ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 67. Вып. 4, 2003

УДК 531.38

© 2003 г. Г. В. Горр

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ДИНАМИКЕ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Дан краткий обзор результатов исследования прецессионных движений в задачах динамики твердого тела и системы твердых тел.

Прецессионные движения твердого тела относятся к наиболее наглядным, с механической точки зрения, движениям и в то же время они находят широкое применение в важной для техники теории гироскопических систем. А.Ю. Ишлинским отмечено ([1] с. 353, 354): "После затухания нутации дальнейшее медленное движение оси ротора, именуемое прецессионным, с большой точностью согласуется именно с прецессионными уравнениями теории гироскопов... В теории гироскопов учет нутационных членов дифференциальных уравнений движения гироскопических систем оказывается необходимым при изучении поведения гироскопов высокой точности...".

В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой регулярная прецессия гироскопа Лагранжа служит классическим примером прецессионного движения. Начало систематическому изучению прецессионных движений в динамике твердого тела положили Аппельрот [2] и Гриоли [3, 4]. Аппельрот рассматривал прецессии относительно вертикали гироскопов, эллипсоид инерции которых является эллипсоидом вращения, а центр тяжести его находится в экваториальной плоскости (гироскопы, подобные гироскопам Ковалевской и Горячева–Чаплыгина). Он показал, что для таких гироскопов динамически невозможны движения, для которых постоянный угол между главной осью и вертикалью отличен от прямого.

В динамике твердого тела много результатов получил Гриоли [3, 4]. Наиболее существенный из них относится к построению нового решения уравнений Эйлера–Пуассона, характеризующего регулярную прецессию тяжелого твердого тела относительно наклонной оси.

В ряде работ [5–15][1] прецессионные движения твердого тела с неподвижной точкой рассмотрены с общих позиций: предложены методы исследования условий существования прецессий не только в классической задаче, но и в ее обобщениях.

Исследовались прецессионные движения несимметричных тел в задаче о движении тела, подвешенного на стержне, и в задаче о движении системы связанных твердых тел [10, 11, 13, 16].

1. Кинематические условия прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой. Пусть в неподвижном пространстве существует некоторое фиксированное направление, характеризующееся единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$ (например, направление оси симметрии силового поля). Кроме того, предположим, что $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, также неизменный в пространстве. Начала векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ совпадают с неподвижной точкой O твердого тела. Если через $\boldsymbol{\omega}$ обозначим угловую скорость тела, то для $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ имеем уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

Точкой обозначена производная по времени в подвижной системе координат.

---

[1] См. также: *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел. Препринт № 89.03. Донецк. Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1989. 66 с.

Пусть $\varkappa_0$ – угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, тогда очевидны кинематические соотношения

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 1, \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_0 \tag{1.2}$$

где $c_0 = \cos\varkappa_0$. Движение тела называется прецессионным, если в течение всего времени движения тела постоянен угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, где $\mathbf{a}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом ($\dot{\mathbf{a}} = 0$). Это движение можно охарактеризовать инвариантным соотношением

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}_0 = a_0 \tag{1.3}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$, θ_0 – постоянный угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Продифференцируем обе части равенства (1.3) в силу второго уравнения (1.1). Тогда получим равенство $\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma}) = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi_1(t)\mathbf{a} + \varphi_2(t)\boldsymbol{\gamma} \tag{1.4}$$

где случай $\mathbf{a}\times\boldsymbol{\gamma} = 0$ исключен, так как он приводит либо к равномерным вращениям тела, либо к маятниковым движениям. Подставим выражение (1.4) в уравнения (1.1). Получим

$$\dot{\mathbf{v}} = \varphi_1(t)(\mathbf{v}\times\mathbf{a}) + \varphi_2(t)(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \varphi_1(t)(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}) \tag{1.5}$$

Как правило [6–8], подвижную систему координат выбирают таким образом, чтобы $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Тогда соотношениям (1.3), $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 1$ удовлетворим, положив

$$\gamma_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \gamma_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \gamma_3 = a_0 \tag{1.6}$$

