

УДК 531.36:534.1

© 2003 г. Ю. Ф. Голубев

РОБОТ-ЭКВИЛИБРИСТ НА ЦИЛИНДРЕ

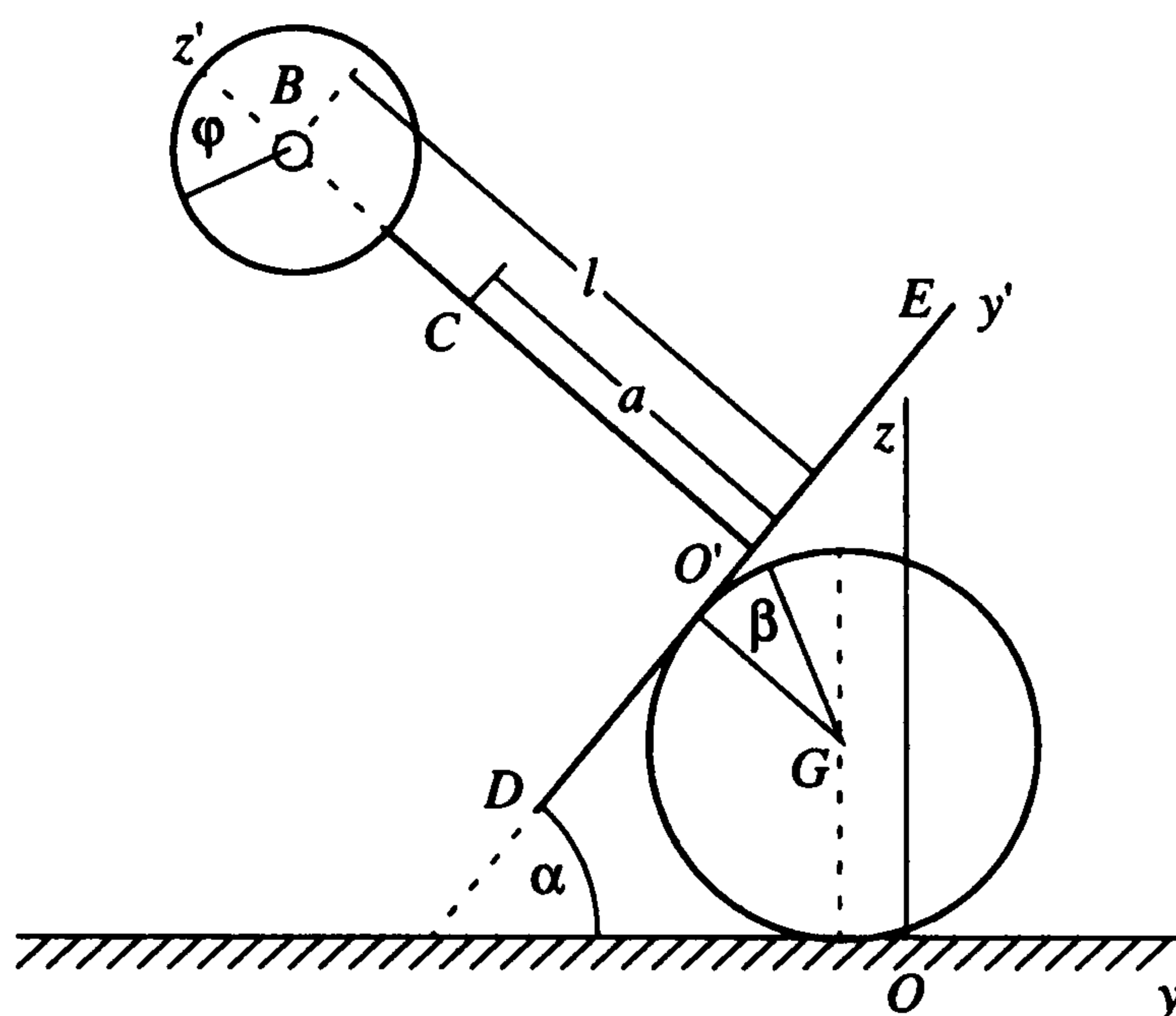
Исследуется задача о стабилизации равновесия робота, поставленного на цилиндр, который может катиться по горизонтальной плоскости. Во всех внешних контактах отсутствует проскальзывание. Управление осуществляется за счет электромеханического углового ускорения маховика, расположенного на роботе. Изучены стационарные движения. В нелинейной постановке проанализированы основные приемы стабилизации робота в вертикальном положении. Показано, что соответствующая линейная система полностью управляема. Построен регулятор по координатам и скоростям с насыщением. Найдена область стабилизируемости системы в связи с ограниченностью управляющей функции. Изучено влияние погрешностей измерений. Выполнен расчет характеристик управления для некоторых конкретных параметров робота.

Проблема активной стабилизации механических систем в окрестности неустойчивого положения равновесия имеет многочисленные приложения. Среди них выделим задачу обеспечения равновесия перевернутого маятника. Необходимость ее решения возникает, в частности, при формировании устойчивой ходьбы и бега шагающих машин с небольшим числом ног.

Существуют разнообразные методы обеспечения устойчивости равновесия перевернутого маятника, например путем подходящего выбора частоты вибрации точки подвеса [1, 2] или за счет управления ее горизонтальным смещением [3]. Был изучен также [4–7] принцип обеспечения равновесия перевернутого физического маятника с неподвижной точкой подвеса за счет управления угловым ускорением маховика, закрепленного на маятнике с помощью цилиндрического шарнира; требуемое вращение маховика осуществлялось электродвигателем, закрепленным на маятнике.

В отличие от упомянутых механических систем рассматриваемый ниже робот не имеет непосредственного шарнирного соединения с неподвижной горизонтальной опорной плоскостью, а взаимодействует с ней посредством горизонтально расположенного опорного кругового цилиндра. Робот опирается сверху на цилиндр плоской доской, обеспечивающей отсутствие проскальзывания робота относительно цилиндра и исключаяющей возможность опрокидывания робота в направлении оси опорного цилиндра. В результате возможно только плоскопараллельное движение робота в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Цилиндр в свою очередь не может проскальзывать относительно опорной плоскости. Маховик представляет собой центрально-симметричное тело, прикрепленное в центре симметрии к роботу с помощью цилиндрического шарнира с осью, параллельной оси опорного цилиндра. Маховик приводится в движение электромотором, закрепленным на корпусе робота. Управление реализуется электрическим напряжением на обмотках двигателя. Данная система имеет три степени свободы, одна из которых (угол вращения маховика) непосредственно управляется электродвигателем, а две другие (угол наклона робота к горизонтальной плоскости и его качение по опорному цилиндру) неустойчивы.

