УДК 532.51+532.59

© 2003 г. В. А. Городцов

АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Показано, что решения многих модельных нелинейных уравнений гидродинамического типа (включая уравнения Навье–Стокса теории вязкой жидкости) в виде локализованных волновых возмущений испытывают аномальное затухание и расширение диффузионного характера при действии гауссовых аддитивных силовых и мультипликативных параметрических шумов, случайным образом зависящих от времени. Продемонстрирована универсальность этой аномалии (независимость от конкретного вида уравнений и во многом от особенностей шума), являющейся отражением обобщенной галилеевской инвариантности уравнений гидродинамического типа и гауссовости случайных источников. Интегрируемость некоторых важных гидродинамических моделей позволила подтвердить общие заключения конкретными аналитическими результатами. Даны примеры выражений средних скоростей течения через функцию ошибок при действии случайных сил на алгебраические солитоны вполне интегрируемых уравнений: уравнения внутренних волн (уравнения Бенджамина – Оно), двумерного уравнения Кортевега–де Вриза (уравнения Кадомцева – Петвиашвили) и двумерного нелинейного уравнения Шредингера (уравнения Дэви – Стюартсона). Установлено, что для стохастических уравнений гидродинамического типа только в отсутствие аддитивных силовых шумов быстро затухающие мультипликативные шумы приводят к нормальной фиковской диффузии. Силовые шумы вызывают аномальную диффузию волновых возмущений, описывающуюся ричардсоновским законом (с кубической связью временного и квадрата пространственного масштабов). Полученный результат подтверждает универсальность закона Ричардсона, продемонстрированную ранее для многих турбулентных и волновых стохастических процессов [1, 2].

1. Диффузия частиц и локализованных волновых возмущений. Диффузия вещества имеет классический вид фиковской диффузии только в достаточно однородных средах с простой структурой при небольших отклонениях от состояния термодинамического равновесия. Для нее характерна квадратичная связь временных и пространственных масштабов

$$t \sim \lambda^2$$

В средах с усложненной структурой, неупорядоченных системах, при термодинамически сильно неравновесных турбулентных изменениях состояния масштабная связь меняет асимптотический вид

$$t^\gamma \sim \lambda^2, \quad \gamma \neq 1, \quad t \to \infty$$

Диффузия приобретает “аномальный” характер. Возможно как замедление диффузии (“субдиффузия” с $\gamma < 1$), так и ускорение ее (“супердиффузия” с $\gamma > 1$). В некоторых случаях асимптотические степенные зависимости меняются на логарифмические. Аномальная диффузия наблюдалась во многих средах с неупорядоченной структурой (аморфных твердых телах, расплавах и растворах полимеров, пористых средах, ионных суперпроводниках, биосистемах и др.), в турбулентных потоках жидкостей, для броуновских частиц в сдвиговых течениях, при хаотических режимах в динамических системах [3].

Степенное поведение, имеющее место в отсутствие преимущественных масштабов, возникает в средах фрактального строения, когда усложнение структуры повторяется при переходе от одного масштаба к следующему. Темп диффузии при фрактальном строении среды уменьшается из-за повторяющихся препятствий (типа сужений, тупиков, изгибов и т.п.) блужданию частиц на разных масштабах. Степенное подобие характерно для турбулентных потоков жидкостей с каскадом взаимодействующих разномасштабных движений. Турбулентная диффузия дает пример супердиффузии с известным законом Ричардсона $t^3 \sim \lambda^2$, обязанной перемешиванию с перекачкой энергии от одного масштаба к другому.

Наряду с повышенным вниманием в литературе к аномальной диффузии вещества заметный интерес вызвал вопрос о воздействии шумов на бегущие нелинейные волны, особенно в связи с вполне интегрируемыми уравнениями, допускающими полное аналитическое исследование. На основе метода обратной задачи рассеяния были сформулированы результаты для ряда стохастических уравнений с силовым и параметрическим шумом и установлен диффузионный характер изменений средних и моментных характеристик [4–9]. В рамках этих исследований диффузионное поведение увязывалось с интегрируемостью уравнений.

Ниже на примере диссипативных моделей сред гидродинамического типа, к которым относится вязкая жидкость, будет показано, что задача о средних характеристиках течения с зависящим от времени случайными силами и параметрическим скоростным шумом также ведет к уравнению диффузии. Рассмотренные далее модельные уравнения не являются, вообще говоря, вполне интегрируемыми. Демонстрируется, что такое приведение и характер диффузионной аномалии оказываются тесно связанными с групповой структурой модельных уравнений, с их обобщенной галилеевской инвариантностью и гауссовским характером внешних шумов. Полная интегрируемость привлекательна лишь благодаря возможности получения конкретных аналитических результатов. Средние характеристики независимо от индивидуальных черт исходных нелинейных уравнений (универсальность) оказываются удовлетворяющими уравнению диффузии с переменным коэффициентом диффузии. Будет проанализировано влияние цветных шумов с ближними и дальними корреляциями на характер аномалии. При этом ограничимся гауссовыми случайными источниками, зависящими от времени.

