих случаях становится пренебрежимо малым. Таким образом, вязкоупругий слой оказывает определяющее влияние на распределение контактных давлений при низких скоростях движения.

На основании результатов расчетов сделан вывод, что с увеличением параметра $T_n V/R$ полуширина площадки контакта уменьшается и стремится к постоянному зна-

чению. При малых значениях параметра $T_n V/R$ длина площадки контакта возрастает существенно, особенно с увеличением параметра β_n , который зависит от толщины слоя и относительных упругих характеристик слоя и основания. С уменьшением времени релаксации T_n и уменьшением скорости V движения индентора возрастает смещение ϵ площадки контакта и максимальное внедрение Δ_{\max} цилиндра в вязкоупругий слой, что обусловлено проявлением реологических свойств поверхностного слоя. При увеличении времени релаксации или скорости V смещение ϵ площадки контакта становится пренебрежимо малым для всех значений параметра β_n .

Проведенный анализ распределения контактного давления, а также положения и размеров площадки контакта справедлив как при скольжении, так и при качении упругого цилиндрического индентора по упругому основанию, покрытому тонким вязкоупругим слоем.

Для определения распределения касательных напряжений $\tau(x)$ в области сцепления (Ω_a) получено следующее интегральное уравнение [39]:

$$-\frac{h}{VE_\tau T_\tau} \tau(x) + \frac{h}{E_\tau} \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^b \frac{\tau(x')}{x-x'} dx' = \delta - \frac{2\vartheta}{\pi E^*} p(x), \quad x \in \Omega_a \quad (4.6)$$

где

$$\vartheta = \frac{\pi E^*}{2} \left[\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{(1-2\nu_3)(1+\nu_3)}{E_3} \right]$$

Это уравнение было сведено [40] к следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода для определения функции $q(\zeta) = \tau'(\zeta)$:

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega_a \quad (4.7)$$

где

$$\varphi(\xi) = -\delta + \vartheta \tilde{p}(\xi) + \frac{\beta_\tau}{L} q(\xi) - \int_{-1}^1 \left[\ln|\xi - \xi'| + \frac{\alpha_\tau}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \xi') \right] q(\xi') d\xi' \quad (4.8)$$

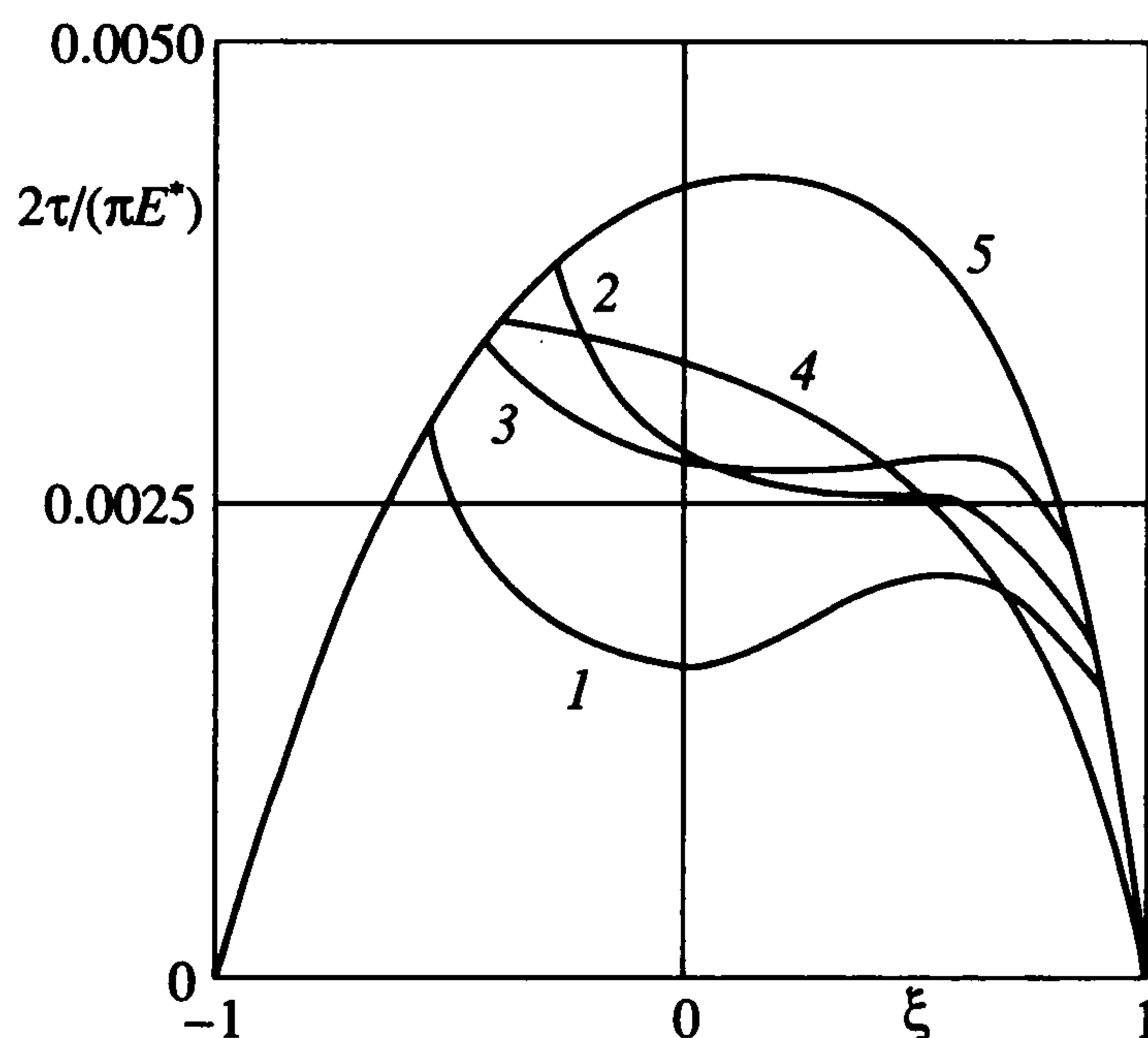
$$\tilde{\tau}(\xi) = \frac{2}{\pi E^*} \tau \left(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right), \quad \alpha_\tau = \frac{h\pi E^*}{2VE_\tau T_\tau}, \quad \beta_\tau = \frac{h\pi E^*}{2RE_\tau}$$