где $a_0' = \sqrt{1-a_0^2} = \sin\theta_0$. Внося выражения (1.6) в скалярные уравнения, вытекающие из второго уравнения системы (1.5), получим $\varphi_1(t) = \dot{\varphi}(t)$. Принимая во внимание первое и третье равенства (1.2) и первое уравнение (1.5), для вектора $\mathbf{v}$ найдем следующее представление:

$$\mathbf{v} = (c_0 + a_0 b_0'\sin\phi)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\mathbf{a}\sin\phi - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})\cos\phi \tag{1.7}$$

Здесь

$$b_0' = b_0/a_0', \quad b_0 = \sqrt{1-c_0^2} = \sin\varkappa_0, \quad \varphi_2(t) = \dot{\phi}$$

В данном подходе θ_0, φ, ϕ – углы Эйлера, которые введены так, что система координат, связанная с вектором $\mathbf{a}$, является подвижной системой, а с вектором $\boldsymbol{\gamma}$ – неподвижной системой координат. Учитывая, что $\varphi_1(t) = \dot{\varphi}$, $\varphi_2(t) = \dot{\phi}$, соотношение (1.4) запишем так:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\phi}\boldsymbol{\gamma} \tag{1.8}$$

Следовательно, для прецессионных движений компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ выражены через одну переменную φ, компоненты вектора $\mathbf{v}$ – через две переменные φ и ϕ, а вектор угловой скорости имеет вид (1.8).

Прецессионное движение называют регулярной прецессией, если $\dot{\varphi}$ и $\dot{\phi}$ постоянны; если одна из этих функций постоянна, то движение называют полурегулярной прецессией; когда ни φ, ни $\dot{\phi}$ не постоянны, движение называют прецессией общего вида [3–6].

Кроме соотношений (1.3), (1.8) в качестве условия прецессионности движения может быть взято уравнение Гриоли [3]. Оно находится следующим образом. Из второго уравнения системы (1.1) на основании условия $\gamma_3 = a_0$ следует равенство $\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 = 0$, где ω_1, ω_2 – две первые компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ в подвижной системе координат. Дифференцирование этого равенства в силу кинематических уравнений для γ_1, γ_2 дает уравнение

$$\dot{\omega}_2\gamma_1 - \dot{\omega}_1\gamma_2 - a_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) = 0$$

Исключая в этом уравнении величины γ_1 и γ_2 с помощью равенств $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = a_0'^2$ и $\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 = 0$, приходим к уравнению Гриоли

$$\omega_1\dot{\omega}_2 - \omega_2\dot{\omega}_1 + \omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\theta_0 = 0 \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) использовано только в работе [17]. Широкого применения оно не нашло.

Если кинематические условия прецессионности движения рассматриваются в виде (1.3), (1.6), то компоненты вектора $\mathbf{v}$ (1.7) таковы:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= a_0'c_0\sin\varphi - b_0(\cos\varphi\cos\phi - a_0\sin\varphi\sin\phi) \\ \nu_2 &= a_0'\cos\varphi + b_0(\sin\varphi\cos\phi + a_0\cos\varphi\sin\phi) \\ \nu_3 &= a_0c_0 - b_0a_0'\sin\phi \end{aligned} \tag{1.10}$$

Иногда предлагается другой способ введения углов Эйлера для исследования прецессионных движений, в котором угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ не включается в состав углов Эйлера. Пусть u, v, w – углы Эйлера, где u – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$. Тогда

$$\omega_1 = \dot{w}\sin u\sin v + \dot{u}\cos v, \quad \omega_2 = \dot{w}\sin u\cos v - \dot{u}\sin v, \quad \omega_3 = \dot{v} + \dot{w}\cos u \tag{1.11}$$

После подстановки соотношений (1.11) в уравнение (1.9) имеем

$$(\ddot{w}\dot{u} - \ddot{u}\dot{w})\sin u + \dot{w}(2\dot{u} + \dot{w}^2\sin^2 u)\cos u = (\dot{u}^2 + \dot{w}^2\sin^2 u)^{3/2}\operatorname{ctg}\theta_0 \tag{1.12}$$