Здесь обсуждается только стохастичность, обязанная случайным внешним потокам и силам. Не учитывается стохастичность из-за случайности начальных условий и развития многоступенчатого каскада неустойчивостей гидродинамической системы. В случае вязкой жидкости последнее подразумевает, что рассмотрение ограничено нетурбулентными режимами течения.

2. Уравнения гидродинамического типа с источниками. Достаточно общие галилеевски инвариантные уравнения движения сплошной среды можно записать с учетом пульсирующих внешних сил и однородных течений в виде модельных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{U}(t)\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla p + \int K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Delta\mathbf{u}\,d\mathbf{y} + \mathbf{f} \tag{2.1}$$

При дельтаобразном интегральном ядре они сводятся к дифференциальным уравнениям Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (постоянная плотность положена равной единице). При таком же ядре и постоянном давлении получается векторная модель Бюргерса [10]

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{U}(t) \cdot \nabla \mathbf{u} = \eta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

Она приводится при потенциальном течении к уравнению Кардара – Паризи – Занга для потенциала [11] и к уравнению теплопроводности для логарифмического потенциала.

В одномерном варианте уравнение (2.1) охватывает многие, часто обсуждаемые случаи. Общая одномерная интегродифференциальная запись при постоянном давлении соответствует модели Уизема [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + U(t)\frac{\partial u}{\partial x} = \int K(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy + f$$

из которой при интегральном ядре в виде суммы дельта-функции и конечного числа ее производных получаются физически содержательные модельные дифференциальные уравнения [13, 14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + U(t)\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial^{k+2} u}{\partial y^{k+1}} + f$$

В частности, ограничиваясь суммой дельта-функции и ее второй производной, получаем уравнение Курамото – Сивашинского [15]. При ядре в виде суммы дельта-функции и ее первой производной – уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса [16], при ядре в виде производной дельта-функции – уравнение Кортевега – де Вриза [17, 18], при дельтаобразном ядре – одномерное уравнение Бюргерса. Наконец, при ядрах $K(x) \sim P[1/x]$ и $K(x) \sim P[\mathrm{ctg}\pi x/(2h) - \mathrm{sgn} x]$ получаем вполне интегрируемые интегродифференциальные уравнения: уравнение Бенджамина – Оно и уравнение для внутренних волн в бассейне конечной глубины [18].

Если сила зависит от времени, то с помощью замены переменных

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_0(t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, t) + \mathbf{u}_0(t), \quad \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = \mathbf{f}(t), \quad \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{u}_0(t) + \mathbf{U}(t) \tag{2.2}$$

соответствующей переходу в ускоренно движущуюся систему координат, можно исключить из уравнения внешний поток и силу. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \int K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Delta\mathbf{v}d\mathbf{y} \tag{2.3}$$

Этим устанавливается связь между решениями стохастического уравнения (2.1) со случайной силой и однородным потоком (параметрическим шумом) и детерминированного уравнения (2.3). Замене (2.2) можно придать вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(t) = \exp(-\mathbf{x}_0(t)\nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$
$$\mathbf{x}_0(t) = \int_0^t (\mathbf{U}(\tau) + (t-\tau)\mathbf{f}(\tau))d\tau, \quad \mathbf{u}_0(t) = \int_0^t \mathbf{f}(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

используя оператор стохастического сдвига и полагая $\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{u}_0(0) = 0$. Отклонение скоростей от "фоновых" пульсаций $\mathbf{u}_0(t)$ представляется в виде произведения случайного и детерминированного сомножителей, что удобно для получения соотношений для средних характеристик.

3. Сжимаемая жидкость, мелкая вода и нелинейное уравнение Шредингера. Более общие галилеевски инвариантные модели сжимаемых сред рассматриваются аналогично. Так, для сжимаемой изэнтропической жидкости стохастическое уравнение движения вместе с уравнением сохранения массы и следствием изэнтропичности (w – энтальпия)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}+\mathbf{U}(t))\nabla\mathbf{u} = -\nabla w+\int K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Delta\mathbf{u}d\mathbf{y}+\mathbf{f}(t)\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\mathbf{u}+\mathbf{U}(t))\nabla\rho+\rho(\nabla\mathbf{u}) = 0, \quad w = w(\rho)\end{aligned} \tag{3.1}$$

с помощью замены переменных, расширяющей замену (2.2),

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}+\mathbf{x}_0(t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi},t)+\mathbf{u}_0(t), \quad \rho(\mathbf{x},t) = \mathrm{P}(\boldsymbol{\xi},t)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = \mathbf{f}(t), \quad \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{u}_0(t)+\mathbf{U}(t)$$

приводится к уравнениям без пульсирующих источников, т.е. решение стохастических уравнений сводится к решению детерминированных уравнений.