Кроме того, в области сцепления (Ω_a) тангенциальные напряжения удовлетворяют неравенству $|\tilde{\tau}(\xi)| < \mu \tilde{p}(\xi)$. Из уравнения (4.7) и условий, что в областях проскальзывания (Ω_s) тангенциальные напряжения противоположны направлению проскальзывания, т.е.

$$\tau(\xi) = \mu \tilde{p}(\xi) \operatorname{sgn} \varphi(\xi), \quad \xi \in \Omega_s \quad (4.9)$$

а в точках ξ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) перехода из одной зоны в другую, где $(k+1)$ – общее количество зон сцепления и проскальзывания, имеет место условие непрерывности напряжений, построен алгоритм расчета тангенциальных напряжений в области контакта, а также расположения и размеров зон сцепления и проскальзывания [39]. Для численного анализа полученных соотношений применялся итерационный процесс.

Задача определения тангенциальных напряжений существенно упрощается в предположении, что цилиндр и основание имеют одинаковые упругие постоянные ($\vartheta = 0$) и что модуль упругости слоя много меньше модуля упругости цилиндра и ос-



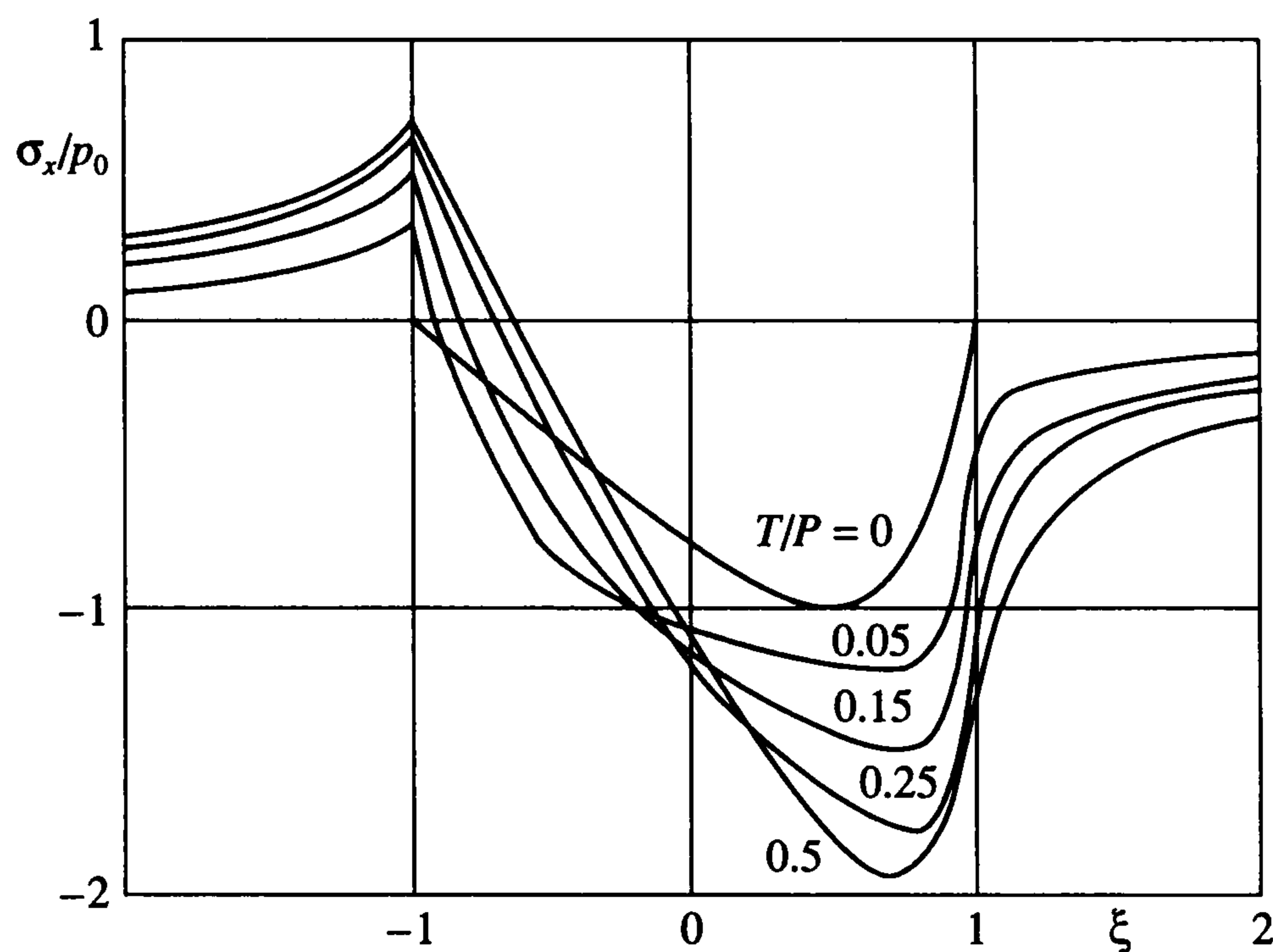
Фиг. 8

нования, т.е. $E_\tau/E^* \ll 1$. В этом случае задача сводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений и ее решение записывается в простом аналитическом виде [40].

Анализ решения показал, что в зависимости от величины относительного проскальзывания, коэффициента трения скольжения, механических характеристик слоя и условий взаимодействия (скорость, величины нагрузки и тангенциальной силы) область контакта может иметь две (сцепления и проскальзывания) или три (проскальзывания, сцепления, проскальзывания) зоны, что отличает решение от случая взаимодействия при отсутствии вязкоупругого слоя, когда существуют только две зоны (сцепления и проскальзывания) на площадке контакта при качении упругого цилиндра по основанию из того же материала ($\vartheta = 0$) [42].

