

УДК 624.07:534.1

© 2003 г. Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров

ЧАСТОТНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Разработан конструктивный численно-аналитический метод исследования свободных поперечных колебаний сильно неоднородного стержня с граничными условиями упругой заделки. Рассмотрены также стандартные частные случаи краевых условий. Для решения соответствующей самосопряженной краевой задачи на собственные значения и функции создана эффективная вычислительная процедура определения частот и форм колебаний, аналогичная методу пристрелки. Сформулированы утверждения, эквивалентные теоремам сравнения Штурма и следствиям из них для краевых задач второго порядка. Проведено тестирование алгоритма на модельных примерах с известными решениями. Осуществлен параметрический синтез для семейства конических стержней при различных граничных условиях, актуальных для приложений. Дано сопоставление с классическими результатами Кирхгофа, Тимошенко и Гулда.

1. Постановка задачи. С помощью эффективного численно-аналитического метода, являющегося обобщением известного метода “пристрелки”, исследуются поперечные колебания неоднородного прямолинейного стержня при различных краевых условиях. Для определенности сперва рассматривается случай, когда оба конца стержня жестко закреплены (защемление). Соответствующая самосопряженная краевая задача на собственные значения и функции (задача типа Штурма–Лиувилля) в безразмерных переменных описывается соотношениями [1–4]

$$(p(x)u'')' = (\lambda r(x) - q(x))u, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1)$$

$$0 < p^- \leq p \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r^- \leq r \leq r^+ < \infty, \quad 0 \leq q^- \leq q \leq q^+ < \infty$$

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0 \quad (1.2)$$

Неизвестные параметр $\lambda > 0$ и функция $u(x)$ характеризуют частоты и формы свободных колебаний стержня соответственно. Коэффициент $p(x)$ определяет жесткость на изгиб, $r(x)$ – линейную плотность, $q(x)$ – упругость внешней среды. В отличие от стандартных подходов длина стержня $l > 0$ не фиксируется (в частности, $l = 1$), а считается переменным параметром при построении решения задачи (1.1), (1.2). Относительно свойств гладкости функций p , r , q делаются весьма необременительные предположения: можно ограничиться непрерывностью и возможностью продолжимости на некоторый интервал $(l, \xi]$, см. ниже.

Требуется найти последовательность собственных значений $\lambda = \lambda_n$ (частот $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$) и функций $u = u_n(x)$ (форм колебаний). В теоретическом и прикладном аспектах основной интерес представляют низшие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ (условно $n \leq 10$). Известно, что самосопряженная краевая задача (1.1), (1.2) имеет счетное

множество собственных значений (дискретный спектр) и соответствующих им собственных функций (форм), образующих ортонормированный с весом $r(x)$ базис [2, 3]

$$\lambda \in \{\lambda_n\}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \sim n^4 \quad (1.3)$$

$$u_n(x) = u(x, \lambda_n) \quad (u_n, u_m)_r = \|u_n\|^2 \delta_{nm}; \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Здесь δ_{nm} – символ Кронекера, $(\cdot, \cdot)_r$ – скалярное произведение с весом $r(x)$, $\|\cdot\|_r$ – норма с весом. Операция вычисления нормы может быть заменена конечной операцией с помощью “функции чувствительности” $v = du/d\lambda$ следующим образом [4]:

$$\|u_n\|_r^2 = (u_n, u_n)_r = \int_0^l u_n^2(x)r(x)dx = [(pu_n'')'v_n - (pu_n'')'v_n']_{x=l} \quad (1.4)$$

$$(p(x)v'')'' = (\lambda_n r(x) - q(x))v + r(x)u_n(x), \quad v(0) = v'(0) = v''(0) = v'''(0) = 0$$

Функция $v = v_n(x)$ есть решение линейной задачи Коши (1.4); она строится численно при совместном интегрировании уравнения (1.1), см. ниже.

Задача (1.1), (1.2) может быть просто переформулирована в терминах вариационной изопериметрической задачи [2, 3]

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^l (p(x)u''^2 + q(x)u^2)dx \rightarrow \min, \quad I[u] = \|u\|_r^2 = \int_0^l r(x)u^2 dx = 1$$

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0 \quad (1.5)$$

$$\lambda \in \{\lambda_n\}, \quad u_n(x) = u(x, \lambda_n) \quad (u_n, u_m)_r = \delta_{nm}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь λ – удвоенный множитель Лагранжа, λ_1 – значение, отвечающее (глобальному) минимуму квадратического функционала J (1.5). Последующие значения $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ соответствуют локальным минимумам J с учетом условия ортогональности $(u, u_k)_r = 0, k = 1, 2, \dots, n-1$. На основе вариационной трактовки разработаны функциональные подходы для нахождения оценок величин λ_n и соответствующих функций $u_n(x)$ [2, 3]. Вычислительные алгоритмы позволяют получить эффективные оценки λ_n^+ сверху. Построение высокоточных оценок λ_n^- снизу представляет значительные вычислительные трудности. Имеющиеся методы Вайнштейна–Ароншайна и Фикера [2] весьма громоздки в алгоритмическом аспекте и малопродуктивны, см. разд. 5.

Отметим, что грубые двусторонние оценки собственных значений задачи (1.1), (1.2) имеют вид

$$\lambda_n^- \leq \lambda_n \leq \lambda_n^+, \quad \lambda_n^\pm = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^4 \frac{p^\pm}{r^\pm} + \frac{q^\pm}{r^\pm}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\gamma_n = \text{Arg}(\cos \gamma \text{ch} \gamma - 1), \quad \gamma_1 = 4.7300, \quad \gamma_2 = 7.8532, \quad \gamma_3 = 10.9956 \quad (1.6)$$

$$\gamma_4 = 14.1372, \quad \gamma_5 = 17.2788, \quad \dots, \quad \gamma_n = (n + 1/2)\pi + O(e^{-\pi n}), \quad n \gg 1$$

Оценки λ_n^\pm (1.6) будут достаточно точными для λ_n (1.3), если функции $p(x), r(x), q(x)$ изменяются слабо для всех $x \in [0, l]$, т.е. разности $p^+ - p^-, r^+ - r^-, q^+ - q^-$ относи-

тельно малы. В этом случае может быть применен метод возмущений [5], позволяющий аналитическое уточнение решения. Он, однако, неэффективен для численных расчетов. Оценки (1.6) можно использовать в рассматриваемом общем случае для построения начального приближения в рекуррентных схемах вычислений (последовательных приближений, ускоренной сходимости и др.). Эти алгоритмы будут достаточно эффективными в сочетании с процедурами продолжения по параметрам системы (параметрический синтез) или по искусственно введенным параметрам для улучшения сходимости [4]. Существующие в научной литературе методы и алгоритмы недостаточны для проведения высокоточных и массовых оперативных расчетов.

Отметим, что уравнение (1.1) неудобно для численно-аналитического исследования. При условии дважды непрерывной дифференцируемости функции $p(x)$ оно приводится к стандартной форме линейного уравнения четвертого порядка или системе уравнений первого порядка (форма Коши). Однако более естественным является введение дополнительных переменных z, μ , имеющих механический смысл. Задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} u' &= \theta, \quad \theta' = -\frac{z}{p(x)}, \quad z' = \mu, \quad \mu' = -(\lambda r(x) - q(x))u \\ u(0) = \theta(0) = u(l) = \theta(l) &= 0 \quad \left(u'' = -\frac{z}{p(x)}, \quad z'' = -(\lambda r(x) - q(x))u \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где z – момент сил упругости, μ – перерезывающая сила. Форма записи (1.7) не требует дифференцируемости коэффициента $p(x)$; достаточно непрерывности.

Наряду с краевыми условиями жесткой заделки концов (1.2) или (1.7) могут быть взяты другие условия, приводящие к самосопряженной краевой задаче. К таковым относятся шарнирное закрепление: $u = z = 0$, свободные концы: $z = \mu = 0$, фиксация направления касательной: $\theta = \mu = 0$. Перечисленные типы условий могут реализовываться на одном или обоих концах. В качестве условий общего вида принимаются упругая заделка по смещению и повороту касательной на концах стержня

$$[(1 - \kappa_x)\mu \mp \kappa_x u]_{x=0,l} = 0, \quad [(1 - \sigma_x)z \mp \sigma_x \theta]_{x=0,l} = 0, \quad 0 \leq \kappa_{0,l}, \quad \sigma_{0,l} \leq 1 \quad (1.8)$$

Нормированные коэффициенты $\kappa_{0,l}, \sigma_{0,l}$ определяют относительное влияние жесткости упругой заделки концов по смещению и повороту соответственно. Случай (1.2), (1.7) абсолютно жесткой заделки отвечает “бесконечно большим” значениям коэффициентов жесткости, т.е. их относительные величины равны единице: $\kappa_{0,l} \uparrow 1, \sigma_{0,l} \uparrow 1$. Указанные выше частные случаи краевых условий являются предельными для (1.8) по $\kappa_{0,l}$ или (и) $\sigma_{0,l}$. Случай бесконечной жесткости по смещению или (и) повороту конца может быть реализован весьма приближенно, поскольку материал основания, к которому крепятся концы, обладает ограниченной (часто невысокой) жесткостью.