1. Уравнения движения. Доска DE опирается на однородный прямой круговой горизонтальный цилиндр, сечение которого плоскостью чертежа представляет собой круг с центром в точке G (фигура). Опорный цилиндр G имеет радиус R , массу m_0 , центральный момент инерции J_0 , лежит на горизонтальной плоскости и может катиться по ней без проскальзывания. Доска DE без проскальзывания может перека-



тываться по опорному цилиндру. К доске в точке O' жестко прикреплен перпендикулярный к ней стержень. В точке B к стержню на расстоянии l от доски прикреплен маховик массы m , который может вращаться относительно стержня на угол φ . Центр масс маховика расположен в точке B , а его центральный момент инерции равен J_m . Маховик приводится в движение электроприводом. Коэффициент редукции от маховика к ротору электромотора равен γ , а момент инерции ротора равен J_u . Общий центр масс доски DE и стержня $O'B$ вместе с закрепленными на нем деталями лежит в точке C на стержне $O'B$. Расстояние $O'C$ равно a . Общая масса доски DE и стержня $O'B$ вместе с закрепленными на нем деталями равна M , а их суммарный центральный момент инерции равен J .

Угол между плоскостью доски DE и опорной горизонтальной плоскостью обозначим α . Возьмем сечение опорного цилиндра плоскостью чертежа (фигура). Это сечение ограничено окружностью \mathcal{L} с центром в точке G . Пусть β – угол между направлением из G в некоторую фиксированную точку окружности \mathcal{L} и направлением из G в точку касания отрезка DE с этой окружностью. Предположим, что при $\alpha = \beta = 0$ стержень $O'B$, занимая вертикальное положение, проектируется в точку опоры цилиндра с плоскостью. Начало O неподвижной системы координат Oyz совместим с точкой опоры цилиндра на горизонтальной плоскости при $\alpha = \beta = 0$. Ось Oy направим горизонтально, а ось Oz – вертикально, как показано на фигуре. В системе координат $O'y'z'$, связанной с роботом, ось $O'y'$ направим вдоль отрезка DE в сторону точки E , ось $O'z'$ – вдоль отрезка $O'B$ в сторону точки B .

С учетом введенных обозначений абсолютные координаты (y_0, z_0) точки O' , (y_b, z_b) точки B и (y_c, z_c) точки C можно выразить формулами

$$\begin{aligned} y_0 &= -R[\alpha + \sin\alpha - \beta(1 + \cos\alpha)], & z_0 &= R(1 + \cos\alpha + \beta \sin\alpha) \\ y_b &= y_0 - l \sin\alpha, & z_b &= z_0 + l \cos\alpha \\ y_c &= y_0 - a \sin\alpha, & z_c &= z_0 + a \cos\alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приняв во внимание, что $\psi = \alpha - \beta$ – угол вращения опорного цилиндра, кинетическую энергию системы можно представить следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(a'_{\alpha\alpha} \dot{\alpha}^2 + a'_{\beta\beta} \dot{\beta}^2 + a_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 - 2a'_{\alpha\beta} \dot{\alpha}\dot{\beta} + 2a_{\alpha\varphi} \dot{\alpha}\dot{\varphi}) \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 a'_{\alpha\alpha} &= 2b(1 + \cos\alpha) + c(\beta^2 + 2\beta\sin\alpha) + d \\
 a'_{\beta\beta} &= 2c(1 + \cos\alpha) + e, \quad a_{\varphi\varphi} = J_m + \gamma^2 J_u \\
 a'_{\alpha\beta} &= k(1 + \cos\alpha) + c\beta\sin\alpha + e, \quad a_{\alpha\varphi} = J_m + \gamma J_u \\
 b &= R(M + m)(R + z'_c), \quad c = (M + m)R^2 \\
 d &= Ma^2 + ml^2 + J + J_m + J_u + e, \quad e = J_0 + m_0 R^2
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$$k = R(M + m)(2R + z'_c), \quad z'_c = (aM + lm)/(M + m)$$

Силовая функция системы имеет вид

$$\bar{U} = -\frac{g}{R}[b\cos\alpha + c(1 + \beta\sin\alpha)] \tag{1.4}$$

где g – ускорение силы тяжести.

Выберем углы α, β, φ в качестве лагранжевых координат и составим систему дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned}
 a'_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} - a'_{\alpha\beta}\ddot{\beta} &= -a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} + I\left(\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{R}\right) - 2c(\beta + \sin\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} \\
 -a'_{\alpha\beta}\ddot{\alpha} + a'_{\beta\beta}\ddot{\beta} &= (c\beta - I)\dot{\alpha}^2 + 2c\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha - \frac{gc}{R}\sin\alpha \\
 a_{\alpha\varphi}\ddot{\alpha} + a_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} &= Q, \quad I = b\sin\alpha - c\beta\cos\alpha
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Здесь Q – обобщенная сила, работающая на изменении угла φ .

Функция

$$f(\gamma) = \frac{a_{\alpha\varphi}}{a_{\varphi\varphi}} = \frac{j + \gamma}{j + \gamma^2}; \quad j = \frac{J_m}{J_u}$$

выражает влияние маховика на движение системы. Для $\gamma^* = -j$ имеем $f(\gamma^*) = 0$. Это единственный корень функции $f(\gamma)$. При

$$\gamma = \gamma_1 = -j - \sqrt{j(1 + j)}$$

функция $f(\gamma)$ достигает минимума, а при

$$\gamma = \gamma_2 = -j + \sqrt{j(1 + j)}$$

она достигает максимума, причем

$$\gamma_1 < \gamma^* < 0 < \gamma_2, \quad \min f(\gamma) = f(\gamma_1) = \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \max f(\gamma) = f(\gamma_2) = \frac{1}{2\gamma_2}$$

Кроме того,

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} f(\gamma) = +0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} f(\gamma) = -0$$

Величинами максимума и минимума $f(\gamma)$ можно управлять за счет подходящего выбора моментов инерции маховика и ротора двигателя. Так, если увеличивать от-

ношение момента инерции маховика к моменту инерции ротора двигателя, то $\max f(\gamma) \rightarrow 1$, а $\min f(\gamma) \rightarrow -0$, и теоретически $\min f(\gamma)$ можно сделать сколь угодно малым по абсолютной величине.

При $\gamma^* < \gamma \leq \gamma_2$ функция $f(\gamma)$ монотонно возрастает от значения $f(\gamma^*) = 0$ до значения $f(\gamma_2) > 1$. Крайнюю точку γ^* указанного диапазона изменения γ следует исключить, так как при $\gamma = \gamma^*$ теряется влияние управления на углы α , β системы (1.5).

Изменяя подходящим образом величину $\ddot{\phi}$, можно обеспечить различные режимы движения робота в целом. Рассмотрим частные случаи.