Результаты расчета тангенциальных напряжений на площадке контакта катящегося цилиндра с основанием при наличии на нем поверхностного слоя, базирующиеся на анализе уравнений (4.7)–(4.9), представлены на фиг. 8. Свойства вязкоупругого слоя в этом анализе описываются параметром $\theta = T_\tau/T_n$, представляющим собой отношение времен релаксации слоя в тангенциальном и нормальном направлениях ($\theta = (\beta_\tau \alpha_n)/(\beta_n \alpha_\tau)$), а также безразмерными параметрами α_n , β_n и β_τ (см. (4.4) и (4.8)). Графики построены при $\beta_n = 0.1$, $\alpha_n = 1$, $\tilde{P} = 0.01$, $\mu = 0.1$, $\beta_\tau = 0.1$ и следующих комбинациях других параметров: $\tilde{T} = 0.6\mu\tilde{P}$, $\theta = 0.1$, $\vartheta = -0.4$ (кривая 1), $\tilde{T} = 0.8\mu\tilde{P}$, $\theta = 1$, $\vartheta = -0.4$ (кривая 2), $\tilde{T} = 0.8\mu\tilde{P}$, $\theta = 0.1$, $\vartheta = -0.4$ (кривая 3), $\tilde{T} = 0.8\mu\tilde{P}$, $\theta = 0.1$, $\vartheta = 0.4$ (кривая 4) и $\tilde{T} = \mu\tilde{P}$ (кривая 5). Результаты показывают, что с увеличением параметра θ возрастают значения максимальных тангенциальных напряжений на площадке контакта и уменьшается размер зоны сцепления. При тех же характеристиках слоя ($\beta_\tau = 0.1$ и $\theta = 0.1$) изменение упругих характеристик цилиндра и основания от $\vartheta = -0.4$ (кривая 3) к $\vartheta = 0.4$ (кривая 4) влечет за собой переход от трехзонного контакта к двухзонному. Кроме того, установлено, что с уменьшением значения тангенциальной силы \tilde{T} контакт переходит от полного скольжения (кривая 5) к трехзонному, а затем к двухзонному случаям.