Отметим, что в уравнении колебаний стержня (1.1) или системах (1.7) учитывается влияние внешней упругой среды (винклеровское основание). Значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет обобщение модели на случай изгибно-крутильных колебаний [6] сильно неоднородных стержней.

2. Схема решения. Стандартная процедура нахождения собственных значений и функций задачи (1.7) заключается в построении общего решения уравнений, зависящего от параметра λ , с последующим удовлетворением условий на границе $x = 0, l$. Необходимое и достаточное условие нетривиальности решения приводит к равенству нулю определителя матрицы фундаментальной системы. Отсюда следует характеристическое уравнение для вычисления собственных значений λ_n . Согласно общей теории определитель – целая функция λ , допускающая в вещественной области для

$\lambda > 0$ счетное множество корней $\{\lambda_n\}$, причем $\lambda_n \sim n^4$ ($n = 1, 2, \dots$); двусторонние оценки представлены формулами (1.6).

Согласно задаче (1.7) решение определяется вектор-функцией $U = (u, \theta, z, \mu)$. Применительно к задаче (1.7) требуется построить два семейства решений (λ – параметр семейства) задачи Коши для следующих данных при $x = 0$:

$$\begin{aligned} 1) u(0) = \theta(0) = \mu(0) = 0, \quad z(0) = 1 \\ 2) u(0) = \theta(0) = z(0) = 0, \quad \mu(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U = c_1 U_1(x, \lambda) + c_2 U_2(x, \lambda)$$

Искомое решение $U(x, \lambda)$ определено с точностью до скалярного множителя, который обычно находится из условия нормировки (1.4). Поэтому в выражениях (2.1) постоянную $c_1 \neq 0$ (или $c_2 \neq 0$) можно считать этим множителем, а отношение $c_2/c_1 = \eta$ (или $c_1/c_2 = \eta$) совместно с λ – искомыми величинами. Для вычисления λ, η служат граничные условия при $x = l$

$$u_1(l, \lambda) + \eta u_2(l, \lambda) = 0, \quad \theta_1(l, \lambda) + \eta \theta_2(l, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

При численном решении системы (2.2) множества значений $\lambda \in \Lambda, \eta \in \mathbb{N}$ для каждого λ_n, η_n могут быть грубо оценены с помощью соотношений (1.6). Стандартные численные методы для более точного определения искомых величин связаны с перебором большого количества вариантов: порядка 10^{2N} , где 10^{-N} – требуемая относительная погрешность. Методы, основанные на минимизации невязки, приводят к вычислительным трудностям (“овражным” эффектам), которые усугубляются при увеличении n , а также при существенном изменении параметров системы (1.7).

Рассмотрим кратко более общий случай краевых условий (1.8), отвечающих упругой заделке концов стержня. Стандартный подход диктует построение четырех семейств решений U_i (фундаментальной матрицы)

$$\begin{aligned} 1) u(0) = 1, \quad 2) \theta(0) = 1, \quad 3) z(0) = 1, \quad 4) \mu(0) = 1 \\ U(x, \lambda) = \sum c_i U_i(x, \lambda) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Значения остальных компонент решения, дополнительных к указанным, полагаются равными нулю (аналогично соотношениям (2.1)). Суммирование по i в (2.3) проводится от $i = 1$ до $i = 4$. Использование краевых условий (1.8) приводит к системе уравнений относительно искомых λ, c_i

$$\begin{aligned} (1 - \kappa_0)c_4 - \kappa_0 c_1 = 0 \quad (1 - \sigma_0)c_3 - \sigma_0 c_2 = 0 \\ \sum c_i [(1 - \kappa_l)\mu_i + \kappa_l u_i]_{x=l} = 0, \quad \sum c_i [(1 - \sigma_l)z_i + \sigma_l \theta_i]_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как и выше, нормировкой на отличную от нуля постоянную c_j система (2.4) приводится к четырем уравнениям относительно λ, η_i ($\eta_j = 1$). В ситуации общего положения $0 < \kappa_{0,l}, \sigma_{0,l} < 1$; тогда из первых двух уравнений постоянные, например c_3, c_4 , выражаются через c_2, c_1 соответственно и подставляются в два последних уравнения. После нормировки на c_1 (или c_2) эти уравнения приводятся к виду (2.2). Различные частные случаи крепления концов получаются предельными переходами $\kappa_{0,l}, \sigma_{0,l} \rightarrow 1$ или $\kappa_{0,l}, \sigma_{0,l} \rightarrow 0$.

3. Метод сагиттарной функции. Теоремы типа Штурма. Характеристическое уравнение для нахождения собственных значений параметра λ для задачи (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} S(\lambda, l) = 0, \quad \lambda = \lambda_n(l), \quad S(\lambda, x) \equiv u_1(x, \lambda)\theta_2(x, \lambda) - u_2(x, \lambda)\theta_1(x, \lambda) \\ 0 \leq x \leq l, \quad 0 < l < \infty, \quad \lambda > 0; \quad S(\lambda, x) > 0, \quad 0 < x \ll l, \quad \lambda \sim 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Как отмечалось в разд. 2, условие нетривиальности решения вида (2.1) краевой задачи – равенство нулю определителя линейной системы относительно c_1, c_2 при $x = l$ – приводит к соотношению (3.1). Очевидно, что оно получается также исключением неизвестной η из системы (2.2). В стандартных подходах параметр l ($l = 1$) фиксируется и функция S считается зависящей только от неизвестного аргумента λ . Ниже излагаются методы и вычислительные алгоритмы, основанные на вводимом авторами понятии сагиттарной функции (СФ) $S(\lambda, x)$, зависящей от двух аргументов λ и x . При ее помощи могут быть исследованы основные свойства решения задачи на собственные значения и функции, аналогичные теоремам сравнения Штурма и следствиям из них [7, 8]. Смысл данного названия и содержательный аспект вытекают из дальнейших построений.

Характеристическое уравнение и СФ для краевых условий (1.8) определяются аналогично (3.1)

$$S(\lambda, l) = 0, \quad \lambda = \lambda_n(l)$$

$$S(\lambda, x) \equiv \kappa_0(\sigma_0 d_{34} + (1 - \sigma_0)d_{24}) - (1 - \kappa_0)(\sigma_0 d_{13} + (1 - \sigma_0)d_{12}) \quad (3.2)$$

$$d_{ij} = d_{ij}(\lambda, x) = M_i Z_j - M_j Z_i$$

$$M_i = (1 - \kappa_l)\mu_i + \kappa_l u_i, \quad Z_i = (1 - \sigma_l)z_i + \sigma_l \theta_i, \quad i, j = 1, \dots, 4$$

Весьма громоздкое представление (3.2) для СФ $S(\lambda, x)$ можно существенно сократить построением двух семейств линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям при $x = 0$,

$$1) u(0) = 1 - \kappa_0, \quad \theta(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \mu(0) = \kappa_0, \quad 0 < \kappa_0 < 1$$

$$2) u(0) = 0, \quad \theta(0) = 1 - \sigma_0, \quad z(0) = \sigma_0, \quad \mu(0) = 0, \quad 0 < \sigma_0 < 1 \quad (3.3)$$

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad \theta = c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2, \quad z = c_1 z_1 + c_2 z_2, \quad \mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2$$

Решение (3.3) автоматически удовлетворяет граничному условию (1.8) для $x = 0$ при произвольных λ, c_1, c_2 . Характеристическое уравнение и СФ имеют вид

$$S(\lambda, l) = 0, \quad \lambda = \lambda_n(l)$$

$$S(\lambda, x) \equiv ((1 - \kappa_l)\mu_1(x, \lambda) + \kappa_l u_1(x, \lambda))((1 - \sigma_l)z_2(x, \lambda) + \sigma_l \theta_2(x, \lambda)) - \quad (3.4)$$

$$- ((1 - \kappa_l)\mu_2(x, \lambda) + \kappa_l u_2(x, \lambda))((1 - \sigma_l)z_1(x, \lambda) + \sigma_l \theta_1(x, \lambda))$$

При расчетах может быть использована та или иная форма решения, исходя из соображений удобства. Так, в первом случае (2.3) построение фундаментальной системы решений не зависит от параметров κ_0, σ_0 , которые учитываются на следующих этапах определения СФ и характеристического уравнения согласно соотношениям (3.2). Во втором случае (3.3) при построении линейно независимых решений проводится учет значений κ_0, σ_0 , однако число интегрируемых задач Коши уменьшается вдвое.