1°. Потребуем, например, чтобы угол α был постоянным во все время движения ($\dot{\alpha} \equiv 0$). Первые два уравнения (1.5) примут вид

$$-a'_{\alpha\beta}\ddot{\beta} = -a_{\alpha\phi}\ddot{\phi} + \frac{g}{R}I, \quad \ddot{\beta} = \frac{gc \sin \alpha}{Ra'_{\beta\beta}}$$

Первое из них служит условием согласования для определения функции $\ddot{\phi}$, а из второго следует, что угол β будет меняться при $\alpha > 0$ равнозамедленно (опорный цилиндр на фигуре движется с постоянным положительным угловым ускорением, доска DE имеет ускорение, направленное вниз, а ускорение точки контакта доски с опорным цилиндром, взятое относительно доски, направлено вверх). При $\alpha < 0$ угол β будет меняться равноускоренно (опорный цилиндр на фигуре движется с постоянным отрицательным угловым ускорением, по-прежнему доска DE имеет ускорение, направленное вниз, тогда как ускорение точки контакта доски с опорным цилиндром, взятое относительно доски, направлено вверх).

Таким образом, подбирая подходящее значение α , можно обеспечить управление относительным положением точки контакта доски DE и опорного цилиндра. Например, если требуется приблизить указанную точку контакта к прямой BO' (фигура), то при $\beta > 0$ (точка контакта имеет отрицательную абсциссу в осях $O'y'z'$) следует выбрать $\alpha > 0$, а в случае $\beta < 0$ (точка контакта имеет положительную абсциссу в осях $O'y'z'$) достаточно взять $\alpha < 0$.

2°. Если $\alpha = 0$, то тогда окажется, что $\ddot{\beta} = 0$. Это означает, что доска DE , будучи горизонтальной, равномерно смещается вправо или влево с постоянной начальной скоростью, а опорный цилиндр совершает соответствующее вынужденное движение. Условие согласования в этом случае принимает вид

$$\ddot{\phi} = -\frac{gc\beta}{Ra_{\alpha\phi}}$$

т.е. угловое ускорение маховика должно быть пропорционально величине β и будет постоянным, если β постоянно. В частности, оно будет равным нулю, если $\beta = 0$.

3°. Из сказанного выше ясно, что при $Q = 0$ движение по закону

$$\alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv 0, \quad \dot{\phi} \equiv \text{const}$$

будет стационарным движением системы. Его можно пытаться сделать устойчивым, подбирая соответствующее управление угловым ускорением $\ddot{\phi}$.

4°. Переход от одного постоянного значения α к другому постоянному его значению можно осуществлять целенаправленно, задав специальным образом функцию $\ddot{\alpha}(t)$. Такие режимы в сочетании с режимами, соответствующими случаю 1°, могут оказаться полезными для обеспечения устойчивого движения системы в окрестности стационарной точки. Если $\ddot{\alpha}(t)$ – заданная функция времени, то первое уравнение

системы (1.5) дает по-прежнему условие согласования, а второе полностью определяет закон изменения угла β , причем это уравнение можно переписать в виде

$$a'_{\beta\beta}\ddot{\beta} = c\beta[(1 + \cos\alpha)\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\sin\alpha] + \left(2c\dot{\alpha}\dot{\beta} - b\dot{\alpha}^2 - \frac{gc}{R}\right)\sin\alpha + [k(1 + \cos\alpha) + e]\ddot{\alpha} \quad (1.6)$$

Оно оказывается линейным относительно β с коэффициентами, известным образом зависящими от времени.

Закон изменения угла α в малой окрестности значений $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ зададим с помощью уравнения

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0 \quad (1.7)$$

что означает гармоническое покачивание доски DE около горизонтального положения, и этот закон может быть использован для перевода робота из одного наклонного положения в другое.

В уравнении (1.6) учтем равенство (1.7) и пренебрежем членами второго и выше порядка малости по α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$. Тогда получим

$$(4c + e)\ddot{\beta} = -\frac{gc}{R}\alpha + (2k + e)\ddot{\alpha} \quad (1.8)$$

Пусть в момент времени t_0 начала перевода доски из положения с углом наклона $\alpha(t_0) = \alpha_0$ и угловой скоростью $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ реализовались значения $\beta(t_0) = \beta_0$, $\dot{\beta}(t_0) = \dot{\beta}_0$. Соответствующее решение уравнения (1.8) примет вид

$$\beta - \beta_0 = \frac{1}{4c + e} \left(\frac{gc}{R\omega^2} + 2k + e \right) (\alpha - \alpha_0) + (t - t_0)\dot{\beta}_0 \quad (1.9)$$

Предположим, что в конечный момент времени t_1 перевода доски в другое наклонное положение требуется обеспечить равенства $\alpha(t_1) = -\alpha_0$ и $\dot{\alpha}(t_1) = 0$. Из соотношения (1.9) с учетом того, что $t_1 - t_0 = \pi/\omega$, найдем приближенную формулу для приращения угла β за время маневра

$$\beta(t_1) - \beta_0 = -2\alpha_0 \frac{1}{4c + e} \left(\frac{gc}{R\omega^2} + 2k + e \right) + \frac{\pi\dot{\beta}_0}{\omega} \quad (1.10)$$

Видно, что влияние члена, связанного с угловой скоростью $\dot{\beta}_0$, можно сделать сколь угодно малым за счет увеличения ω (уменьшения времени переходного процесса), тогда как член, содержащий α_0 , нельзя таким образом сделать сколь угодно малым. На него влияет амплитуда маневра по α , увеличивая абсолютную величину отклонения β . Поэтому маневры переворота со слишком большой амплитудой угла α могут оказаться не всегда приемлемыми из-за задевания пола доской.

Необходимость в указанном маневре возникает, например, если в некоторый момент t_0 оказалось, что

$$\alpha_0 > 0, \quad \beta_0 < 0, \quad \dot{\beta}_0 < 0$$

Это означает, что доска DE слишком низко опустилась, и ее можно вернуть к положению равновесия, лишь перевернув так, чтобы значения угла α стали отрицательными. Аналогичным представляется случай, когда

$$\alpha_0 < 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \dot{\beta}_0 > 0$$

2. Линейная система. Рассмотрим уравнения линейного приближения в окрестности решения $\alpha = 0, \beta = 0$:

$$a_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta}\ddot{\beta} + a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{g}{R}(b\alpha - c\beta), \quad -a_{\alpha\beta}\ddot{\alpha} + a_{\beta\beta}\ddot{\beta} = -\frac{gc}{R}\alpha \quad (2.1)$$

$$a_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} + a_{\alpha\varphi}\ddot{\alpha} = Q$$

где

$$a_{\alpha\alpha} = 4b + d, \quad a_{\alpha\beta} = 2(b + c) + e, \quad a_{\beta\beta} = 4c + e \quad (2.2)$$

Пусть система не управляется: $Q = 0$. Один из корней характеристического уравнения неуправляемой системы $\lambda_1 = 0$. Два другие находятся из квадратного уравнения

$$\Delta_0\lambda^2 + \frac{ga_{\varphi\varphi}}{R}(2ca_{\alpha\beta} - ba_{\beta\beta})\lambda - \frac{g^2c^2a_{\varphi\varphi}}{R^2} = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\Delta = a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 = 4R^2[Mm(l-a)^2 + (M+m)(J+J_m+J_u)] + (Ma^2 + ml^2 + J + J_m + J_u)(J_0 + m_0R^2)$$

$$\Delta_0 = a_{\varphi\varphi}\Delta - a_{\alpha\varphi}^2a_{\beta\beta}$$

причем Δ_0 – определитель матрицы кинетической энергии системы, а Δ – определитель первых двух уравнений системы (2.1), отличный от нуля при любых ненулевых параметрах робота.