Как известно, для сжимаемого идеального газа с постоянным отношением теплоемкостей, равным двум, когда $w(\rho) = -\kappa\rho$, в отсутствие диссипации и дисперсии ($K = 0$) газодинамические уравнения сводятся к уравнениям классической мелкой воды

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}+\mathbf{U}(t))\cdot\nabla\mathbf{u} = \kappa\nabla h+\mathbf{f}(t), \quad \frac{\partial h}{\partial t}+(\mathbf{u}+\mathbf{U}(t))\cdot\nabla h+h\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{3.2}$$

Роль плотности переходит к глубине жидкости ($\rho \to h$), а пульсирующие источники $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{U}(t)$ можно убрать введенной выше заменой переменных.

Уравнениям мелкой воды родственны другие физически важные уравнения – нелинейные уравнения Шредингера. Непосредственной подстановкой проверяется, что с помощью амплитудно-фазовой замены переменных, преобразованием Маделунга (первоначально им пользовались для гидродинамической записи уравнений квантовой механики [19, 20])

$$\psi = ae^{i\varphi}, \quad a = |\psi| = \sqrt{h}, \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi, \quad \varphi = -i\ln(\psi/|\psi|)$$

нелинейное уравнение Шредингера для комплексной пси-функции

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\mathbf{U}(t)\cdot\nabla\psi+\frac{1}{2}\nabla^2\psi+\mathbf{x}\mathbf{f}(t)\psi+\kappa|\psi|^2\psi-\frac{\nabla^2|\psi|}{2|\psi|}\psi = 0 \tag{3.3}$$

преобразуется в уравнения классической мелкой воды. Если амплитудные изменения гораздо медленнее фазовых, последним членом уравнения можно пренебречь, и в отсутствие случайных источников приходим к знаменитому нелинейному уравнению Шредингера с кубической нелинейностью, вполне интегрируемому при одном пространственном измерении.

Уравнениям мелкой воды с диссипацией и дисперсией соответствуют уравнения для пси-функции с большей нелинейностью и более высокого порядка. Например, интегрируемой "классической системе Буссинеска"

$$\frac{\partial u}{\partial t}+uu_x+h_x = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}+(uh)_x = \mu u_{xxx}$$

преобразованием Маделунга ставится в соответствие уравнение вида

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\psi_{xx}-|\psi|^2\psi-\frac{|\psi|_{xx}}{2|\psi|}\psi-\frac{\mu}{2\psi}\left(\ln\frac{\psi}{|\psi|}\right)_{xxxx} = 0$$

4. Диффузионное выравнивание возмущений. Если ограничиться статистически изотропными гауссовыми источниками, то такими же будут линейно зависящие от них характеристики $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$. Тогда осреднение оператора случайных сдвигов в соотношении (2.4) дает

$$\langle\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle = \exp\left(\frac{\langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle}{2d}\Delta\right)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{4.1}$$

при учете следствий изотропии и гауссовости случайных процессов $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{f}(t)$

$$\langle\mathbf{U}\rangle = \langle\mathbf{f}\rangle = 0,\quad \langle U_iU_j\rangle = d^{-1}\langle\mathbf{U}^2\rangle\delta_{ij},\quad (f_if_j) = d^{-1}\langle\mathbf{f}^2\rangle\delta_{ij},\quad \langle\mathbf{x}_0\rangle = 0$$

$$\langle\exp(-\mathbf{x}_0(t)\cdot\nabla)\rangle = \exp\left(\frac{\langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle}{2d}\Delta\right)$$

Здесь d – размерность задачи.

Дифференцированием выражения (4.1) по времени убеждаемся, что при стационарном исходном распределении (до включения источников) средняя скорость удовлетворяет уравнению диффузии с переменным коэффициентом

$$\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial t} = D(t)\Delta\langle\mathbf{u}\rangle,\quad D(t)\equiv\frac{1}{2d}\frac{\partial\langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle}{\partial t} \tag{4.2}$$