Отметим, что при $\kappa_0 = 0$ векторы $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ совпадают и, следовательно, углы u, v, w совпадают соответственно с θ_0, φ, ϕ. Дифференциальное уравнение (1.12) имеет очевидное решение $u = \theta_0$. Можно показать, что другое решение его таково [18]:

$$\cos(w - w_0) = \frac{\cos u\cos\kappa_0 - \cos\theta_0}{\sin\kappa_0\sin u} \tag{1.13}$$

где w_0, κ_0 – произвольные постоянные. Таким образом, если углы Эйлера введены традиционным способом, т. е. они не связаны с характерными направлениями прецессий $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, а определены относительно оси симметрии силового поля (вектора $\mathbf{v}$), то условие прецессионности движения имеет вид (1.13).

2. Метод исследования прецессий относительно вертикали в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [19, 20]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{s} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times C\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

которые допускают интегралы

$$(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})-2(s\cdot\mathbf{v})+(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2E, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1, \quad 2(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{v}-(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2k \quad (2.2)$$

где E и k – произвольные постоянные. В уравнениях (2.1) , (2.2) $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата, $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс, A – тензор инерции, B и C – симметричные матрицы третьего порядка. В данной работе уравнения (2.1) интерпретируются как уравнения движения гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией электрического, магнитного и ньютоновского полей [20]. Отнесение уравнений (2.1) к уравнениям класса Г. Кирхгофа связано с известной гидродинамической аналогией данной задачи и задачи о движении тела в жидкости [19, 20].

Рассмотрим прецессионные движения гиростата относительно вертикали, т. е. в соотношениях (1.3), (1.6), (1.8) положим $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}$. Тогда

$$\mathbf{v} = (a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a}+\dot{\phi}\mathbf{v} \quad (2.3)$$

Подставим выражение для $\boldsymbol{\omega}$ из (2.3) в интегралы (2.2). Получим

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\dot{\phi}(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = F_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\\&\dot{\varphi}^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+2\dot{\varphi}\dot{\phi}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\dot{\phi}^2(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = F_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}&F_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})+\frac{1}{2}(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\&F_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E+2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\end{aligned} \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.4) можно найти [6–8]

$$\dot{\phi} = \frac{F_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\dot{\varphi}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})}{(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})F_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-F_1^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{F_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)} \quad (2.6)$$

Здесь $F_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - (A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})^2 > 0$ в силу того, что матрица A положительно определена, а переменные ν_1, ν_2, ν_3 удовлетворяют кинематическому условию $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$.

Поскольку уравнение Пуассона из системы (2.1) удовлетворено равенствами (2.3), обратимся к динамическому уравнению из (2.1). Выполнив подстановку выражения (2.3) в первое уравнение системы (2.1) и воспользовавшись вторым уравнением, получим одно векторное равенство. Так как векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ и $A\mathbf{a}\times A\mathbf{v}$ независимы, рассмотрим три уравнения, которые являются равенствами нулю скалярных произведений этих векторов и вектора, стоящего в левой части указанного равенства. Можно показать, что первые два уравнения – линейные комбинации уравнений (2.4), а третье имеет вид

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}\dot{\phi}\left[2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{v})^2-F_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\mathrm{Tr}(A)-2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{a}\cdot A\mathbf{v})\right]-\\&-\dot{\varphi}^2[(A\mathbf{a})^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{a}\cdot A\mathbf{v})]-\dot{\phi}^2[(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{a}\cdot A\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{v})^2]+\\&+\dot{\varphi}[(A\mathbf{a}\cdot B\mathbf{v})(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{v}\cdot B\mathbf{v})+(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\lambda})-(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\lambda})(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})]+\\&+\dot{\phi}[(A\mathbf{a}\cdot B\mathbf{v})(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{v}\cdot B\mathbf{v})+(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\lambda})-(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\lambda})]+\\&+(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})((A\mathbf{a}\cdot A\mathbf{c})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}))+(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})((A\mathbf{v}\cdot\mathbf{s})-(A\mathbf{v}\cdot C\mathbf{v})) = 0\end{aligned} \quad (2.7)$$