Видим, что Δ_0 квадратично зависит от коэффициента редукции γ :

$$\Delta_0 = J_u(\Delta - J_u a_{\beta\beta})\gamma^2 - 2J_m J_u a_{\beta\beta}\gamma + J_m(\Delta - J_m a_{\beta\beta})$$

Дискриминант \mathcal{D} этого квадратного трехчлена имеет вид

$$\mathcal{D} = -J_m J_u \Delta \{4R^2[Mm(l-a)^2 + (M+m)J] + (Ma^2 + ml^2 + J)e\} < 0$$

Поэтому при любых значениях параметров робота будет $\Delta_0 > 0$. Следовательно, уравнение (2.3) имеет один отрицательный корень: $\lambda_2 < 0$ и один положительный: $\lambda_3 > 0$. В целом при отсутствии управления система (2.1) имеет одну нейтральную главную координату, очевидно, связанную с наличием маховика, одну устойчивую главную координату и одну неустойчивую. Один из характеристических показателей положителен, три из них имеют действительную часть, равную нулю, и один отрицателен. Это обстоятельство отличает рассматриваемую систему от изученных ранее [7].

Систему (2.1) можно разрешить относительно $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$ и привести ее к виду

$$\ddot{\alpha} = -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}\bar{u}, \quad \ddot{\beta} = -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}\bar{u} \quad (2.4)$$

где \bar{u} выражается формулой

$$\bar{u} = a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} - \frac{gb}{R}\alpha + \frac{gc}{R}\beta \quad (2.5)$$

и может на данном этапе исследования рассматриваться как управление системой.

3. Синтез закона управления. Приняв \bar{u} в качестве управления, исследуем свойство управляемости системы (2.4), (2.5) по переменным α , β и ϕ . С этой целью представим ее в стандартной форме

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}\bar{u} \quad (3.1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

$$a_{31} = -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}, \quad a_{41} = -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}, \quad a_{51} = \frac{gb}{Ra_{\alpha\phi}}, \quad a_{52} = -\frac{gc}{Ra_{\alpha\phi}}$$

$$b_3 = -\frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}, \quad b_4 = -\frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}, \quad b_5 = \frac{1}{a_{\alpha\phi}}$$

Для матрицы управляемости $\mathcal{U} = (\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}^2\mathcal{B}, \mathcal{A}^3\mathcal{B}, \mathcal{A}^4\mathcal{B})$ [8] найдем

$$\det \mathcal{U} = -b_3^2 a_{52} (b_3 a_{41} - b_4 a_{31})^3$$

причем

$$b_3 a_{41} - b_4 a_{31} = \frac{gc}{R\Delta^2} (a_{\beta\beta} a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\beta}^2) = \frac{gc}{R\Delta} > 0$$

Следовательно, при неограниченном \bar{u} система (3.1) обладает свойством полной управляемости.

Возьмем \bar{u} в виде [9]

$$\bar{u} = \kappa_1 \alpha + \kappa_2 \beta + \kappa_3 \dot{\alpha} + \kappa_4 \dot{\beta} + \kappa_5 \phi \quad (3.2)$$

так, чтобы положение равновесия стало асимптотически устойчивым по координатам α , β , ϕ . Линейная система (3.1) запишется тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= (a_{31} + \kappa_1 b_3) \alpha + \kappa_2 b_3 \beta + \kappa_3 b_3 \dot{\alpha} + \kappa_4 b_3 \dot{\beta} + \kappa_5 b_3 \phi \\ \ddot{\beta} &= (a_{41} + \kappa_1 b_4) \alpha + \kappa_2 b_4 \beta + \kappa_3 b_4 \dot{\alpha} + \kappa_4 b_4 \dot{\beta} + \kappa_5 b_4 \phi \\ \ddot{\phi} &= (a_{51} + \kappa_1 b_5) \alpha + (a_{52} + \kappa_2 b_5) \beta + \kappa_3 b_5 \dot{\alpha} + \kappa_4 b_5 \dot{\beta} + \kappa_5 b_5 \phi \end{aligned} \quad (3.3)$$

а соответствующее характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{13} \kappa_3 + c_{14} \kappa_4 + c_{15} \kappa_5, & a_2 &= c_{21} \kappa_1 + c_{22} \kappa_2 + c_{20} \\ a_3 &= c_{34} \kappa_4 + c_{35} \kappa_5, & a_4 &= c_{42} \kappa_2, & a_5 &= c_{55} \kappa_5 \end{aligned} \quad (3.5)$$

причем

$$\begin{aligned}
 c_{13} = c_{21} = -b_3 &= \frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}, & c_{14} = c_{22} = -b_4 &= \frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta} \\
 c_{20} = -a_{31} &= \frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}, & c_{15} = -b_5 &= -\frac{1}{a_{\alpha\phi}} \\
 c_{34} = c_{42} = a_{31}b_4 - a_{41}b_3 &= -\frac{gc}{R\Delta}, & c_{55} = a_{52}c_{34} &= \frac{g^2c^2}{R^2\Delta a_{\alpha\phi}} \\
 c_{35} = a_{31}b_5 - a_{52}b_4 - a_{51}b_3 &= \frac{g(be - 2ce - 4c^2)}{R\Delta a_{\alpha\phi}}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Разрешая равенства (3.5) относительно коэффициентов κ_i , найдем

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= d_{12}a_2 + d_{14}a_4 - d_{10}, & \kappa_2 &= -d_{24}a_4, & \kappa_3 &= d_{31}a_1 + d_{33}a_3 + d_{35}a_5 \\
 \kappa_4 &= -d_{43}a_3 + d_{45}a_5, & \kappa_5 &= d_{55}a_5
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 d_{12} = d_{31} &= \frac{\Delta}{a_{\beta\beta}}, & d_{14} = d_{33} &= \frac{Ra_{\alpha\beta}\Delta}{gca_{\beta\beta}}, & d_{10} &= \frac{gca_{\alpha\beta}}{Ra_{\beta\beta}} \\
 d_{24} = d_{43} &= \frac{R\Delta}{gc}, & d_{35} &= \frac{R^2\Delta}{g^2c^2a_{\beta\beta}} \left[\Delta - \frac{(be - 2ce - 4c^2)a_{\alpha\beta}}{c} \right] \\
 d_{45} &= \frac{(be - 2ce - 4c^2)R^2\Delta}{g^2c^3}, & d_{55} &= \frac{R^2a_{\alpha\phi}\Delta}{g^2c^2}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для того чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость переходного процесса, достаточно корни λ_i характеристического уравнения (3.4) выбрать следующим образом:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5 < 0 \tag{3.9}$$