При учете статистической связи статистически однородного силового и скоростного источников в силу соотношения (2.4) находим

$$\langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle = \int_0^t(t-\tau)\left[2R_U(\tau)+2tC(\tau)+\frac{1}{3}(2t^2-t\tau-\tau^2)R_f(\tau)\right]d\tau$$

$$R_U(\tau)\equiv\langle\mathbf{U}(0)\cdot\mathbf{U}(\tau)\rangle,\quad R_f(\tau)\equiv\langle\mathbf{f}(0)\cdot\mathbf{f}(\tau)\rangle,\quad C(\tau)\equiv\langle\mathbf{U}(0)\cdot\mathbf{f}(\tau)\rangle$$

$$D(t) = \frac{1}{d}\int_0^t R_U(\tau)d\tau+\frac{1}{d}\int_0^t(2t-\tau)C(\tau)d\tau+\frac{t}{d}\int_0^t(t-\tau)R_f(\tau)d\tau$$

Для дельта-коррелированных случайных источников (белых шумов) имеем

$$\begin{gathered}R_f(t) = a_f\delta(t),\quad R_U(t) = a_U\delta(t),\quad C(t) = \gamma\sqrt{a_Ua_f}\delta(t),\quad \gamma\le 1\\ \langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle = \frac{1}{3}a_ft^3+\gamma\sqrt{a_Ua_f}t^2+a_Ut\end{gathered} \tag{4.3}$$

и асимптотическое поведение среднеквадратичного уширения распределений скорости при больших временах оказывается нормальным или аномальным в зависимости от отсутствия или присутствия силового шума

$$\langle\mathbf{x}_0^2(t)\rangle\sim\begin{cases}t, & a_f = 0\\ t^3, & a_f\neq 0\end{cases},\quad t\to\infty \tag{4.4}$$

Соответственно асимптотика для коэффициента диффузии будет

$$D(t) = \frac{a_U}{2d} + \frac{\gamma}{d}\sqrt{a_U a_f}\,t + \frac{a_f}{2d}t^2 \sim \begin{cases} \text{const}, & a_f = 0 \\ t^2, & a_f \neq 0 \end{cases}, \quad t \to \infty \tag{4.5}$$

так что он остается постоянным лишь при скоростном белом шуме (диффузию с переменным коэффициентом именуют также "странной диффузией" [21]). В общем случае при больших временах основной вклад вносит силовой шум, а при малых основным оказывается параметрический шум. С ростом времени диффузионный масштаб превзойдет начальный размер возмущения и станет определяющим в дальнейшем.

Как ясно из соотношений (4.4), (4.5), корреляция двух шумов в первом приближении не сказывается на асимптотическом виде дисперсии и коэффициента диффузии. Поэтому для упрощения ограничимся обсуждением некоррелированных между собой скоростных и силовых шумов.

Асимптотический результат при цветном шуме с ближними корреляциями остается таким же, как и при белом. Для примера экспоненциально спадающих корреляций источников

$$R_f(t) = \frac{a_f}{2\theta_f}\exp\left(-\frac{|t|}{\theta_f}\right), \quad R_U(t) = \frac{a_U}{2\theta_U}\exp\left(-\frac{|t|}{\theta_U}\right)$$

получаем после интегрирования

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle &= a_U\left[t - \theta_U + \theta_U\exp\left(-\frac{t}{\theta_U}\right)\right] + \\ &+ a_f\left\{\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}\theta_f t^2 - \theta_f^2 t\exp\left(-\frac{t}{\theta_f}\right) + \theta_f^3\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_f}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$D(t) = \frac{a_U}{2d}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_U}\right)\right] + \frac{a_f}{2d}t\left[1 - \theta_f + \theta_f\exp\left(-\frac{t}{\theta_f}\right)\right] \tag{4.7}$$

Отсюда при больших временах следуют точно такие же асимптотические формулы (4.4), (4.5) с преимущественным влиянием силового шума.

В случае дальних корреляций, спадающих степенным образом,

$$R_U(t) = b_U|t|^{-\beta}, \quad R_f(t) = b_f|t|^{-\gamma}, \quad |t| > \theta$$

для среднеквадратичного уширения и мгновенного коэффициента диффузии при действии того или иного источника соответственно получаем

$$\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle = b_U\begin{cases} a_0 t^{2-\beta} + a_1 t + a_2, & \beta \neq 1, 2 \\ b_{\beta 0}t^{2-\beta}\ln(t/\theta) + b_{\beta 1}t + b_{\beta 2}, & \beta = 1, 2 \end{cases}$$

$$D(t) = \frac{b_U}{d}\begin{cases} \kappa_0 t^{1-\beta} + \kappa_1, & \beta \neq 1 \\ \kappa_2\ln(t/\theta) + \kappa_3, & \beta = 1 \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle = b_f\begin{cases} c_0 t^{4-\gamma} + c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3, & \gamma \neq 1, 2, 4 \\ d_{\gamma 0}t^{4-\gamma}\ln(t/\theta) + d_{\gamma 1}t^3 + d_{\gamma 2}t^2 + d_{\gamma 3}, & \gamma = 1, 2, 4 \end{cases}$$

$$D(t) = \frac{b_f}{d}\begin{cases}\chi_0 t^{3-\gamma} + \chi_1 t^2 + \chi_2 t, & \gamma \neq 1, 2\\ \chi_{\gamma 0} t^{3-\gamma}\ln(t/\theta) + \chi_{\gamma 1} t^2 + \chi_{\gamma 2} t, & \gamma = 1, 2\end{cases}$$

Коэффициенты здесь выражаются через степени масштабной характеристики θ и интегральные моменты корреляционных функций источников.