С помощью выражений (2.6) в уравнении (2.7) можно исключить величины ϕ и $\dot{\phi}$ и на основании соотношений (2.3), (2.5) привести его к виду

$$\Phi(\varphi, a_0, E, k, A_{ij}, B_{ke}, C_{mn}, \lambda_i, s_j) = 0 \qquad (2.8)$$

Здесь A_{ij}, B_{ke}, C_{mn} – элементы матриц A, B, C; λ_i и s_j – компоненты векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$. Уравнение (2.8) назовем разрешающим уравнением в задаче исследования условий существования прецессий гиростата относительно вертикали, так как представление его в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = 0 \qquad (2.9)$$

где a_k и b_k – функции от параметров задачи (2.1), (2.2) и постоянных E, k, θ_0, позволяет определить необходимые условия существования прецессии: $a_k = 0$, $b_k = 0$ $(k = 1, ..., n)$

Замечание. В случае регулярных и полурегулярных прецессий относительно вертикали необходимо обращаться к уравнениям (2.4), (2.5), (2.7).

При исследовании условий существования прецессий гиростата относительно наклонной оси ($\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\gamma}$) следует к уравнениям (2.1) с интегралами (2.2) присоединить соотношения (1.6)–(1.8). С помощью первых интегралов (2.2) можно определить функции ϕ и $\dot{\phi}$ в зависимости от переменных φ и ϕ и параметров задачи. Далее можно получить аналог разрешающего уравнения (2.8), в которое, в отличие от (2.8), будут входить две переменные φ и ϕ. Поэтому наряду с разрешающим уравнением нужно рассмотреть и его производную в силу уравнений для ϕ и $\dot{\phi}$. На этом пути можно найти второе разрешающее уравнение, а затем на основании двух разрешающих уравнений получить уравнение вида (2.9).

3. Прецессионные движения тяжелого твердого тела. Уравнения классической задачи о движении тяжелого твердого тела следуют из системы (2.1) при условиях $\boldsymbol{\lambda} = 0$, $B = 0$, $C = 0$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \qquad (3.1)$$

Эти уравнения имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) = 2E, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = k \qquad (3.2)$$

Регулярные прецессии относительно вертикали. Положим во втором равенстве (2.3) $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\phi} = m$, где n и m – постоянные, тогда

$$\omega_1 = m\nu_1, \quad \omega_2 = m\nu_2, \quad \omega_3 = n + ma_0, \quad \nu_1 = a_0' \sin nt, \quad \nu_2 = a_0' \cos nt, \quad \nu_3 = a_0 \qquad (3.3)$$

Применяя изложенный выше метод исследования прецессий для уравнений (3.1), (3.2), получим условия

$$A_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad A_{11} = A_{22}, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad mnA_{33} - a_0 m^2 (A_{11} - A_{33}) + s_3 = 0 \qquad (3.4)$$

Условия (3.4) показывают, что тело представляет собой гироскоп Лагранжа (в главной системе координат $A = B$, $s_3 \neq 0$). Из первых трех равенств системы (3.3) вытекает инвариантное соотношение $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s} = \text{const}$, т.е. решение (3.3) – частный случай решения Лагранжа. Регулярная прецессия гироскопа Лагранжа описывает движение тела, которое является суперпозицией двух равномерных вращений вокруг осей, одна из которых фиксирована в теле, а другая – в пространстве.