Итак, СФ $S(\lambda, x)$ далее считается известной; она может быть построена аналитически (весьма редко) либо численно посредством интегрирования задач Коши. При этом требуется либо последовательное вычисление функций $u_i, \theta_i, z_i, \mu_i$ для фиксированных значений λ с последующим запоминанием, либо совместное интегрирование (двух или четырех) задач Коши и вычисление $S(\lambda, x)$ по конечным формулам.

СФ S может определяться как решение указанной совокупности задач Коши и нелинейного уравнения. Для условий (1.7) СФ S (3.1) изменяется согласно уравнению

$$\begin{aligned} S' &= (z_1 u_2 - z_2 u_1)/p(x), \quad S(\lambda, 0) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l \\ S(\lambda, x) &= O(x^4), \quad S > 0, \quad 0 < x \ll l, \quad \lambda \sim 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Аналогичные (3.5) соотношения для СФ получаются при других краевых условиях, указанных в разд. 1. На основе анализа СФ $S(\lambda, x)$ могут быть установлены основные свойства решения исходной задачи и сформулированы утверждения, аналогичные осцилляционной теореме Штурма и теоремам сравнения Штурма и следствиям из них, которые были разработаны ранее для уравнения второго порядка вида $(pu)'' + \lambda ru = 0$ с соответствующими граничными условиями [2, 3, 7, 8]. Эти свойства весьма полезны при приближенных вычислениях, см. разд. 4, 5.

При фиксированном значении $l > 0$ СФ $S(\lambda, l)$ является осциллирующей по λ для $\lambda > 0$. Если взять достаточно большое $\lambda = \lambda(l) > 0$, то $S(\lambda, x)$ является осциллирующей функцией x для $0 \leq x \leq l$, имеющей сколь угодно большое число нулей. При условии $r/p \geq c > 0$ для $x > 0$ СФ $S(\lambda, x)$ будет осциллирующей по x независимо от $\lambda > 0$. Свойство осциллируемости имеет место также при $r/p \rightarrow 0$ для $x \rightarrow \infty$, если $r/p \sim x^{-\gamma}$, $\gamma \leq 4$. Следует отметить, что оба решения системы $(u_1(x, \lambda), \theta_1(x, \lambda)), (u_2(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda))$ (2.1) не являются осциллирующими в указанном смысле.

Пусть для фиксированного значения $l > 0$ найдено такое $\lambda > 0$, что $S(\lambda, l) = 0$, причем СФ $S(\lambda, x)$ не имеет промежуточных нулей по x . Тогда соответствующее $\lambda = \lambda_1(l)$ будет первым собственным значением задачи (1.7). Если же имеется $n - 1 \geq 1$ промежуточных нулей, то $\lambda = \lambda_n(l)$ – n -е собственное значение, причем $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. На основе анализа свойств $S(\lambda, x)$ можно установить полезные для приближенного численного решения задачи утверждения.

Теорема 1. Пусть при $\lambda = \lambda^*$ СФ $S(\lambda^*, x)$ имеет n ($n = 1, 2, \dots$) промежуточных нулей по x , $0 < x \leq l$. Тогда при $\lambda = \lambda^{**} > \lambda^*$ СФ $S(\lambda^{**}, x)$ имеет не менее n нулей на указанном промежутке.

Более того, неограниченное увеличение λ приводит к неограниченному росту числа нулей на заданном промежутке $0 \leq x \leq l$.

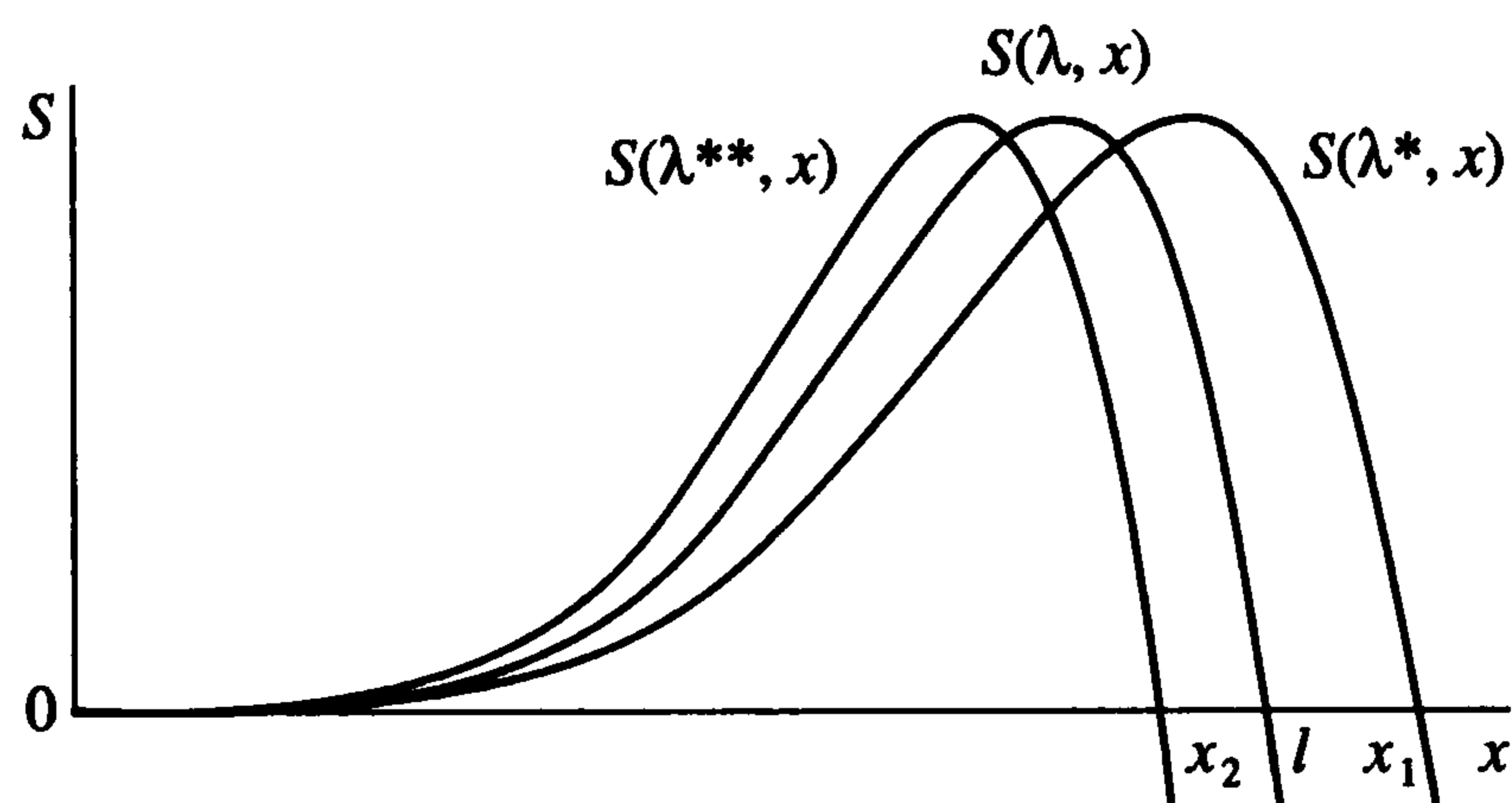
Теорема 2. Пусть при $\lambda = \lambda^*$ СФ $S(\lambda^*, x) = 0$ для $x = x_1$ и $x = x_2$, где $0 \leq x_1 < x_2 \leq l$. Тогда при $\lambda = \lambda^{**} > \lambda^*$ существует точка $x = x_3$, $x_1 < x_3 < x_2$ такая, что $S(\lambda^{**}, x_3) = 0$.