В отсутствие статистической связи источников вклады от каждого просто суммируются. Из этого следует, что при действии обоих шумов диффузионное уширение локализованных распределений скорости при больших временах имеет аномальный характер супердиффузии с преобладающим влиянием аддитивного силового шума

$$\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle \sim \begin{cases} t^3, & \gamma > 1\\ t^3 \ln t, & \gamma = 1\\ t^{4-\gamma}, & 0 < \gamma < 1\end{cases}, \quad t \to 1 \tag{4.8}$$

Если же присутствует только скоростной шум, то диффузионное уширение будет нормальным или аномальным (супердиффузионным) в зависимости от скорости убывания корреляции этого мультипликативного шума

$$\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle \sim \begin{cases} t, & \beta > 1\\ t \ln t, & \beta = 1\\ t^{2-\beta}, & 0 < \beta < 1\end{cases}, \quad t \to \infty \tag{4.9}$$

Последний результат был получен ранее [8] в частном случае стохастического уравнения Кортевега – де Вриза.

Степенные корреляции удовлетворительны лишь при больших временах. Однако нетрудно привести пример с приемлемым поведением корреляций при всех временах со степенным затуханием при больших

$$R_U(t) = R_U(0)|1 + t/\theta|^{-\beta}, \quad R_f(t) = R_f(0)|1 + t/\theta|^{-\gamma}$$

Дисперсия и коэффициент диффузии тогда выражаются через степенные и логарифмические функции. При скоростном шуме, например, получаем

$$\frac{\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle}{2R_U(0)\theta^2} = \begin{cases}\left(1 + \frac{t}{\theta}\right)\ln\left(1 + \frac{t}{\theta}\right), & \beta = 1\\ \frac{1}{\beta - 1}\left[\frac{t}{\theta} + \frac{1}{2-\beta}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{2-\beta}\right)\right], & \beta \neq 1\end{cases}$$

Асимптотический результат для $t \gg \theta$ совпадает с соотношением (4.9).

Темп убывания средних скоростей можно оценить по изменению ширины распределений и первому интегралу уравнений движения. При нулевой средней силе осредненное уравнение (2.1) допускает интеграл осредненного количества движения (точнее говоря, интеграл приобретает такой смысл после умножения на постоянную плотность в несжимаемом случае, а в сжимаемой модели (3.1) его постоянство возможно лишь при определенных ограничениях, например, для потенциального течения)

$$\int \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rangle d\mathbf{x} = \text{const}$$

Если этот интеграл отличен от нуля, то для изменения амплитуды локализованного возмущения имеем $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rangle \sim (\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle)^{-d/2}$. Действительно, пользуясь соотношением (4.1), переписанным в виде разложения Фурье

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \exp\left(-k^2\frac{\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle}{2d}\right) < \mathbf{u}\langle \mathbf{k}, 0\rangle > \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})d\mathbf{k}$$

при больших временах, получаем асимптотическую оценку

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\rangle \approx \left(\frac{2\pi}{d}\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle\right)^{-d/2}\exp\left(-\frac{d}{2}\frac{\mathbf{x}^2}{\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle}\right)\int \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\rangle d\mathbf{x}$$

Такой гауссовский вид принимает волновой пакет с ограниченным ненулевым полным импульсом на конечной стадии вырождения возмущений независимо от их формы в начальный момент. Скорость затухания амплитуды возмущений будет, однако, выше при большей размерности задачи. Наиболее медленным затухание оказывается согласно (4.8), (4.9) в режиме одномерной нормальной диффузии, вызываемой параметрическим шумом с достаточно быстро (быстрее первой степени времени) спадающими корреляциями. Когда полный импульс обращается в нуль, вырождение возмущения ускоряется. Асимптотический вид зависимости возмущения от времени определяется тогда мультипольными характеристиками начального распределения.