Коэффициенты характеристического уравнения с такими корнями найдутся по правилу бинома Ньютона

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\sum_{j=1}^5 \lambda_j, & a_2 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sum_{j=i+1}^5 \lambda_j, & a_3 &= -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \sum_{j=i+1}^4 \lambda_j \sum_{k=j+1}^5 \lambda_k \\
 a_4 &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \sum_{j=i+1}^3 \lambda_j \sum_{k=j+1}^4 \lambda_k \sum_{n=k+1}^5 \lambda_n, & a_5 &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

а коэффициенты закона управления (3.2) можно вычислить по формулам (3.7).

4. Управление электроприводом. Рассмотрим третье уравнение системы (2.1). В нем правая часть представляет собой момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя. Возьмем [10] приближенное значение величины Q :

$$Q = c_1u - c_2\phi \tag{4.1}$$

Постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ находятся по паспортным данным привода с учетом коэффициента редукиции. Электрическое напряжение u ограничено по величине: $-u_0 \leq u \leq u_0$.

Подставив в третье уравнение системы (2.1) величину $\ddot{\alpha}$, взятую из первого уравнения (2.4), и величину $\ddot{\phi}$, найденную из уравнения (2.5), установим связь между u и \ddot{y}

$$A\ddot{y} + B\alpha - C\beta = c_1u - c_2\dot{\phi} \quad (4.2)$$

где

$$A = \frac{\Delta_0}{a_{\alpha\phi}\Delta}, \quad B = \frac{g}{R} \left(\frac{ba_{\phi\phi}}{a_{\alpha\phi}} - \frac{ca_{\alpha\beta}a_{\alpha\phi}}{\Delta} \right), \quad C = \frac{gca_{\phi\phi}}{Ra_{\alpha\phi}}$$

В числителе выражения для коэффициента A стоит определитель $\Delta_0 > 0$, поэтому при любых значениях параметров системы $A > 0$.

Выражение (3.2) для \ddot{y} подставим в равенство (4.2). Обозначим

$$V = k_1\alpha + k_2\beta + k_3\dot{\alpha} + k_4\dot{\beta} + k_5\dot{\phi} \quad (4.3)$$

где

$$k_1 = \frac{Ak_1 + B}{c_1}, \quad k_2 = \frac{Ak_2 - C}{c_1}, \quad k_3 = \frac{Ak_3}{c_1} \quad (4.4)$$

$$k_4 = \frac{Ak_4}{c_1}, \quad k_5 = \frac{Ak_5 + c_2}{c_1}$$

Зададим закон управления электрическим напряжением, подаваемым на двигатель:

$$u = \begin{cases} -u_0, & V < -u_0 \\ u = V, & |V| \leq u_0 \\ u_0, & V > u_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Наличие в выражении (4.3) какого-нибудь ненулевого коэффициента усиления k_i означает необходимость измерения соответствующей фазовой координаты. Проанализируем возможность обращения в нуль каждого коэффициента k_i . Начнем с коэффициента k_1 . Из первой формулы (4.4) и выражений для k_1 в формулах (3.7) и для коэффициентов d_{12} и d_{14} в (3.8) с учетом положительности значений a_2 и a_4 следует, что возможность обращения в нуль коэффициента k_1 зависит от знака выражения $-Ad_{10} + B$. Выполнив преобразования с учетом соотношений (2.2), найдем

$$-Ad_{10} + B = \frac{ga_{\phi\phi}(ba_{\beta\beta} - ca_{\alpha\beta})}{Ra_{\alpha\phi}a_{\beta\beta}} = \frac{ga_{\phi\phi}(b - c)(2c + e)}{Ra_{\alpha\phi}a_{\beta\beta}} > 0$$

Отсюда ясно, что для действительных корней λ_i , удовлетворяющих (3.9), коэффициент k_1 не может обратиться в нуль ни при каких значениях параметров системы. Аналогично, поскольку $a_4 > 0$, не может обратиться в нуль и k_2 .

Что касается коэффициентов k_3, k_4 , то они не могут одновременно сделаться равными нулю. Покажем это. Предположим, что выполнено $k_3 = k_4 = 0$. Это равносильно системе уравнений

$$d_{31}a_1 + d_{33}a_3 + d_{35}a_5 = 0, \quad -d_{43}a_3 + d_{45}a_5 = 0$$

Выразив из второго уравнения этой системы a_3 и подставив его в первое уравнение, получим

$$d_{31}a_1 + \left(\frac{d_{45}d_{33}}{d_{43}} + d_{35} \right) a_5 = d_{31}a_1 + \frac{R^2 \Delta^2}{g^2 c^2 a_{\beta\beta}} a_5$$

Все коэффициенты в последнем выражении оказываются положительными, и оно не может обратиться в нуль, поэтому следует рассматривать случаи, когда либо $k_3 = 0$, либо $k_4 = 0$.

Коэффициент b в выражении для d_{45} формул (3.8) зависит от координаты z'_c центра масс робота (см. (1.3)). Если значение z'_c невелико (невысокий робот), то $d_{45} < 0$. Но тогда $d_{35} > 0$, и ни один из коэффициентов k_3, k_4 не может обратиться в нуль. Обозначим

$$\bar{z}'_c = R \left[1 + \frac{4R^2(M+m)}{J_0 + m_0R^2} \right]$$

Если $z'_c = \bar{z}'_c$, то $d_{45} = 0$, и при этом оказывается, что $d_{35} > 0$. Следовательно, при $z'_c = \bar{z}'_c$ равенство нулю коэффициентов k_3, k_4 по-прежнему невозможно. При увеличении $z'_c > \bar{z}'_c$ коэффициент d_{45} становится положительным и появляется возможность сделать равным нулю коэффициент k_4 . Таким образом, выполнение условия

$$z'_c > \bar{z}'_c \tag{4.6}$$

ограничивает снизу высоту робота и дает возможность обойтись без измерения параметра β .

Наконец, коэффициент k_5 не может обратиться в нуль из-за того, что $a_5 > 0$ и $d_{55} > 0$.