Для целей построения решения задачи на собственные значения и функции (1.7) конструктивно следующее утверждение относительно расположения нулей СФ $S(\lambda, x)$ при $\lambda = \lambda^*, \lambda^{**}$.

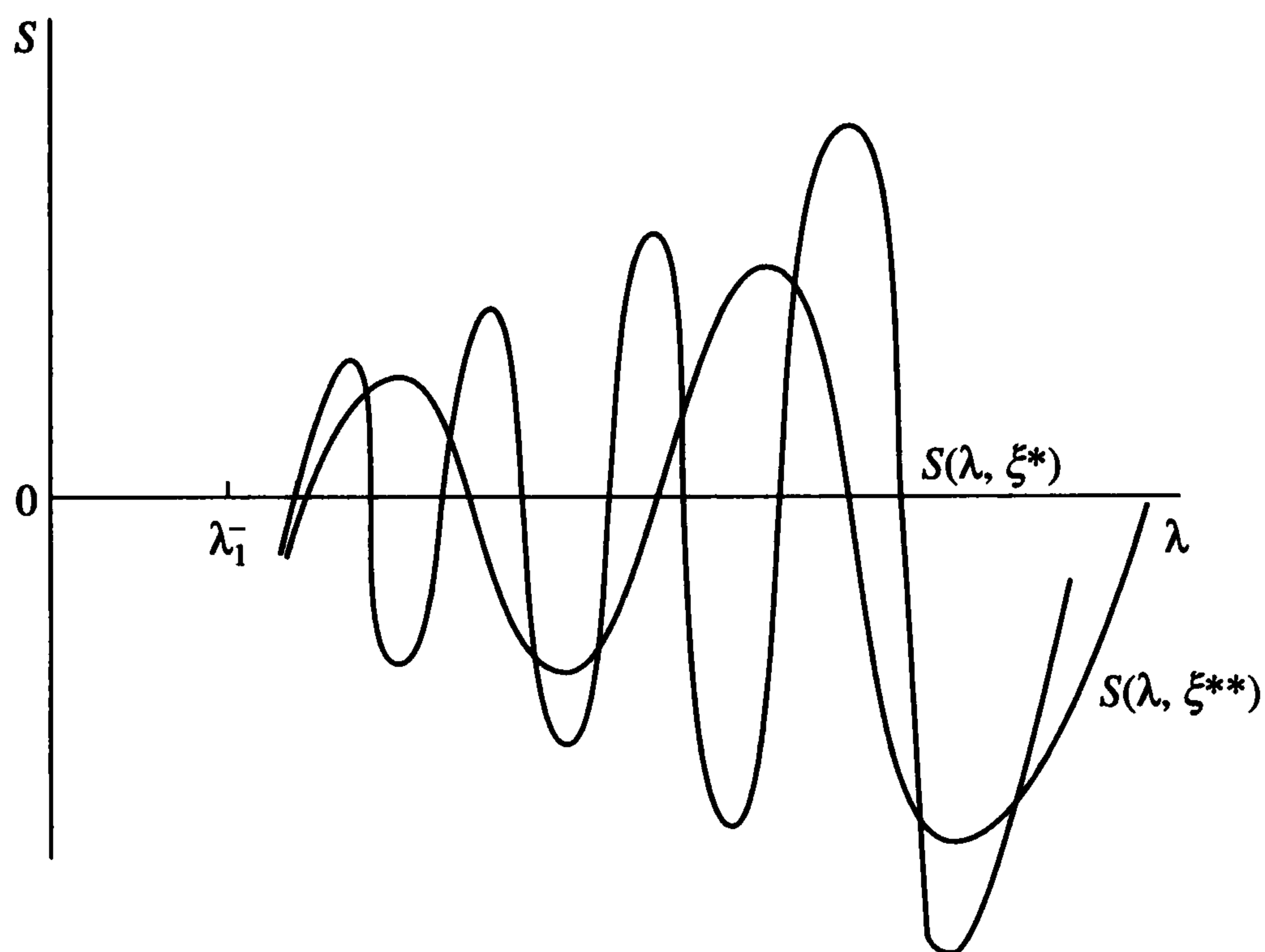
Теорема 3. Пусть $x = x_0$ – общий нуль СФ $S(\lambda^*, x), S(\lambda^{**}, x)$. Тогда при $\lambda^{**} > \lambda^*$ следующий нуль $x = x_1$ для $S(\lambda^*, x)$ и $x = x_2$ для $S(\lambda^{**}, x)$ удовлетворяет условию $x_2 < x_1$.

Отсюда следует, что все нули $x_i > 0$ СФ $S(\lambda, x)$ смещаются влево при увеличении λ и вправо – при уменьшении λ . Это свойство устанавливает локальную связь между искомым параметром λ и длиной отрезка l и может быть использовано при расчетах. Оно позволяет определить оценки сверху λ_n^+ и снизу λ_n^- собственных значений λ_n , что весьма важно для установления реальной точности приближенных решений. В частности, для первого собственного значения $\lambda_1(l)$ справедливо утверждение относительно оценок λ_1^\pm и соответствующих нулей $x = \xi_1^\pm$ СФ $S(\lambda_1^\pm, x)$.

Теорема 4. Пусть λ_1^+ – оценка сверху первого собственного значения, т.е. $\lambda_1^+ \geq \lambda_1(l)$. Тогда СФ $S(\lambda_1^+, \xi^+) = 0$, где $\xi^+ \leq l$. Аналогично для оценки снизу $\lambda_1^- \leq \lambda_1(l)$ имеет место равенство $S(\lambda_1^-, \xi^-) = 0$, где $\xi^- \geq l$ (при $\xi^- > l$ функции $p(x), r(x), q(x)$ считаются продолженными).



Фиг. 1



Фиг. 2

нием на интервал $(l, \xi^-]$ гладким образом). Если величины λ^\pm достаточно близки, то l, ξ^\pm будут также сколь угодно близкими, кроме того, $S(\lambda_1^+, l) < 0$, $S(\lambda_1^-, l) > 0$.

Свойство $S(\lambda_1^-, x) > 0$ при $0 < x < l$ следует из простых оценок функций $u_{1,2}(x, \lambda_1^-)$, $\theta_{1,2}(x, \lambda_1^-)$ согласно (2.1), (3.5) (задача (1.7)). Естественно, при $n \geq 2$ СФ $S(\lambda_n^-, x)$ может изменять знак до $(n-1)$ раза, а СФ $S(\lambda_n^+, x)$ изменяет знак не менее n раз. В общем случае определение знака СФ S при $0 < x \ll l$ и его перемены при $0 < x < l$ требуют громоздких оценок, которые удобнее проводить численно интегрированием указанных выше задач Коши.

Типичное поведение СФ $S(\lambda, x)$ качественно представлено на фиг. 1, 2. “Разделяющее” свойство СФ S естественно использовать в вычислительных методах, связанных с последовательным уточнением искомого решения. К таковым относятся методы пристрелки, последовательных приближений, ускоренной сходимости типа Ньютона и др. Этим объясняется предлагаемое для S название сагиттарная функция (по-латыни *sagitta* – стрела). Отметим, что метод пристрелки предпочтительно применять на начальной стадии решения задачи с помощью найденных предварительно оценок собственных значений λ_n^\pm согласно (1.6) или на основе вариационных оценок

с учетом соотношений (1.5) [2–4]. С помощью быстросходящегося метода типа Ньютона при необходимости эти значения могут быть уточнены. Такой комбинированный подход весьма эффективен при параметрическом синтезе, например при оптимизации формы, см. разд. 6.

4. Вычислительные алгоритмы метода пристрелки на основе сагиттарной функции. Установленные выше свойства СФ $S(\lambda, x)$ (3.1) позволяют построить два сравнительно простых рекуррентных алгоритма типа пристрелки, не требующие громоздких вычислений. Основные затраты процессорного времени связаны с интегрированием двух задач Коши (1.7), (2.1) при известном значении параметра λ , найденном на предыдущем шаге итерационной процедуры. С помощью СФ $S(\lambda, x)$ производится уточнение значения параметра λ , которое используется на следующем шаге алгоритма. При этом осуществляется оценка точности решения (невязки) как по “ординате”, т.е. $|S(\lambda, l)|$, так и по абсциссе ξ , т.е. по величине $\delta = |l - \xi|$, где $\xi = \arg_x S(\lambda, x)$.