Для решений уравнений Кадомцева – Петвиашвили (КП) в форме солитонов встречаются оба случая. В отличие от многомерных модельных уравнений вида (2.1), (3.1) в случае уравнений КП нет равноправия в пространственных переменных в связи с относительной медленностью поперечных изменений. Стохастические уравнения КП можно записать в виде системы

$$\partial u/\partial t + uu_x + U(t)u_x + u_{xxx} = p_y + f(t), \quad p_x = \pm u_y \tag{4.10}$$

которая в отсутствие шумов называется уравнениями КП 1 при положительном знаке в правой части второго уравнения и КП 2 при отрицательном знаке. Такая гидродинамическая модель также обладает обобщенной галилеевской инвариантностью, и ее уравнения с помощью прежнего преобразования (2.2) приводятся к однородному виду без случайных источников. В силу этого для средней скорости остаются верными соотношение (4.1) и уравнение диффузии (4.2), а для среднеквадратичной ширины распределения скорости и коэффициента диффузии справедливы результаты (4.4)–(4.9). Определяющим в аномальном характере диффузии по-прежнему будет силовой шум.

Уравнения КП 2 имеют устойчивые решения в виде одномерных солитонов sech^2-формы, совпадающих с солитонами Кортевега – де Вриза. Поскольку для таких солитонов интегральный импульс отличен от нуля, высота их уменьшается как $\langle x_0^2(t)\rangle^{-1/2}$. Среднеквадратичное уширение $\langle x_0^2(t)\rangle$ следует асимптотическим зависимостям (4.4), (4.9), (4.9). В случае уравнений КП 1 устойчивыми оказываются двумерные солитоны со степенным пространственным убыванием (алгебраические солитоны), для которых полный импульс обращается в нуль. В итоге асимптотическому уширению осредненного солитона с прежним темпом $\sim\langle x_0^2(t)\rangle$ будет соответствовать более быстрое убывание амплитуды $\sim\langle x_0^2(t)\rangle^{-1}$. Действительно, точным решением уравнений КП 1 в отсутствие шумов является алгебраический солитон, движущийся в направлении оси x,

$$v(x-c_0t, Y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{12}{x-c_0t+iY}+\text{c.c.}, \quad Y \equiv \sqrt{c_0y^2+3/c_0}$$

При включении шумов он расплывается со временем, и осредненное поле скоростей выражается через интеграл ошибок [9]

$$\langle u(x, y, t)\rangle = \frac{12}{\langle x_0^2(t)\rangle}[1-\sqrt{\pi}\varsigma\exp(\varsigma^2)\operatorname{erfc}\varsigma]+\text{c.c.}, \quad \varsigma \equiv \frac{Y+i(x-c_0t)}{(2\langle x_0^2(t)\rangle)^{1/2}}$$

Для такого решения интеграл по x обращается в нуль и имеет место указанное выше ускоренное затухание.

Другое также вполне интегрируемое уравнение – уравнение Бенджамина – Оно

$$\frac{\partial v}{\partial t}+vv_x+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v_{yy}}{y-x}dy = 0$$

допускает решение в виде одномерного алгебраического солитона

$$v(x-c_0t) = \frac{2}{1/c_0+i(x-c_0t)}+\text{c.c.}$$

В этом случае полный импульс отличен от нуля (равен 4π) и при действии обоих типов шумов такой солитон затухает медленнее [6]

$$\langle u(x, t)\rangle = \left(\frac{\pi}{2\langle x_0^2(t)\rangle}\right)^{1/2}\exp(\xi^2)\operatorname{erfc}\xi+\text{c.c.}, \quad \xi \equiv \frac{1/c_0+i(x-c_0t)}{(2\langle x_0^2(t)\rangle)^{1/2}}$$

при том же темпе среднеквадратичного расширения ($\sim\langle x_0^2(t)\rangle$).

Еще один пример с простым аналитическим результатом дает солитонное решение вполне интегрируемых уравнений Дэви – Стюартсона. Модель Дэви – Стюартсона представляет собой многомерное обобщение нелинейного уравнения Шредингера, в котором две пространственные переменные в отличие от уравнения типа (3.3) входят несимметричным образом. В присутствии силового и параметрического источников эти уравнения имеют вид системы

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+iU(t)\psi_x+\frac{1}{2}(\varepsilon\psi_{xx}+\psi_{yy})+[-V+\kappa|\psi|^2]\psi = -xf(t), \quad \varepsilon V_{xx}-V_{yy} = 2\varepsilon\kappa|\psi|^2_{xx}$$

Здесь $\kappa = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (при $\varepsilon = +1$ имеем модель ДС I, а при $\varepsilon = -1$ – модель ДС II). Как и в случае более симметричного уравнения с помощью аналогичной (2.2) замены переменных

$$\psi(x, y, t) = \Psi(x-x_0(t), y, t)e^{i\delta(x, y, t)}, \quad V(x, y, t) = W(x-x_0(t), y, t)$$

$$x_{0t} = U(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau, \quad \delta(x, y, t) = x\int_0^t f(\tau)d\tau+\delta_0(t), \quad 2\delta_{0t} = U^2(t)-x_{0t}^2(t)$$

устанавливается связь между решениями системы стохастических уравнений и решениями соответствующих детерминированных уравнений с исчезающими шумами.