Полурегулярные прецессии относительно вертикали первого типа. Пусть в соотношениях (2.3) $\dot{\phi} = m$, где m – постоянная,

$$\omega_1 = m\nu_1, \quad \omega_2 = m\nu_2, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + ma_0, \quad \nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0 \qquad (3.5)$$

Было показано [6, 7], что условия существования решения (3.5) уравнений (3.1) таковы:

$$\begin{gathered} A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}), \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = a_0 m^2 A_{22} \\ \dot{\varphi} = -m(A_{13}a_0'\sin\varphi + A_{33}a_0)A_{33}^{-1} \end{gathered} \qquad (3.6)$$

Запишем условия из (3.6) для компонент матрицы A_{ij} и вектора $\mathbf{s}$ в главной системе координат

$$s_2^* = 0, \quad s_1^*\sqrt{A(B-C)} - s_3^*\sqrt{C(A-B)} = 0$$

где A, B, C – главные моменты инерции, s_i^* – компоненты вектора $\mathbf{s}$ в главной системе координат. Таким образом, тело представляет собой гироскоп Гесса [21]. Поскольку при наличии соотношений (3.6) решения (3.5) удовлетворяют равенству $A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s} = 0$, то справедлива

Теорема 1. Полурегулярные прецессии относительно вертикали в классической задаче о движении тяжелого твердого тела имеют место только в частном случае решения Гесса [21].

Отметим, что полурегулярная прецессия (3.5), (3.6) описывает движение гироскопа Гесса, которое является суперпозицией равномерного вращения вокруг вертикали и неравномерного вращения $\dot{\varphi}$ из (3.6) вокруг барицентрической оси в теле.

Полурегулярные прецессии относительно вертикали второго типа. Если во втором равенстве (2.3) положим $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\phi} \neq m$, где n и m – постоянные, то получим полурегулярную прецессию второго типа. Справедлива

Теорема 2. В классической задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой полурегулярные прецессии относительно вертикали второго типа динамически невозможны.

Прецессии относительно вертикали общего вида. Перейдем к рассмотрению прецессий общего вида, т. е. считаем, что в выражении для угловой скорости из (2.3) ни одна из величин $\dot{\varphi}$ и $\dot{\phi}$ не является постоянной. Охарактеризуем вначале в терминах прецессионных движений маятниковые движения тела с неподвижной точкой. Пусть во втором равенстве (2.3) $\dot{\phi} = 0$, т.е. вектор угловой скорости не изменяет своего направления не только в системе координат, связанной с телом, но и в неподвижном пространстве. На основании результатов Б.К.Млодзеевского [22] имеют место следующие свойства маятниковых движений: вращение происходит вокруг горизонтальной оси, которая является главной осью в теле; центр масс тела лежит в главной плоскости, перпендикулярной оси вращения; вращение происходит по закону $\dot{\varphi} = \sqrt{\mu_0 + \lambda_0\sin\varphi}$, где λ_0 и μ_0 – постоянные.

При исследовании прецессий относительно вертикали получены следующие результаты [6, 7].

Теорема 3. Если прямая в теле, образующая в процессе движения постоянный угол с вертикалью, служит главной осью в теле, то прецессия либо регулярная, либо представляет собой движение физического маятника.

Теорема 4. Необходимым условием существования прецессий общего вида тяжелого твердого тела является равенство $k = 0$, где k – постоянная интеграла момента количества движения.

Теорема 5. Прецессия общего вида относительно вертикали в задаче о движении тяжелого твердого тела в случае, когда вектор $\mathbf{a}$ лежит в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке, имеет место только в решении А.И. Докшевича [23].

В системе координат, которая используется в данной работе, это решение таково:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = (a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\phi}\mathbf{v} \\ &\dot{\varphi} = \sqrt{b_2(b_1 + \sin\varphi)}, \quad \dot{\phi} = b_3\dot{\varphi}(b_1 + \sin\varphi)^{-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Параметры задачи подчинены условиям

$$s_2 = 0, \quad A_{12} = A_{23} = 0$$

$$4A_{13}^4 + A_{13}^2(A_{11} - A_{22})(A_{11} + 3A_{22} - 4A_{33}) - A_{11}A_{33}(A_{11} - A_{22})^2 = 0$$

$$\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{A_{22}A_{13}^2}{A_{33}[A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22})]}, \quad \frac{s_3}{s_1} = \frac{A_{13}[(A_{11} - A_{22})(A_{22} - 2A_{33}) + 2A_{13}^2]}{(A_{22} - A_{11})[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2]} \tag{3.8}$$