Полученные распределения нормальных и тангенциальных напряжений на площадке контакта ($|\xi| \leq 1$) были использованы [43] для определения напряжений σ_x на



Фиг. 9

поверхности основания ($y = h$) для коэффициента трения $\mu = 0.5$ при $\alpha_n = 10$, $\tilde{\zeta} = 0.25$, $\tilde{\zeta}_\tau = 0.1$, $L = 0.1$ и разных значениях отношения T/P тангенциальной силы к нормальной (фиг. 9). Так же, как и при контакте без вязкоупругого слоя, максимальное растягивающее напряжение при коэффициенте трения, отличном от нуля, имеет место на краю области контакта при $x = -a$ ($\xi = -1$), а максимальное сжимающее – внутри области контакта. Значения этих максимумов увеличиваются с увеличением горизонтальной нагрузки, и следовательно, с увеличением относительного проскальзывания. Влиянием вязкоупругого слоя можно объяснить отсутствие угловых точек на кривых в местах перехода области сцепления в область проскальзывания, имеющих место на аналогичных кривых в задаче о качении цилиндра по упругому основанию без поверхностного слоя. Кроме того, при наличии вязкоупругого слоя максимальные значения растягивающих напряжений меньше, чем в его отсутствие, т.е. слой снижает значения максимальных напряжений, способных инициировать начало разрушения материала.

При $\tilde{T} = \mu \tilde{P}$ скольжение имеет место на всей площадке контакта. Случай $T = 0$ соответствует чистому качению. Заметим, что коэффициент трения качения для рассматриваемой модели вязкоупругого слоя (тело Максвелла) монотонно убывает с ростом параметра $T_n V/R$ и $\mu_r \rightarrow 0$ при $T_n V/R \rightarrow +\infty$.

Проведенный [39–41] анализ показывает, что несовершенная упругость поверхностного слоя оказывает существенное влияние на характер распределения контактных напряжений при скольжении и качении упругих тел, особенно при малых значениях параметра $T_n V/R$, при этом характер зависимости силы сопротивления относительно перемещению тел от скорости определяется реологическими свойствами поверхностного слоя, в частности, той моделью, которая выбрана для описания этих свойств. При использовании модели Кельвина эта зависимость существенно немонотонна, при этом максимальное значение коэффициента трения достигается при скоростях движения, при которых время прохождения индентором элементарного пятна контакта соизмеримо со временем запаздывания материала поверхностного слоя [33]. Результаты исследований [33, 43] также указывают на существенное влия-

ние свойств поверхностного слоя на распределение максимальных касательных и растягивающих напряжений внутри взаимодействующих тел.