Уравнения ДС II ($\varepsilon = -1$) без случайных источников при $\kappa = -1$ допускают решение в виде солитонов с алгебраической огибающей (амплитуда спадает степенным образом во всех направлениях) [22]

$$A(X, Y) = \frac{2|\nu|}{X^2+Y^2}, \quad X \equiv x - 4t\mathrm{Im}\lambda, \quad Y \equiv \sqrt{(y+4t\mathrm{Re}\lambda)^2 + |\nu|^2}$$

При гауссовском характере шумов аналогично предыдущему результат для осредненной интенсивности солитона выражается через функцию ошибок

$$\langle|\psi|^2\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\frac{|\nu|^2}{2Y^3}(1 - Y\partial_Y)\exp(\varsigma^2)\mathrm{erfc}\,\varsigma + \text{c.c.}, \quad \varsigma = \frac{Y+iX}{2\sqrt{\tau}}$$

$$2\tau \equiv \langle x_0^2(t)\rangle = \int_0^t\left[2(t-\tau')R_U(\tau') + (t-\tau')^2\frac{2t+\tau'}{3}R_f(\tau')\right]d\tau'$$

Изменение этой средней характеристики описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial\langle|\psi|^2\rangle}{\partial t} = D(t)\langle|\psi|^2\rangle_{XX}, \quad D(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial\langle x_0^2(t)\rangle}{\partial t}$$

В соответствии с аномальным характером диффузии уширение интенсивности сигнала происходит по асимптотическому ($t \to \infty$) закону $\langle x_0^2(t)\rangle \sim t^3$ при силовом белом или цветном шуме с ближними (быстро спадающими) корреляциями. При параметрическом шуме такого типа диффузия оказывается нормальной ($\langle x_0^2(t)\rangle \sim t$). При цветных шумах с медленно спадающими корреляциями диффузия солитонов всегда аномальна.

В многомерных ситуациях анизотропия внешних источников шума может приводить к анизотропии аномальной диффузии, и возможны случаи, когда направления можно различить по супер-, суб- или нормальной диффузии.

Предположим, что мультипликативный и аддитивный силовой источники являются статистически анизотропными однородными с нулевыми средними, не коррелированными между собой. Тогда после осреднения соотношений (2.4), справедливых и в этой ситуации, получим обобщение уравнения диффузии

$$\frac{\partial\langle\mathbf{u}\rangle}{\partial t} = D_{\alpha\beta}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\langle\mathbf{u}\rangle, \quad D_{ij}(t) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial\langle x_{0i}(t)x_{0j}(t)\rangle}{\partial t}$$

Недиагональный тензор диффузии отражает анизотропию диффузии. При одноосной анизотропии шумов, когда выделена ось $\mathbf{n}$, корреляционные тензоры источников имеют вид

$$\langle U_i(0)U_j(t)\rangle = R_{\text{II}}(t)n_in_j + R_\perp(t)(\delta_{ij} - n_in_j)$$

$$\langle f_i(0)f_j(t)\rangle = F_{\text{II}}(t)n_in_j + F_\perp(t)(\delta_{ij} - n_in_j)$$

и для коэффициента диффузии в силу линейности связей также имеем

$$D_{ij}(t) = D_{\text{II}}(t)n_in_j + D_\perp(t)(\delta_{ij} - n_in_j)$$

Если ограничиться примером поперечной ($F_{\text{II}}(t) = 0$) случайной силы, то на продольную диффузию влияет только мультипликативный скоростной шум

$$D_{\text{II}}(t) = \int_0^t R_{\text{II}}(\tau)d\tau, \quad D_\perp(t) = \int_0^t R_\perp(\tau)d\tau + t\int_0^t(t-\tau)F_\perp(\tau)d\tau$$

и в соответствии с соотношениями (4.3)–(4.9) реализуется ситуация нормальной продольной диффузии при быстро затухающих корреляциях шумов и аномальной поперечной диффузии. Если же случайная сила является продольной ($F_{\perp}(t) = 0$), то, наоборот, возможна нормальная поперечная диффузия с продольной супердиффузией.

Диффузионный характер изменений имеет место и для многих высших моментальных функций. Например, для произвольной степени уклонения скорости от пульсирующего фонового значения $\mathbf{u}_0(t)$ получаем

$$|\delta\mathbf{u}|^n \equiv (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(t))^n = \mathbf{v}^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t), t) = \exp(-\mathbf{x}_0(t)\nabla)\mathbf{v}^n(\mathbf{x}, t)$$

и после осреднения в случае статистически изотропных источников приходим к формуле для моментов, совершенно аналогичной (4.1). Из нее следует то же уравнение диффузии (4.2) для высших моментов.