$$b_1 = \frac{a_0[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - 2A_{13}^2]}{a_0'A_{13}(A_{22} - A_{11})}, \quad b_2 = \frac{2s_1(A_{11} - A_{22})a_0'}{A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2}, \quad b_3 = \frac{A_{13}}{a_0'(A_{22} - A_{11})}$$

$$E = -s_3a_0 - \frac{s_1a_0A_{33}}{A_{13}}$$

Отметим интересное свойство прецессии А.И. Докшевича, а именно постоянство произведения скоростей собственного вращения и прецессии: $\dot{\varphi}\dot{\phi} = b_2b_3$. Условия, накладываемые на распределение масс в теле, указанные в системе (3.8), после записи их в главной системе координат показывают, что тело – гироскоп Гесса. Это утверждение не является тривиальным, поскольку требует значительных вычислений [6]. Доказательство того факта, что равенство (3.7) описывает решение А.И. Докшевича, основано на записи решения (3.7) через компоненты вектора момента количества движения в специальной системе координат и приведении его к виду [23].

Отметим, что в общем случае проблема исследования условий существования прецессий общего вида не решена.

Регулярные прецессии относительно наклонной оси. Положим в равенстве (1.8) $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\phi} = m$ (n и m – постоянные). Тогда

$$\varphi = nt + \varphi_0, \quad \phi = mt + \phi_0, \quad \omega_1 = m\gamma_1, \quad \omega_2 = m\gamma_2, \quad \omega_3 = n + ma_0$$

Компоненты γ_1, γ_2 определяются равенствами (1.6). Зависимости компонент вектора ν_i от времени задают соотношения (1.10).

Подстановка ω_i и γ_i в уравнения (3.1) приводит к следующим условиям, связывающим параметры задачи [8]:

$$\begin{aligned} &n = m, \quad A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{11} = A_{22}, \quad s_1 = s_2 = 0 \\ &\operatorname{tg}\kappa_0 = A_{13}/A_{33}, \quad \theta_0 = \pi/2, \quad s_3^2 = m^4(A_{13}^2 + A_{33}^2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Регулярная прецессия описывается решением

$$\omega_1 = m\sin\varphi,\quad \omega_2 = m\cos\varphi,\quad \omega_3 = m,\quad \varphi = mt+\varphi_0$$
$$\nu_1 = \cos\kappa_0\sin\varphi - \sin\kappa_0\cos^2\varphi,\quad \nu_2 = \cos\kappa_0\cos\varphi + \sin\kappa_0\sin\varphi\cos\varphi \tag{3.10}$$
$$\nu_3 = -\sin\kappa_0\sin\varphi$$

При этом компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ таковы: $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_2 = \cos\varphi$, $\gamma_3 = 0$. Условия, которым должны удовлетворять моменты инерции и компоненты вектора s из (3.9), можно привести к виду

$$s_2^* = 0,\quad s_1^*\sqrt{C-B} - s_3^*\sqrt{B-A} = 0$$

где A, B, C – главные моменты инерции, s_i^* – компоненты вектора $\mathbf{s}$ в главной системе координат, т.е. твердое тело, совершающее регулярную прецессию, является гироскопом Гриоли [4].

Регулярная прецессия Гриоли [4] описывает движение тела, которое представляет собой суперпозицию двух равномерных вращений с равными скоростями вокруг барицентрической оси в теле и вокруг ортогональной ей оси в пространстве.

Прецессия относительно горизонтальной оси [17]. Прецессия относительно горизонтальной оси характеризуется следующими свойствами:

$$\mathbf{a} = \mathbf{s}/s,\quad \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0$$

т.е. в формулах (1.6)–(1.8) необходимо положить

$$\theta_0 = \pi/2,\quad \kappa_0 = \pi/2,\quad \gamma_1 = \sin\varphi,\quad \gamma_2 = \cos\varphi,\quad \gamma_3 = 0$$
$$\nu_1 = -\cos\varphi\cos\phi,\quad \nu_2 = \sin\varphi\cos\phi,\quad \nu_3 = -\sin\phi \tag{3.11}$$
$$\omega_1 = \dot\phi\gamma_1,\quad \omega_2 = \dot\phi\gamma_2,\quad \omega_3 = \dot\varphi$$