Пусть выполнено условие (4.6). Тогда подбор корней характеристического уравнения (3.4) можно осуществить следующим образом. Возьмем произвольно пять действительных чисел $\bar{\lambda}_i$, удовлетворяющих условию

$$\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \bar{\lambda}_4 < \bar{\lambda}_5 < 0 \tag{4.7}$$

и по формулам (3.10) найдем соответствующие им значения \bar{a}_3 и \bar{a}_5 . Выберем корни характеристического уравнения (3.4) в виде

$$\lambda_i = \chi \bar{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, 5$$

Требование $k_4 = 0$ и $\chi \neq 0$ приводит к уравнению

$$\chi^2 d_{45} \bar{a}_5 - d_{43} \bar{a}_3 = 0$$

Отсюда найдем

$$\chi = \sqrt{\frac{d_{43} \bar{a}_3}{d_{45} \bar{a}_5}} \tag{4.8}$$

После выполнения указанной процедуры будем иметь

$$k_1 c_1 > 0, \quad k_2 c_1 < 0, \quad k_3 c_1 > 0, \quad k_4 = 0, \quad k_5 c_1 > 0$$

5. Область стабилизируемости. Управление с насыщением (4.5) влечет сужение области управляемости. Изучим возможность управления по координатам α, β . Чтобы определить соответствующую область управляемости, возьмем систему уравнений (2.1) и подставим в нее выражение для обобщенной силы (4.1). Исключим из первого уравнения $\ddot{\phi}$ и рассмотрим первые два уравнения системы:

$$\left(a_{\alpha\alpha} - \frac{a_{\alpha\phi}^2}{a_{\phi\phi}} \right) \ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta} \ddot{\beta} = \frac{g}{R}(b\alpha - c\beta) + U, \quad -a_{\alpha\beta} \ddot{\alpha} + a_{\beta\beta} \ddot{\beta} = -\frac{gc}{R}\alpha \quad (5.1)$$

где

$$U = a_{\alpha\phi}(c_2\dot{\phi} - c_1u)/a_{\phi\phi} \quad (5.2)$$

В каждый фиксированный момент времени управление U может принимать значения из диапазона

$$U_- \leq U \leq U_+, \quad U_{\pm} = a_{\alpha\phi}(c_2\dot{\phi} \pm |c_1|u_0)/a_{\phi\phi} \quad (5.3)$$

Стабилизируемость системы (5.1) будем понимать как возможность приведения ее фазовой точки в начало координат фазового пространства, т.е. в точку с координатами $\alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} = 0$. Для исследования стабилизируемости рассмотрим свойства однородной системы, соответствующей системе (5.1). Ее характеристическое уравнение совпадает с (2.3) и имеет один положительный и один отрицательный корни. Заметим, что если коэффициент d_{45} в формулах (3.8) положителен, то наибольшим по абсолютной величине будет положительный корень, а если d_{45} окажется отрицательным, то наибольшую абсолютную величину будет иметь отрицательный корень. Однако не существует параметров системы, при которых какой-нибудь из корней сделался бы равным нулю. Обозначим $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ корни уравнения (2.3).

Собственные векторы рассматриваемой однородной системы имеют координаты

$$\alpha_1 = \mu_1 a_{\beta\beta}, \quad \beta_1 = \mu_1 a_{\alpha\beta} - gc/R$$

$$\alpha_2 = \mu_2 a_{\beta\beta}, \quad \beta_2 = \mu_2 a_{\alpha\beta} - gc/R$$

После преобразования координат к собственным векторам система (5.1) перейдет в следующую:

$$\ddot{\xi}_1 = \mu_1 \xi_1 + u_1, \quad \ddot{\xi}_2 = \mu_2 \xi_2 + u_2 \quad (5.4)$$

где управления

$$u_1 = U\alpha_1 = U\mu_1 a_{\beta\beta}, \quad u_2 = U\alpha_2 = U\mu_2 a_{\beta\beta}$$

ограничены по величине:

$$u_{1-} \leq u_1 \leq u_{1+}, \quad u_{2-} \leq u_2 \leq u_{2+}$$

причем

$$u_{1\pm} = U_{\mp} \mu_1 a_{\beta\beta}, \quad u_{2\pm} = U_{\pm} \mu_2 a_{\beta\beta} \quad (5.5)$$

Первое уравнение системы (5.4) соответствует отрицательному собственному значению μ_1 . При постоянном управлении его фазовые траектории – эллипсы. Из любой точки фазового пространства, выбирая подходящим образом управление в

диапазоне $u_{1-} \leq u_1 \leq u_{1+}$, можно привести фазовую точку первого уравнения в начало его фазовой плоскости.

Второе уравнение системы (5.4) соответствует положительному собственному значению μ_2 . При постоянном управлении u_2 его фазовые траектории – гиперболы с асимптотами:

$$\dot{\xi}_2 = \pm \sqrt{\mu_2}(\xi_2 - \bar{u}_2); \quad \bar{u}_2 = -u_2/\mu_2$$

Возьмем какие-нибудь числа u_- и u_+ так, чтобы было

$$u_- < 0 < u_+$$

и исследуем возможность приведения системы, описываемой уравнением

$$\ddot{\xi} - \mu_2 \xi = u, \quad u_- \leq u \leq u_+ \quad (5.6)$$

из различных начальных фазовых точек в начало фазовой плоскости при использовании релейного управления вида

$$u = \frac{u_- + u_+}{2} \pm \frac{u_- - u_+}{2} \quad (5.7)$$

Если принять $u = u_-$, то фазовые гиперболы для (5.6) задаются уравнением

$$\mu_2(\xi - \bar{u}_-)^2 - \dot{\xi}^2 = p_-, \quad \bar{u}_- = -u_-/\mu_2 \quad (5.8)$$

а если положить $u = u_+$, то аналогичное уравнение примет вид

$$\mu_2(\xi - \bar{u}_+)^2 - \dot{\xi}^2 = p_+, \quad \bar{u}_+ = -u_+/\mu_2 \quad (5.9)$$

где p_- и p_+ – постоянные интегрирования, причем $\bar{u}_+ < 0 < \bar{u}_-$.

Сначала выделим область начальных условий $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$, удовлетворяющих неравенствам

$$-\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_-) \leq \dot{\xi}_0 < 0 \quad (5.10)$$

Если начальная точка находится в этой области и выдерживается управление $u = u_-$, то движение фазовой точки происходит по соответствующей гиперболе (5.8) в сторону оси абсцисс и фазовая траектория пересекает ось абсцисс в точке с координатой

$$\xi_- = [(\xi_0 - \bar{u}_-)^2 - \dot{\xi}_0^2/\mu_2]^{1/2} + \bar{u}_- > \bar{u}_- > 0$$

и затем удаляется в бесконечность. Если при тех же начальных условиях взять управление $u = u_+$, то движение будет также происходить в сторону оси абсцисс, но уже по гиперболе вида (5.9), а координата ξ_+ точки пересечения этой гиперболы с осью абсцисс выразится следующим образом:

$$\xi_+ = [(\xi_0 - \bar{u}_+)^2 - \dot{\xi}_0^2/\mu_2]^{1/2} + \bar{u}_+$$

Можно показать, что¹

$$\xi_+ \geq \xi_- \quad (5.11)$$

¹ Голубев Ю.Ф. Робот-эквилибрист. Препринт № 50. М.: Ин-т прикл. математики, 2002. 26 с.