Рассмотрим сперва задачу нахождения первого собственного значения $\lambda = \lambda_1(l)$ и для сокращения записи не будем указывать нижний индекс. Приведем стандартные операции метода пристрелки, аналогичные применяемым для случая уравнения второго порядка (классическая задача Штурма–Лиувилля), в котором смысл СФ имеет решение $u(x, \lambda)$.

1°. Пусть известны достаточно близкие верхняя и нижняя оценки λ^\pm , причем согласно теореме 4 функция $S(\lambda^\pm, l) \leq 0$. Главное внимание при этом уделяется близости λ^+ к точному значению λ , что достигается при помощи метода Релея – Ритца. Смысл требования заключается в отсутствии дополнительных нулей СФ $S(\lambda^+, x)$, которые могут появиться, если λ^+ весьма велико (теорема 1). Первый шаг процедуры заключается в вычислении среднего значения $\lambda_{(1)}$ и определении уточненной 1) верхней $\lambda_{(1)}^+$ или 2) нижней $\lambda_{(1)}^-$ оценки на основе разделяющего свойства СФ S

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{2}(\lambda^+ + \lambda^-)$$

$$1) S(\lambda_{(1)}, l) < 0, \quad \lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}^+, \quad \lambda^- = \lambda_{(1)}^- \tag{4.1}$$

$$2) S(\lambda_{(1)}, l) > 0, \quad \lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}^-, \quad \lambda^+ = \lambda_{(1)}^+$$

$$\lambda_{(1)}^- \leq \lambda \leq \lambda_{(1)}^+$$

Значение функции $S(\lambda_{(1)}, l)$ вычисляется на основе интегрирования задач Коши согласно разд. 2, 3. В результате первого шага (4.1) интервал $\delta_1 = \lambda^+ - \lambda^-$ неопределенности λ уменьшился в 2 раза. Затем выполняется второй шаг и определяется среднее значение $\lambda_{(2)}$ и его положение относительно точного значения $\lambda_{(1)} \leq \lambda(l)$ с помощью знака значения $S(\lambda_{(2)}, l)$. Тем самым неопределенность λ уменьшится в 4 раза и т.д. На произвольном i -м шаге имеем

$$\lambda_{(i)} = 1/2(\lambda_{(i-1)}^+ + \lambda_{(i-1)}^-)$$

$$1) S(\lambda_{(i)}, l) < 0, \quad \lambda_{(i)} = \lambda_{(i)}^+, \quad \lambda_{(i-1)}^- = \lambda_{(i)}^- \tag{4.2}$$

$$2) S(\lambda_{(i)}, l) > 0, \quad \lambda_{(i)} = \lambda_{(i)}^-, \quad \lambda_{(i-1)}^+ = \lambda_{(i)}^+; \quad \lambda_{(i)}^- \leq \lambda \leq \lambda_{(i)}^+$$

$$\delta_i = (\lambda_{(i)}^+ - \lambda_{(i)}^-) = \frac{1}{2^i}(\lambda^+ - \lambda^-), \quad i = 1, 2, \dots$$

Вычисления продолжаются до достижения требуемой относительной погрешности. При этом можно следить за величинами невязок по ординатам $S(\lambda_{(i)}^{\pm}, l)$, а также по решениям $u(l, \lambda_{(i)}^{\pm}), \theta(l, \lambda_{(i)}^{\pm})$. В качестве меры относительной близости решения можно взять величину $v_i = \delta_i / (2\lambda_{(i)})$.

Наряду с элементарной процедурой деления отрезка неопределенности пополам могут быть применены другие способы, например деление отрезка в отношении “золотого сечения”. Для ускорения сходимости отрезок неопределенности δ_{i-1} может быть разделен в отношении, пропорциональном величинам невязок по S , т.е.

$$\begin{aligned} \lambda_{(i)} &= \lambda_{(i-1)}^- + \delta_{i-1} s_{i-1}^- / s_{i-1} = \lambda_{(i-1)}^+ - \delta_{i-1} s_{i-1}^+ / s_{i-1} \\ s_{i-1}^{\pm} &= |S(\lambda_{(i-1)}^{\pm}, l)|, \quad s_{i-1} = S(\lambda_{(i-1)}^- l) - S(\lambda_{(i-1)}^+ l) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Процедура уточнения искомого решения (4.3) будет иметь более быструю сходимость, если зависимость S от λ вблизи собственного значения близка к прямолинейной с отличным от нуля наклоном касательной.

Изложенная схема метода пристрелки целиком переносится на случай общих краевых условий упругого закрепления концов (1.8). При этом требуется определить знакоопределенность S при $0 < x \ll l$. СФ $S(\lambda, x)$ строится согласно изложенному в разд. 2, 3 (см. (3.2)–(3.4)); она обладает указанными в разд. 3 свойствами разделения нулей ξ в зависимости от параметра λ (см. теоремы 1–4). Следует отметить, что задача имеет однократный нулевой корень $\lambda_0 = 0$ при условии шарнирного закрепления одного из концов; другой конец свободен. Если оба конца не закреплены, то имеется двукратный нулевой корень $\lambda_0 = 0$. Для $\lambda = \lambda_1$ справедливы приведенные выше утверждения.

Построение последующих собственных значений $\lambda_n(l)$ и функций $\{u_n(x, l), \theta_n(x, l), z_n(x, l), \mu_n(x, l)\}$ для $n = 2, 3, \dots$ проводится аналогично изложенному. При этом следует иметь в виду наличие $(n - 1)$ промежуточных нулей функции $S(\lambda_n, x)$, $0 \leq x \leq l$ и соответствующее поведение (знак) функции (λ_n^{\pm}, x) вблизи $x = l$; в частности, для $n = 2$ имеем $S(\lambda_2^{\pm}, l) \leq 0$.

2°. Более эффективным, наглядным, экономичным и устойчивым в вычислительном аспекте является рекуррентный алгоритм метода пристрелки, основанный на определении невязок по абсциссе – нулей $\xi_{(i)}^{\pm}$ функции $S(\lambda_{(i)}^{\pm}, x)$ для заданных значений $\lambda = \lambda_{(i)}^{\pm}$. При построении процедуры последовательного уточнения первого собственного значения (и последующих) используются результаты теорем 3, 4. В отличие от процедуры (4.1), (4.2), нахождение нулей $x = \xi_{(i)}^{\pm}$ позволяет уверенно судить о существовании решения краевой задачи и о его близости к искомому точному решению, отвечающему $x = \xi = l$. Мерой относительной близости наряду с v_i может быть также взята величина $\chi_i = \zeta_i / (2l)$, где $\zeta_i = \xi_i^- - \xi_i^+$ – разность невязок по абсциссе. Излагаемая схема не требует определения знаков функции $S(\lambda_{(i)}^{\pm}, x)$, а связана с нахождением нулей $x = \xi_{(i)}^{\pm} > 0$ с нужным порядковым номером.

В частности, для вычисления первого собственного значения $\lambda = \lambda_1(l)$ находятся минимальные положительные корни $\xi_{(i)}^\pm$. На первом шаге рекуррентной процедуры аналогично операциям (4.1) выполняются операции

$$\lambda_{(1)} = 1/2(\lambda^+ + \lambda^-); \quad \arg_x S(\lambda_{(1)}, x) = \xi_1 > 0$$

$$1) \xi_1 < 1, \quad \lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}^+, \quad \lambda^- = \lambda_{(1)}^-; \quad 2) \xi_1 > l, \quad \lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}^-, \quad \lambda^+ = \lambda_1^+ \quad (4.4)$$

$$\lambda_{(1)}^- \leq \lambda \leq \lambda_{(1)}^+, \quad \delta_1 = 1/2(\lambda^+ - \lambda^-) = \frac{\delta}{2}$$

Согласно соотношениям (4.4) неопределенность допустимых значений λ уменьшена в 2 раза. На последующих шагах она уменьшается в геометрической прогрессии со знаменателем 1/2. Произвольный i -й шаг требует выполнения операций (см. (4.2))

$$\lambda_{(i)} = 1/2(\lambda_{(i-1)}^+ + \lambda_{(i-1)}^-); \quad \arg_x S(\lambda_{(i)}, x) = \xi_i > 0$$

$$1) \xi_i < 1, \quad \lambda_{(i)} = \lambda_{(i)}^+, \quad \lambda_{(i-1)}^- = \lambda_{(i)}^-; \quad 2) \xi_i > l, \quad \lambda_{(i)} = \lambda_{(i)}^-, \quad \lambda_{(i-1)}^+ = \lambda_{(i)}^+ \quad (4.5)$$

$$\lambda_{(i)}^- \leq \lambda \leq \lambda_{(i)}^+, \quad \delta_i = 1/2\delta_{i-1} = 2^{-i}\delta, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \delta_0 = \delta$$