Брессан [17], изучая прецессию (3.11) в решении Гесса [21], использовал уравнение Гриоли (1.9). В принятой здесь системе координат условия того, что твердое тело – гироскоп Гесса, определяется первыми тремя равенствами из (3.6). Подстановкой соотношений (3.11) в уравнения (3.1) и интегралы (3.2) найдем зависимости

$$\dot\varphi = -A_{13}/A_{33}\dot\phi\sin\varphi,\quad \dot\phi = \sqrt{2(E-s_3\sin\phi)A_{22}^{-1}} \tag{3.12}$$

Из второго уравнения системы (3.12) следует, что $\phi = \phi(t)$ – эллиптическая функция времени. Зависимость $\varphi(t)$ можно найти из первого уравнения данной системы.

Отметим, что другие прецессионные движения в классической задаче (3.1) пока не найдены. Анализ условий, накладываемых на распределения масс твердого тела в описанных классах прецессионных движений тяжелого твердого тела, показывает, что прецессии в однородном силовом поле совершают только гироскопы Лагранжа (динамически симметричные тела с центром масс на оси симметрии), Гесса (тела, центр масс которых лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида) и Гриоли (тела, центр масс которых лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции). Следствием теоремы 3 служит тот факт, что гироскопы, подобные гироскопам Ковалевской и Горячева–Чаплыгина, могут совершать только тривиальные прецессии – вращения вокруг горизонтальной оси в пространстве.

4. Прецессионные движения гиростата Жуковского [24]. Рассмотрим решение Жуковского [24]. Положив в соотношениях (2.1), (2.2) $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $B = 0$, $C = 0$, получим

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega},\quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega},\quad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = 2E\quad (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k \tag{4.1}$$

Из первого уравнения системы (4.1) следует, что вектор $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ неподвижен в пространстве. Естественно вектор $\mathbf{v}$ взять в виде $\mathbf{v} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})/x_0$, где $x_0 = |A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|$. Уравнение Пуассона из (4.1) выполняется в силу первого уравнения системы (4.1). Динамические уравнения из (4.1) имеют два первых интеграла

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 = h^2 \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1)^2 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)^2 + (A_3\omega_3 + \lambda_3)^2 = x_0^2 \tag{4.2}$$

Было показано [25], что при выполнении условий

$$\lambda_2 = 0 \quad (A_2h^2 - x_0^2)(A_2 - A_1)(A_3 - A_2) = A_2[\lambda_3^2(A_2 - A_1) - \lambda_1^2(A_3 - A_2)] \tag{4.3}$$

гиростат Жуковского совершает полурегулярную прецессию относительно вектора $\mathbf{v}$. При этом компоненты вектора $\mathbf{a}$ удовлетворяют равенствам

$$a_2 = 0, \quad a_1\sqrt{A_1(A_3 - A_2)} - a_3\sqrt{A_3(A_1 - A_2)} = 0$$

которые аналогичны равенствам, связывающим компоненты вектора центра масс и главные моменты инерции для гироскопа Гесса. Это значит, что при выполнении условий (4.3) прямая в гиростате, ортогональная круговому сечению гирационного эллипсоида, построенного в неподвижной точке, образует постоянный угол с вектором $\mathbf{v}$. Этот угол определен равенством

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{A_2}(\lambda_1\sqrt{A_3(A_3 - A_2)} - \lambda_3\sqrt{A_1(A_2 - A_1)})}{x_0\sqrt{(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)}}$$

При условиях (4.3) линия пересечения поверхностей (4.2) лежит в плоскости

$$\sqrt{A_1(A_3 - A_2)}[\omega_1(A_2 - A_1) - \lambda_1] + \sqrt{A_3(A_2 - A_1)}[\omega_3(A_3 - A_2) + \lambda_3] = 0 \tag{4.4}$$