5. Заключение. Таким образом, в рамках моделей гидродинамического типа удается установить универсальный характер выравнивания первоначально локализованных возмущений при совместном действии статистически однородных (и изотропных в многомерном случае) силовых и параметрических гауссовских шумов. Изменение средних и ряда моментных характеристик описывается линейным уравнением диффузии независимо от конкретных особенностей нелинейных уравнений модели. Такое поведение связано с инвариантностью обсуждаемых моделей относительно обобщенной группы преобразований Галилея и с гауссовским характером случайных внешних шумов. Интегрируемость модельных уравнений лишь помогает получить обозримые аналитические результаты, гарантируя существование решения в виде локализованной бегущей волны (солитона) в отсутствие шумов.

При совместном действии аддитивного и мультипликативного шумов, зависящих только от времени, определяющую роль в аномальном характере диффузии играет аддитивный силовой шум произвольного спектрального состава (с произвольной скоростью затухания корреляций). Аномалия при быстром затухании силовых корреляций (при дельта-коррелированности и затухании быстрее первой степени времени) приобретает простой универсальный вид закона Ричардсона $\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle \sim t^3$. Аномалия диффузии усиливается (имеем тогда $\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle \sim t^3 \ln t$ при $\gamma = 1$ или $\sim t^{4-\gamma}$ при $\gamma < 1$), если силовые корреляции затухают обратно пропорционально первой степени времени или еще медленнее. При действии только мультипликативного (параметрического) шума диффузия становится нормальной ($\langle \mathbf{x}_0^2(t)\rangle \sim t$) при достаточно быстром убывании корреляций. Исключительными здесь также являются гиперболическое или более медленное убывание.

В многомерных задачах при анизотропных шумах в зависимости от типа анизотропии силового источника диффузия может быть нормальной в одном направлении при супердиффузии в направлении, ортогональном ему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Е.А.* Метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 44. Вып. 6. С. 2159–2168.
2. *Голицын Г.С.* Методические основы теории турбулентности и морского волнения // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 438–445.
3. *Bouchaud J.P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // Phys. Rep. 1990. V. 195. № 4-5. P. 127–293.
4. *Wadati M.* Stochastic Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Jap. 1983. V. 52. № 8. P. 2642–2648.

5. *Маймистов А.И., Маныкин Э.А.* Распространение солитонов в неоднородных и случайных средах специального класса // Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30. № 4. С. 91–97.
6. *Городцов В.А.* Диффузионное расплывание локализованных гидродинамических возмущений под действием случайных сил // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 211–217.
7. *Абдуллаев Ф.Х.* Динамический хаос солитонов. Ташкент: Фан. 1990. 167 с.
8. *Iizuka T.* Anomalous diffusion of solitons in random system // Phys. Lett. Ser. A. 1993. V. 181. № 1. P. 39–42.
9. *Городцов В.А.* Стохастическое уравнение Кадомцева – Петвиашвили // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 6. С. 1270–1279.
10. *Burgers J.M.* The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht: Reidel, 1974. 179 p.
11. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C.* Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. № 9. P. 889–892.
12. *Whitham G.B.* Variational methods and applications to water waves // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1967. V. 299. № 1456. P. 6–25.
13. *Николаевский В.Н.* Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 6. С. 1321–1324.
14. *Nikolaevskii V.N.* Dynamics of viscoelastic media with internal oscillators // Lecture Notes in Engineering. Berlin etc.: Springer, 1989. № 39. P. 210–221.
15. *Hyman J.M., Nikolaenko B., Zaleski S.* Order and complexity in the Kuramoto – Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // Physica. Ser. D. 1986. V. 23. № 1–3. P. 265–292.
16. *Johnson R.S.* A non-linear equation incorporating damping and dispertion // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 1. P. 49–60.
17. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980. 319 с.
18. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM. 1981. 425 p. = *Абловиц М.Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
19. *Madelung E.* Quantentheorie in Hydrodynamischer Form // Z. Phys. 1926. Bd. 40. H. 3/4. S. 322–326.
20. *Madelung E.* Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. B.: Springer. 1953 = *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1960. 618 с.
21. *Balescu R.* Strange diffusion // Cond. Matter Phys. 1998. V. 1. № 4. P. 815–833.
22. *Arkadiev V.A., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C.* Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey – Stewartson II equation // Physica. Ser. D. 1989. V. 36. № 1–2. P. 189–197.

Москва

Поступила в редакцию
10.IX.2002