Неравенство (5.11) свидетельствует, что фазовую траекторию, начинающуюся в области (5.10), при любом управлении $u \in [u_-, u_+]$ невозможно привести в начало координат.

Траектории, начинающиеся в области, описываемой неравенствами

$$\dot{\xi}_0 \geq -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_-), \quad \xi_0 \geq 0$$

также невозможно привести в начало координат. При любом управлении $u \in [u_-, u_+]$ они уходят в бесконечность.

Аналогично область начальных условий

$$-\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_+) > \dot{\xi}_0$$

не удовлетворяет требованию стабилизируемости.

Покажем теперь, что можно построить релейное управление (5.7), приводящее фазовую траекторию в начало координат из любой начальной точки в области

$$-\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_+) < \dot{\xi}_0 < -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_-) \tag{5.12}$$

С этой целью составим линию переключения

$$\dot{\xi}_s(\xi) = \begin{cases} \sigma_-, & \xi < 0 \\ -\sigma_+, & \xi \geq 0 \end{cases}, \quad \sigma_{\pm} = \{\mu_2[(\xi - \bar{u}_{\pm})^2 - \bar{u}_{\pm}^2]\}^{1/2} \tag{5.13}$$

и синтезируем управление, приводящее любую фазовую точку из области (5.12) в начало координат:

$$u = \begin{cases} u_+, & -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_+) < \dot{\xi} < \dot{\xi}_s \\ u_+, & \dot{\xi} = \dot{\xi}_s \text{ и } \dot{\xi}_s < 0 \\ u_-, & -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_-) > \dot{\xi} > \dot{\xi}_s \\ u_-, & \dot{\xi} = \dot{\xi}_s \text{ и } \dot{\xi}_s \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, система, описываемая уравнением (5.6) с постоянными ограничениями u_- и u_+ , стабилизируема тогда и только тогда, когда ее фазовая точка принадлежит области (5.12).

Приведенный релейный закон управления доказывает лишь возможность стабилизации системы. Для реального управления целесообразно применять функции $u(t)$, не выходящие на границы области допустимых значений.

Второе уравнение системы (5.4) отличается от рассмотренного (5.6) тем, что ограничения u_{2-} и u_{2+} не постоянны, но зависят от угловой скорости $\dot{\phi}$. При изменении $\dot{\phi}$ интервал допустимых значений управляющей функции целиком смещается в ту или другую сторону в зависимости от знака $\dot{\phi}$.

Границы области стабилизируемости укажем для случая, когда маховик не вращается. Они интересны в связи с тем, что целью управления служит приведение системы в положение равновесия при условии, что угловая скорость маховика стремится к нулю. В формулах (5.5) положим $\dot{\phi} = 0$. Тогда

$$U_- = -U_+ = -\frac{a_{\alpha\phi}|c_1|u_0}{a_{\phi\phi}}, \quad u_{2-} = -u_{2+} = -\frac{a_{\alpha\phi}|c_1|u_0}{a_{\phi\phi}}\mu_2 a_{\beta\beta}$$

Воспользовавшись теперь неравенством (5.12) и перейдя от главных к исходным координатам, найдем область стабилизируемости системы (5.1)

$$-u_0 < a_\beta \left(\beta + \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\mu_2}} \right) - a_\alpha \left(\alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\mu_2}} \right) < u_0 \quad (5.14)$$

где

$$a_\beta = \frac{\mu_1 R a_{\phi\phi}}{(\mu_2 - \mu_1) g c |c_1| a_{\alpha\phi} a_{\beta\beta}}, \quad a_\alpha = \frac{a_\beta}{a_{\beta\beta}} \left(a_{\alpha\beta} - \frac{g c}{\mu_1 R} \right)$$

6. Влияние погрешностей. Измерительные погрешности зависят от используемых в системе датчиков. Будем предполагать, что измерения производятся с помощью неподвижной телекамеры, расположенной во фронтальной плоскости вне робота и фиксирующей положение какого-нибудь отрезка, жестко связанного с роботом. Пусть это будет отрезок прямой $O'B$, показанной на фигуре. Тогда в осях, связанных с роботом, концевые точки N_1 и N_2 этого отрезка должны иметь координаты $(0, z'_1)$ и $(0, z'_2)$ ($z'_2 > z'_1 > 0$) соответственно. Систему координат Oyz дополним до правой осью Ox . Предположив, что координаты точек N_1 и N_2 безошибочны, и сместив начало координат в картинную плоскость телекамеры, найдем в соответствии с формулами (1.1) абсолютные координаты концов измеряемого отрезка:

$$y_n = y_0 - z'_n \sin \alpha, \quad z_n = z_0 + z'_n \cos \alpha, \quad x_n = -h, \quad n = 1, 2 \quad (6.1)$$

где h – расстояние от картинной плоскости телекамеры до плоскости движения. Картиная плоскость должна быть выставлена строго параллельно плоскости движения робота. В реальности она будет установлена с ошибками, действие которых выражается матрицей малых поворотов

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & -\delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & 1 & -\delta_1 \\ -\delta_2 & \delta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

В результате образы точек N_n ($n = 1, 2$) на матрице телекамеры будут иметь следующие координаты соответственно

$$y_n'' = k[y_0 - z'_n \sin \alpha + \delta_3 h + \delta_2(z_0 + z'_n \cos \alpha)] \\ z_n'' = k[-\delta_2(y_0 - z'_n \sin \alpha) - \delta_1 h + z_0 + z'_n \cos \alpha], \quad n = 1, 2 \quad (6.2)$$

где k – коэффициент сжатия изображения на матрице телекамеры.

Дальнейший анализ структуры погрешностей должен опираться на конкретный алгоритм обработки с учетом дискретизации изображения. Здесь примем, что изображения точек N_n ($n = 1, 2$) на матрице телекамеры идентифицированы безошибочно, и возьмем простейший алгоритм определения углов α и β . Из соотношений (6.2) найдем

$$\frac{y_2'' - y_1''}{z_2'' - z_1''} = \frac{-\sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \delta_2 \sin \alpha} \approx -\operatorname{tg} \alpha + \delta_2(1 - \operatorname{tg} \alpha) \quad (6.3)$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \alpha$ будет вычислен с постоянной и пропорциональной ошибками, причем, как и следовало ожидать, постоянная ошибка и коэффициент пропорциональности оказались равными углу поворота телекамеры вокруг перпендикуляра к плоскости движения.