Таким образом, теоретическое исследование контактного взаимодействия тел в условиях трения качения, у истоков которого лежат работы А.Ю. Ишлинского, шло по пути усложнения моделей контактирующих тел и условий взаимодействия. Полученные в этой области результаты позволяют изучить напряженное состояние взаимодействующих тел, что является важным для развития теории изнашивания и контактно-усталостного разрушения поверхностных слоев материалов при качении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Трение качения. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т математики и механики МГУ, 1938. 63 листа, 7 л. илл.
2. *Ишлинский А.Ю.* Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260.
3. *Ишлинский А.Ю.* Теория сопротивления перекачиванию (трение качения) и смежных явлений // Трение и износ в машинах. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. Т. 2. С. 255–264.
4. *Ишлинский А.Ю.* О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С. 3–15.
5. *Ишлинский А.Ю.* Механика: Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 623 с.
6. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. М.: Наука, 1986. Т. 1 Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. 359 с.; Т. 2 Механика упругих и абсолютно твердых тел. 415 с.
7. *Coulomb Ch.A.* Theorie des machines simples // Mem. Math. et de Phys. de l'Acad. Roy. Sci. 1875. Т. 10. Р. 161–331.
8. *Reynolds O.* On rolling friction // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1877. V. 166. P. 155–174.
9. *Петров Н.П.* Сопротивление поезда на железной дороге. СПб; Тип. В. Демакова, 1889. 371 с.
10. *Tabor D.* The mechanism of rolling friction // Phil. Mag. Ser. 7. 1952. V. 43. № 345. P. 1055–1059.
11. *Tomlinson G.A.* A molecular theory of friction // Phil. Mag. Ser. 7. 1929. V. 7. № 46. P. 905–939.
12. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1926. V. 112. № 760. P. 151–157.
13. *Poritsky H. V.* Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. № 2. P. 191–201.
14. *Cain B.S.* Discussion of the paper of Poritsky H.V. // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. № 4. P. 465.
15. *Глаголев Н.И.* Сопротивление перекачиванию цилиндрических тел // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 4. С. 318–333.
16. *Johnson K.L.* Tangential tractions and microslip in rolling contact // Rolling Contact Phenomena / Ed. Bidwell. New York: Elsevier, 1963. P. 25–28.
17. *Fromm H.* Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben // ZAMM. 1927. Bd. 7. H. 1. S. 27–58.
18. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. N. Y., etc.; Cambridge: Univ. Press, 1985 = Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
19. *Kalker J.J.* Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht, etc.: Kluwer, 1990. 314 p.
20. *Моссаковский В.И., Миццишин И.И.* Качение упругих тел // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 870–876.
21. *Kalker J.J.* A minimum principle of the law of dry friction, with application to elastic cylinders in rolling contact. Pt I–II. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 4. P. 875–887.
22. *Спектор А.А.* Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 1, С. 39–42.
23. *Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А., Федоренко Р.П.* Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 3/4. С. 61–102.

24. *Kalker J.J.* A strip theory for rolling with slip and spin // Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen. 1967. B70. № 1. P. 10–24.
25. *Dupuit A.J.E.J.* Sur le tirage des voitures et sur le frottement de roulement // Ann. des Ponts et Chaussées. 1842. V. 3. P. 261–335.
26. *May W.D., Morris E.L., Atack D.* Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. № 11. P. 1713–1724.
27. *Flom D.G., Bueche A.M.* Theory of rolling friction for spheres // J. Appl. Phys. 1959. V. 30, № 11. P. 1725–1730.
28. *Hunter S.C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 4. P. 611–617.
29. *Morland L.W.* A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 2. P. 345–352.
30. *Morland L.W.* Rolling contact between dissimilar viscoelastic cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 4. P. 363–376.
31. *Иванова Р.Я.* Качение вязко-упругого цилиндра по основанию из того же материала // ПМТФ. 1964. № 3. С. 179–184.
32. *Горячева И.Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. №. 925–933.
33. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
34. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
35. *Halling J., Al-Qishtaini M.A.* An experimental study of some of the factors affecting the contact conditions and the slip between a rolling ball and its track // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1967–1968, V. 182. № 37. Pt 1. P. 757–768.
36. *Ling F.F., Lai W.M.* Surface mechanics of layered media // Solid Contact and Lubrication/Eds. H.S. Cheng and L.M. Keer. N. Y.: ASME, 1980. P. 27–50.
37. *Kalker J.J.* Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58. № 3. P. 666–679.
38. *Braat G.F.M., Kalker J.J.* Theoretical and experimental analysis of the rolling contact between two cylinders coated with multilayered viscoelastic rubber // Contact Mechanics, Computational Techniques/Eds. M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia.: Contact Mechanics publ., 1993. P. 119–126.
39. *Sadeghi F., Goryacheva I.G.* Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // Wear. 1995. V. 184. № 2. P. 125–132.
40. *Горячева И.Г., Горячев А.П., Садеги Ф.* Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 634–641.
41. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht etc. Kluwer, 1998, 344 p.
42. *Спектор А.А.* О зонах проскальзывания и сцепления на участке контакта катящегося упругого цилиндра и основания из того же материала // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1975. Т. 28. № 6. С. 60–65.
43. *Горячева И.Г., Захаров С.М., Торская Е.В.* Влияние относительного проскальзывания и свойств поверхностного слоя на напряженное состояние упругих тел при трении качения // Трение и износ. 2003. Т. 24. № 1. С. 5–15.