Наряду с определением относительной погрешности решения по параметру λ находятся также невязки по абсциссе для функций S, u, θ . Может быть применено другое правило деления отрезка неопределенности $[\lambda_{(i)}^-, \lambda_{(i)}^+]$, в частности отношение “золотого сечения” (см. выше). Если в некоторой малой окрестности точного значения зависимость $\lambda(l)$ можно линеаризовать, то по аналогии алгоритмом (4.3) можно производить деление отрезка неопределенности в отношении невязок $l - \xi_{i-1}^+, \xi_{i-1}^- - l$, т.е.

$$\lambda_{(i)} = \lambda_{(i-1)}^- + \delta_{i-1}\epsilon_{i-1}^-/\epsilon_{i-1} = \lambda_{(i-1)}^+ - \delta_{i-1}\epsilon_{i-1}^+/\epsilon_{i-1} \quad (4.6)$$

$$\epsilon_{i-1}^\pm = |1 - \xi_{i-1}^\pm/l|, \quad \epsilon_{i-1} = (\xi_{i-1}^- - \xi_{i-1}^+)/l$$

Схема уточнения согласно соотношениям (4.6) может иметь значительно более быструю сходимость вследствие существенной зависимости $\lambda(l)$: $-\infty < \lambda'(l) \leq -c < 0$ ($c \sim 1$).

Алгоритм приближенного решения (4.4)–(4.6) целиком переносится на случаи вычисления последующих собственных значений λ_n и функций $\{u_n(x, l), \theta_n(x, l), z_n(x, l), \mu_n(x, l)\}$ для $n = 2, 3, \dots$. Определяемые абсциссы ξ_i^\pm являются n -м нулем функции $S(\lambda_i^\pm, x)$. Наличие краевых условий общего вида (1.8) не приводит к изменению указанного алгоритма.

Изложенные процедуры типа пристрелки довольно эффективны для предварительных умеренно точных оценок решения. Они не приводят к накоплению ошибок округления (как в методе последовательных приближений) и устойчивы к сбоям. Основные затраты процессорного времени связаны с интегрированием задач Коши для системы (1.7). В случае сложных выражений коэффициентов $p(x), r(x), q(x)$ метод пристрелки может оказаться неэффективным для высокоточных массовых расчетов в широкой области изменения механических параметров, так как он требует сравнительно большего числа итераций. Тогда для построения параметрического синтеза предпочтительнее использовать несколько более сложный метод ускорен-

ной сходимости [4], поскольку он приводит к существенно меньшему числу итераций. В ситуациях, когда функции $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ являются резко изменяющимися, может потребоваться существенное уменьшение шага интегрирования. Выбор подходящего алгоритма расчетов можно осуществить дополнительным исследованием на основе численных экспериментов.

5. Примеры. Для иллюстрации вычислительной эффективности метода сагиттарной функции рассмотрим примеры стержней с сильно изменяющейся жесткостью $p(x)$ и линейной плотностью $r(x)$ без учета влияния внешней среды ($q \equiv 0$). Эти функции определяются стандартным образом на основе выражений для момента инерции и площади поперечного сечения стержня соответственно [1].

1°. Сперва с целью тестирования алгоритма проводятся вычисления для модельного примера [4], допускающего аналитическое интегрирование уравнения вида (1.1) или системы (1.7). Пусть концы стержня заземлены, а указанные функции таковы:

$$p(x) = p_0(b + ax)^2, \quad r(x) = r_0(b + ax)^{-2}, \quad b + ax \neq 0 \quad (5.1)$$

Тогда имеет место уравнение типа Эйлера [4, 7, 8], решение которого строится в виде степенной функции $(b + ax)^k$, где k – комплексный параметр, определяемый как корень алгебраического уравнения $k^2(k - 1)^2 = \lambda/a^4$, разрешимого в радикалах. Получающееся выражение для общего решения имеет громоздкий вид и содержит степенные, тригонометрические и логарифмические функции. Нахождение корней характеристического уравнения вида (3.1) затруднительно и может быть проведено численно для конкретных значений параметров.

Отметим, что без ограничения общности два из трех параметров a , b , l , а также постоянные p_0 , r_0 в (5.1) можно положить равными единице. Рассмотрим для определенности случай $ab > 0$; тогда можно положить $a = b = 1$, $l > 0$. Решение (2.1) примет вид при $\lambda > 1/16$

$$\begin{aligned} u &= c_1 u_1 + c_2 u_2 = \sqrt{1+x} (c_1 w_1(x, \lambda) + c_2 w_2(x, \lambda)), \quad \theta = u' \\ w_1 &= \sin(f^- h) - (f^- / f^+) \operatorname{sh}(f^+ h), \quad h = \ln(1+x), \quad 0 \leq x \leq l \\ w_2 &= \cos(f^- h) - \operatorname{ch}(f^+ h), \quad f^\pm = (\sqrt{\lambda} \pm 1/4)^{1/2}, \quad \lambda > 1/16 \\ u &\equiv 0, \quad \lambda \leq 1/16 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отметим, что гиперболические функции приводятся к совокупности степенных вида $(1+x)^{\pm f^\pm}$. Из соотношений (5.2) следует, что функции $u_{1,2}$, $\theta_{1,2}$ не имеют осциллирующего характера. Однако СФ $S(\lambda, x)$ (3.1) является осциллирующей как по x , так и по λ ; действительно, имеем выражение

$$S(\lambda, x) = 2f^- (\cos(f^- h) \operatorname{ch}(f^+ h) - 1/4 (f^+ f^-)^{-1} \sin(f^- h) \operatorname{sh}(f^+ h) - 1) \quad (5.3)$$

Характеристическое уравнение для любого $x = l > 0$ допускает счетное множество корней $\lambda_n(l)$, которые могут быть найдены численно с учетом указанных в разд. 3, 4 алгоритмов. В частности, для $l = 1$ приведем “точное” значение λ_1 и оценки λ_n

$$\lambda_1 = 2181.355, \quad \sqrt{\lambda_n} = (\pi/\ln 2)^2 (n + 1/2)^2 - 1/4 + O(1/n), \quad n \gg 1 \quad (5.4)$$

Применим теперь численный алгоритм разд. 4 для определения λ_1 . Оценка сверху на основе двухкоординатного (тригонометрического) приближения по методу Релея – Рит-

ца дает значение $\lambda_1^+ = 2338.442$, значительно отличающееся от точного (5.4). По методу СФ согласно соотношениям (4.4)–(4.6) получим абсциссу $\xi^+ = 0.9770$. С помощью величин ξ^+ находим оценку снизу $\lambda^- = (\xi^+)^4 \lambda^+ = 2131.2312$ согласно описанному ранее подходу [4]. Величина $\lambda_{(1)}$ (4.4) оказывается улучшенной оценкой сверху, так как $\xi_{(1)} < 1$.

Проведение семи итераций дает весьма близкие к λ_1 (5.4) оценки λ_1^\pm значения λ_1 :

$$\lambda_{1(7)}^+ = 2181.4093, \quad \lambda_{1(7)}^- = 2181.3478, \quad \lambda_{1(8)} = 2181.3785$$

$$\Delta\lambda_1/\lambda_1 \sim 10^{-5}, \quad 2^{-8} = 1/256$$

Аналогично вычисляются с требуемой точностью приближенные выражения для последующих собственных значений λ_n , $n \geq 2$ и для других $l > 0$.

В случае шарнирного закрепления концов стержня ($u = z = 0$ при $x = 0, 1$) с помощью изложенных в разд. 4 алгоритмов получаются после шести итераций искомые оценки первого собственного значения

$$\lambda_{1(6)}^+ = 432.3410, \quad \lambda_{1(6)}^- = 432.2820, \quad \lambda_{1(7)} = 432.3150, \quad \Delta\lambda_1/\lambda_1 \sim 10^{-4}$$

Изложенный модельный пример позволил проиллюстрировать основные теоретические положения и эффективность вычислительного алгоритма. Кроме того, установлено, что даже в случаях (весьма редких) аналитической интегрируемости (обычно в специальных функциях) требуется привлечение численных методов. В итоге оказывается более предпочтительным применение численно-аналитического метода СФ алгоритмов решения, изложенного в разд. 3, 4, без привлечения громоздких аналитических способов интегрирования уравнений.