Из формул (1.1) видно, что угол β можно будет надежно найти даже при малых углах α , вычислив величину y_0 . Воспользуемся формулами (6.2) при $n = 2$:

$$y_0 + \delta_3 h + \delta_2 z_0 = \frac{y_1'' z_2' - y_2'' z_1'}{k(z_2' - z_1')} \quad (6.4)$$

Если полученное выражение сопоставить с первой формулой (1.1), то можно заметить, что при определении угла β , помимо ошибок, связанных с определением угла α , возникают также дополнительные постоянная и пропорциональная погрешности. Одна из них возникает из-за поворота телекамеры вокруг вертикальной оси и пропорциональна отношению расстояния от робота до телекамеры к радиусу опорного цилиндра. Другая постоянная погрешность связана с вращением телекамеры вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения.

Формулы (6.3) и (6.4) могут быть положены в основу юстировки положения телекамеры. Однако даже после этого останутся некоторые случайные и систематические постоянные и пропорциональные погрешности в определении углов α и β . Чтобы выявить влияние систематических погрешностей на процесс управления, примем линейной с постоянными коэффициентами структуру ошибок

$$\delta \alpha = \delta_\alpha + \delta'_\alpha \alpha, \quad \delta \dot{\alpha} = \bar{\delta}_\alpha + \bar{\delta}'_\alpha \dot{\alpha}$$

$$\delta \beta = \delta_\beta + \delta'_\beta \beta, \quad \delta \dot{\beta} = \bar{\delta}_\beta + \bar{\delta}'_\beta \dot{\beta}$$

$$\delta \dot{\phi} = \bar{\delta}_\phi + \bar{\delta}'_\phi \dot{\phi}$$

Выбранный закон регулирования таков, что пропорциональные погрешности приводят к некоторому изменению коэффициентов усиления; и если коэффициенты усиления взяты с достаточным запасом, то влияние пропорциональных погрешностей будет несущественным.

Наличие постоянных погрешностей приведет к тому, что в последнем уравнении системы (2.1) возникнет дополнительное постоянное слагаемое и это уравнение примет вид

$$a_{\phi\phi} \ddot{\phi} + a_{\alpha\phi} \ddot{\alpha} = c_1 u + c_1 \delta u - c_2 \dot{\phi}$$

$$\delta u = k_1 \delta_\alpha + k_2 \bar{\delta}_\alpha + k_3 \delta_\beta + k_4 \bar{\delta}_\beta + k_5 \bar{\delta}_\phi$$

Тогда система (2.1) допускает частное решение

$$\dot{\phi} = c_1 \delta u / c_2, \quad \alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv 0 \quad (6.5)$$

вследствие чего регулятор обеспечит асимптотическую устойчивость равновесия по углам α и β , а к угловой скорости маховика добавится слагаемое (6.5), компенсирующее действие постоянных составляющих ошибок. Другими словами, указанные погрешности помешают обеспечить равенство нулю угловой скорости маховика в положении равновесия. Вместе с тем величина (6.5) угловой скорости маховика может быть использована в качестве поправки к управлению для компенсации влияния погрешностей телекамеры.

7. Результаты расчетов. Выберем следующие численные значения параметров системы:

$$l = 1 \text{ м}, \quad m_0 = 3 \text{ кг}, \quad c_1 = -0.8 \text{ Н} \cdot \text{м/В}, \quad J_m = 0.03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$R = 0.05 \text{ м}, \quad M = 2 \text{ кг}, \quad c_2 = 0.76 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad J = 0.297 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$a = 0.55 \text{ м}, \quad m = 3 \text{ кг}, \quad J_u = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_0 = 3.75 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\gamma = -10, \quad u_0 = 12 \text{ В}$$

Для таких параметров получим корни $\mu_1 \approx -7.3\text{с}^{-2}$, $\mu_2 \approx 11.5\text{с}^{-2}$, а коэффициенты в формуле (5.14) окажутся такими: $a_\alpha \approx -3.6 \text{ В}$, $a_\beta \approx -4.45 \text{ В}$. В результате область управляемости линейной системы получается весьма большой. Например, если $\beta = \dot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$, то значение угла α вполне может лежать в диапазоне от $-\pi$ до π , что значительно шире диапазона его разумных значений $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Для выбранных значений параметров системы критерий (4.6) выполняется. Это значит, что можно подобрать собственные значения (3.9) таким образом, чтобы обеспечить равенство нулю коэффициента k_4 . С этой целью выберем постоянные (4.7), например, следующими:

$$\bar{\lambda}_1 = -15, \quad \bar{\lambda}_2 = -16, \quad \bar{\lambda}_3 = -17, \quad \bar{\lambda}_4 = -18, \quad \bar{\lambda}_5 = -19$$

По формуле (4.8) найдем поправочный коэффициент $\chi \approx 0.834$. Таким образом, переходный процесс, соответствующий случаю, когда измерения величины β можно не привлекать, оказывается достаточно быстрым. Соответствующие коэффициенты усиления принимают значения

$$k_1 = -0.816 \cdot 10^5, \quad k_2 = 0.101 \cdot 10^5, \quad k_4 = 0$$

$$k_3 = -0.139 \cdot 10^5, \quad k_5 = -0.337 \cdot 10^3$$

Если отказаться от требования $k_4 = 0$, то процесс стабилизации можно сделать более спокойным. В частности, можно, например, принять

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1.01, \quad \lambda_3 = -1.02, \quad \lambda_4 = -1.03, \quad \lambda_5 = -1.04$$

Таким характеристическим показателям отвечают следующие коэффициенты усиления

$$k_1 = -0.64 \cdot 10^2, \quad k_2 = 0.449 \cdot 10^1, \quad k_4 = 0.53$$

$$k_3 = -0.144 \cdot 10^2, \quad k_5 = -0.95$$

Видим, что при уменьшении абсолютной величины характеристических показателей коэффициент усиления k_4 возрастает не очень существенно. В то же время напряженность управления по другим координатам уменьшается весьма заметно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00079, 00-15-96135) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (Т0267, Б0053).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52, № 8. Pt II. P. 1–10.
2. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
3. *Schaefer J.F., Cannon R.H.* On the control of unstable mechanical systems // IFAC, 3rd World Congr. London, 1966. Paper 601.
4. *Белецкий В.В.* Двухногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
5. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
6. *Åström K.J., Block D.J., Spong M.W.* The Reaction Wheel Pendulum. www.prairienet.org/msi, 2001. 111 p.
7. *Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М.* О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 14–24.
8. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во МГУ, 2000. 303 с.
9. *Голубев Ю.Ф.* Механические системы с сервосвязями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 211–224.
10. *Гориневский Д.М., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю.* Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях / под ред. В.С.Гурфинкеля и Е.А.Девянина. М.: Физматлит, 1994. 366 с.

Москва
e-mail: golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию
12.III.2003