2°. С аналогичными условиями шарнирного закрепления концов стержня для сопоставления подходов исследуем случай уравнения (1.1) для $p(x) = 1 + 2\sin^2 \pi x$, $r(x) = 1$. Эта задача на собственные значения и функции была приближенно решена с помощью метода Вайнштейна – Ароншайна [2] для $n = 1, 2$. С относительной погрешностью $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-6}$ получены значения $\lambda_1 = 2.36388\pi^4$, $\lambda_2 = 149.6520\pi^4$. Посредством алгоритма на основе СФ после шести итераций получаются искомые оценки $\lambda_{1,2}$

$$2.36387\pi^4 \leq \lambda_{1(6)} \leq 2.36389\pi^4, \quad 149.6517\pi^4 \leq \lambda_{2(6)} \leq 149.6531\pi^4$$

Отметим, что метод Вайнштейна – Ароншайна весьма громоздок и сложен для проведения эффективных расчетов. Приведенные вычисления свидетельствуют, что метод СФ имеет существенные преимущества для рассматриваемого класса задач на собственные значения и функции, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка.

6. Частотно-параметрический синтез конических стержней. Исследуем собственные колебания стержня конической формы. Геометрические и инерционные характеристики усеченного конуса определяются выражениями

$$R(x) = R_0(1 - \alpha x/l), \quad G(x) = \pi R^2(x), \quad I(x) = (\pi/4)R^4(x) \tag{6.1}$$

$$V_\alpha = V_1(3 - 3\alpha + \alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad p(x) = EI(x), \quad r(x) = dG(x)$$

Здесь R – радиус, G – площадь, I – момент инерции поперечного сечения стержня, α – коэффициент (тангенс угла полураствора), V_α – объем стержня, V_1 – объем при $\alpha = 1$ ($V_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^2 l$), E – модуль Юнга материала, d – (объемная) плотность. Значения всех параметров в (6.1), кроме α , считаются фиксированными. Введением безраз-

мерных параметров и аргумента x , $0 \leq x \leq 1$, уравнение (1.1), (6.1) приводится к виду, в котором коэффициент жесткости и линейная плотность таковы:

$$p(x) = (1 - \alpha x)^4, \quad r(x) = (1 - \alpha x)^2$$

Таким образом, далее рассматриваются собственные колебания семейства конических стержней фиксированной длины и радиуса при $x = 0$ и переменного объема. Случай $\alpha = 0$ отвечает однородному стержню цилиндрической формы, $\alpha = 1$ – заостренному коническому стержню, для которого при $x = 1$ (=1) имеется особенность ($p(1) = r(1) = 0$) в уравнении (1.1) и системе (1.7). Отметим, что при $\alpha \uparrow 1$ требуется следить, чтобы $\xi_i^- \alpha < 1$.

Исследование собственных колебаний конических стержней при различных граничных условиях представляет интерес для прикладных задач. Рассмотрим три варианта краевых условий:

1) шарнирное опирание обоих концов стержня

$$u(0) = u''(0) = U(1) = u''(1) = 0 \quad (6.2)$$

2) жесткое закрепление (защемление) левого конца стержня; правый конец оперт (шарнирно закреплен)

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u''(1) = 0 \quad (6.3)$$

3) оба конца жестко защемлены

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \quad (6.4)$$

Результаты расчетов первого собственного значения $\lambda_1(\alpha)$, отвечающего главной моде колебаний, представлены на фиг. 3. Условиям (6.2)–(6.4) соответствуют сплошные кривые 1, 2, 3. Вычисления проводились для $0 \leq \alpha \leq 0.95$ методом СФ с относительной погрешностью $\Delta\lambda/\lambda_1 \sim 10^{-4}$. Отметим, что при $\alpha = 0.95$ коэффициенты $p(x)$, $r(x)$ сильно изменяются (в $1.6 \cdot 10^5$ и 400 раз) при изменении x от $x = 0$ до $x = 1$. Методом ускоренной сходимости [4] высокоточные расчеты могут быть проведены для значений $\alpha = 0.999$ и больших ($\alpha \rightarrow 1 - 0$).

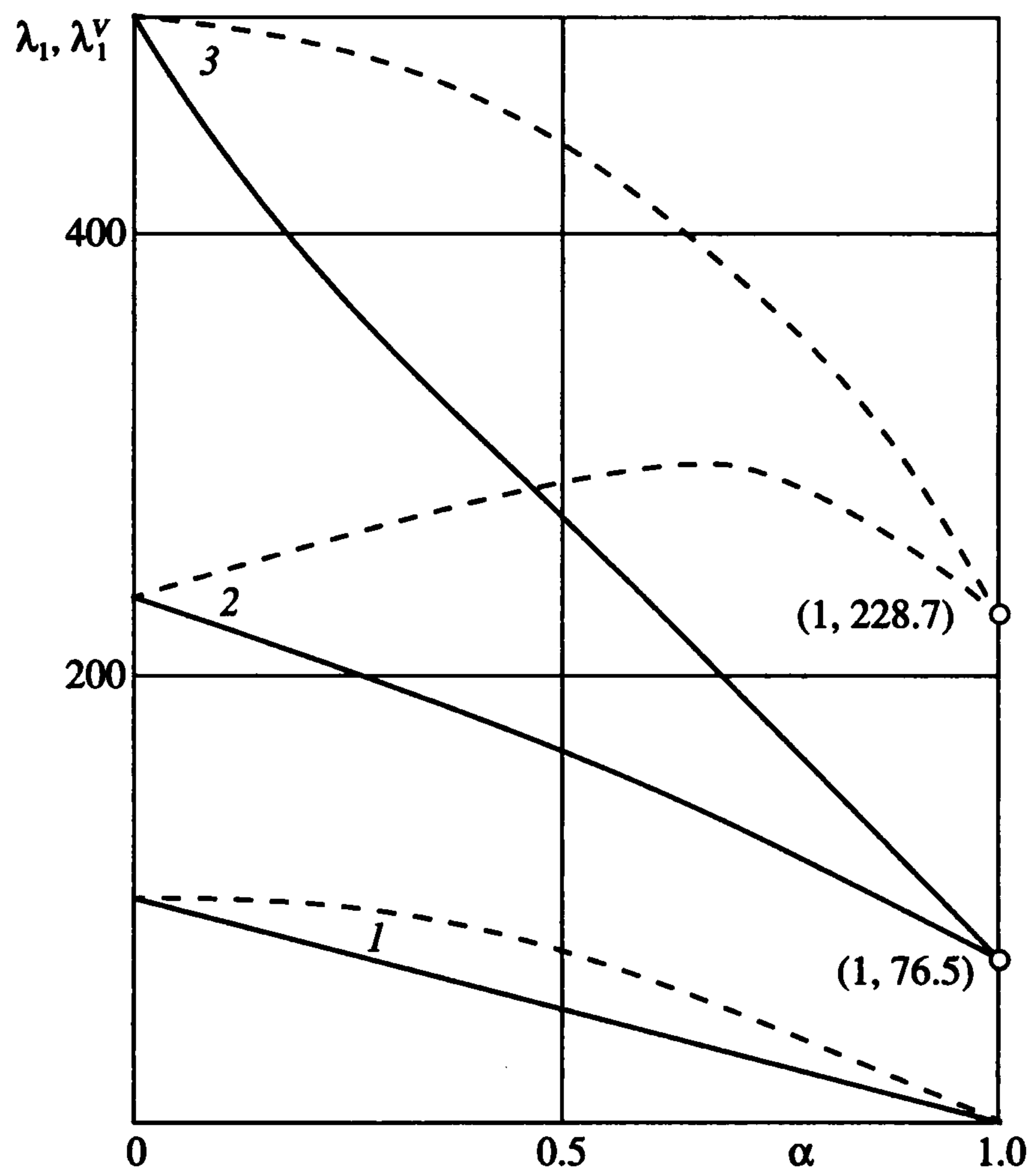
Результаты вычислений и кривая 1 свидетельствуют, что при $\alpha \uparrow 1$ собственное значение (низшая частота колебаний) шарнирно закрепленного стержня стремится к нулю. Это соответствует свободному вращению стержня вокруг оси шарнира при $x = 0$; конец $x = 1$ не оказывает упругого противодействия, так как радиус стремится к нулю. Зависимость $\lambda_1(\alpha)$ близка к линейной, причем $\lambda_1(0) = \pi^4$, $\lambda_1(1) = 0$.

В случае 2, когда левый конец ($x = 0$) защемлен, а правый ($x = 1$) шарнирно закреплен, первое собственное значение (частота) значительно больше (график 2 выше, чем 1). При $\alpha \uparrow 1$ величина $\lambda_1(\alpha)$ стремится сверху к значению $\lambda_1(1) \approx 76.5$, что отвечает консольно закрепленной балке конической формы [1, 4]. Кривая 2 также имеет сравнительно простой вид, однако более явно наблюдается выпуклость вверх.

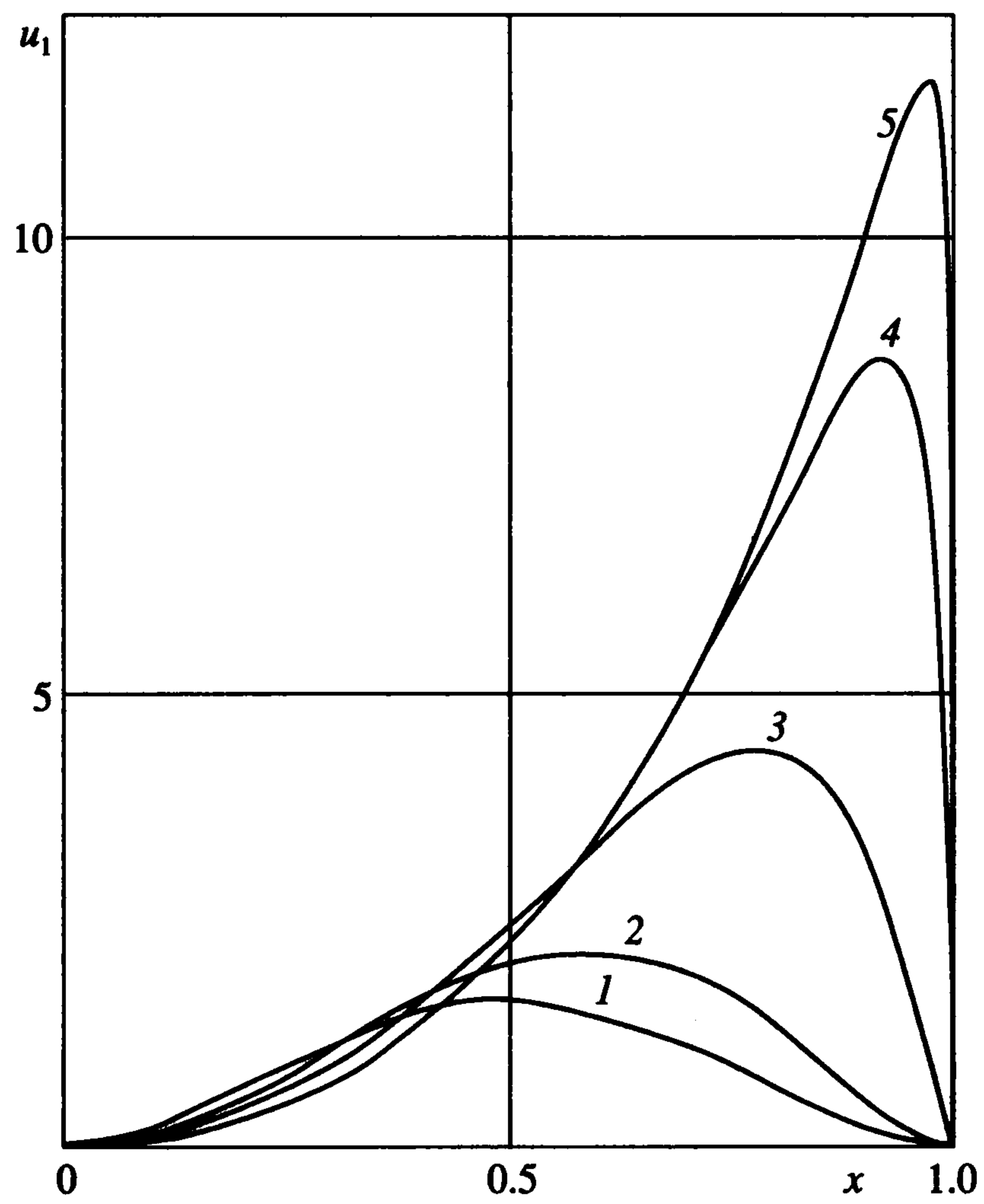
В случае жестко закрепленных концов (кривая 3) собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ существенно больше, однако при $\alpha \uparrow 1$ имеет место быстрое стремление к указанной выше величине $\lambda_1(1) \approx 76.5$, отвечающей консольно закрепленному коническому стержню. Зависимость $\lambda_1(\alpha)$ весьма близка к линейной. Нормированные с весом $r(x)$ собственные функции $u_1(x, \lambda)$ для $\alpha_i = 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999$ представлены на фиг. 4.

Аналогично с помощью алгоритма, изложенного в разд. 4, на основе понятия и свойств сагиттарной функции, представленных в разд. 3, вычисляются последующие собственные значения $\lambda_n(\alpha)$ (частоты колебаний) конического стержня, а также проводятся расчеты для других типов краевых условий.

Рассмотрим задачу построения зависимостей $\lambda(\alpha)$ в другом случае, представляющем интерес для проектирования формы стержней.



Фиг. 3



Фиг. 4

Пусть длина стержня l и его объем $V_\alpha = V_0$ фиксированы. Тогда радиус R_0 поперечного сечения стержня при $x = 0$ будет функцией параметра α :

$$R(x) = R_0(\alpha)(1 - \alpha x/l), \quad R_0(\alpha) = (V_0/\pi l)^{1/2}(1 - \alpha + \alpha^2/3)^{-1/2} \quad (6.5)$$

Таким образом, при $x = 0$ радиус $R(x)$ поперечного сечения конического стержня $R(0) = R_0(\alpha)$, так что объем $V_\alpha \equiv V_0 = \text{const}$; при увеличении α от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$ радиус возрастает в $\sqrt{3}$ раз. Подстановка выражений (6.5) в (6.1) позволяет преобразовать коэффициенты уравнения (1.1) или (1.7) так, что собственные значения $\lambda(\alpha)$ и $\lambda^V(\alpha)$ исходной ($R_0 = \text{const}$) и преобразованной ($V_\alpha = V_0$) задачи оказываются связанными простым соотношением

$$\lambda^V(\alpha) = (1 - \alpha + \alpha^2/3)^{-1} \lambda(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (6.6)$$

Функции $\lambda^V(\alpha)$ приведены для низшей моды колебаний в рассмотренных случаях краевых условий (6.2)–(6.4) на рис. 3 (штриховые кривые 1, 2, 3). При $\alpha = 0$ значения λ^V и λ совпадают, что согласно (6.6) имеет место; для $0 < \alpha < 1$ кривые $\lambda^V(\alpha)$ оказываются существенно выше, чем $\lambda(\alpha)$. Этот факт также достаточно очевиден: подобный конус большего объема при указанных краевых условиях имеет большую частоту колебаний. Интересно отметить, что в случае несимметричных (неодинаковых) краевых условий (6.3) наблюдается явно выраженный максимум функции $\lambda^V(\alpha)$ при $\alpha \approx 0.7$.

Примеры свидетельствуют, что прикладные задачи оптимизации формы могут быть эффективно исследованы с помощью разработанных численно-аналитических методов как в параметрической, так и в полной вариационной постановках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00252, 02-01-00157).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering*. Toronto, etc: D. van Nostrand, 1955 = *Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле*. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. *Gould S.H. Variational Methods for Eigenvalue Problems*. Toronto: Univ. Press; London; Oxford: Univ. Press, 1966. = *Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях*. М.: Мир, 1970. 328 с.
3. *Collatz L. Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen*. Leipzig: Akad. Verlag, 1963 = *Коллатц Л. Задачи на собственные значения*. М.: Наука, 1968. 504 с.
4. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В. Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 180–191.*
5. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В. Метод возмущений в задачах динамики неоднородных упругих стержней // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 452–464.*
6. *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных*. Киев: Вища шк., 1976. 589 с.
7. *Hartman Ph. Ordinary Differential Equations*. N.Y., etc.: J. Wiley, 1964 = *Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. *Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig: Akad. Verlag, 1959 = *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1971. 576 с.