На основании первого равенства из системы (4.2), равенства (4.4) и уравнений (4.1) можно получить соотношения

$$\omega_1 = \alpha_0\sin\varphi + \beta_0, \quad \omega_2 = \gamma_0\cos\varphi, \quad \omega_3 = \varepsilon_0\sin\varphi + \sigma_0, \quad \dot{\varphi} = d_0 + d_1\sin\varphi \tag{4.5}$$

в которых все коэффициенты зависят от параметров задачи. Переходя к системе координат, связанной с вектором $\mathbf{a}$, можно показать, что решение (4.5) описывает полурегулярную прецессию первого типа гиростата Жуковского относительно вектора $A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$. Для этой прецессии, так же как и в случае (3.6), функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению вида $\dot{\varphi} = \mu_0 + \mu_1\sin\varphi$, где μ_0, μ_1 – постоянные.

5. Примеры прецессий относительно вертикали в задаче (2.1).

Регулярные прецессии. Положим в соотношениях (2.3), (2.6), (2.7) $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\phi} = m$ (n и m – постоянные). Тогда получим следующие условия, связывающие параметры задачи [12]

$$\begin{gathered}
A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad 2m(A_{22} - A_{11}) + B_{11} - B_{22} = 0 \\
m^2(A_{22} - A_{11}) + C_{22} - C_{11} = 0, \quad m^2A_{13} - mB_{13} - C_{13} = 0 \\
m^2A_{23} - mB_{23} - C_{23} = 0 \\
s_1 = a_0C_{13} + mA_{13}(ma_0 + n), \quad s_2 = a_0C_{23} + mA_{23}(ma_0 + n) \\
\lambda_1 = B_{13}a_0 - A_{13}(2ma_0 + n), \quad \lambda_2 = B_{23}a_0 - A_{23}(2ma_0 + n) \\
mn(A_{22} + A_{33} - A_{11}) + m\lambda_3 + B_{11}(n + ma_0) - \\
- B_{33}ma_0 - a_0m^2(A_{11} - A_{33}) + a_0(C_{11} - C_{33}) + s_3 = 0
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Для регулярной прецессии функции $\omega_i(t)$ $\nu_i(t)$ определены выражениями (3.3). При $B_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ из условия (5.1) вытекают условия, указанные в работе [26].

Рассмотрим случай $m = 0$ ($\boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a}$), для которого гиростат равномерно вращается относительно неподвижной в пространстве оси, не совпадающей с вертикалью. Из системы (5.1) имеем условия

$$\begin{gathered} A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{11} = C_{22}, \quad s_1 = s_2 = 0 \\ \lambda_1 = B_{13}a_0 - nA_{13}, \quad \lambda_2 = B_{23}a_0 - nA_{23}, \quad nB_{11} + s_3 + a_0(C_{11} - C_{33}) = 0 \end{gathered} \tag{5.2}$$

при выполнении которых происходит равномерное вращение гиростата относительно наклонной оси $a_0' \neq 0$. Для классической задачи это свойство не имеет места, так как при $B_{ij} = 0$, $C_{kl} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ k, l = 1, 2, 3)$ из (5.2) следует $s_3 = 0$ (центр масс гиростата неподвижен).

Полурегулярные прецессии первого типа ($\dot{\phi} = m$, $\dot{\varphi} \neq n$). Приведем пример прецессии первого типа в случае, когда

$$\dot{\varphi} = m(p_0 + q_0 \sin\varphi) \tag{5.3}$$

где $p_0^2 = 1 + q_0^2$. Этот пример интересен тем, что движение гиростата обладает не только свойством прецессионности (2.3), но и свойством изоконичности [9], для которого подвижный и неподвижный годографы угловой скорости гиростата симметричны относительно касательной к ним плоскости. На основании метода, изложенного в разд. 2, получим следующие условия, связывающие параметры задачи:

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad B_{12} = mA_{12}, \quad C_{12} = -m^2 A_{12}, \quad C_{23} = -mB_{23} \\ \lambda_2 = a_0 B_{23}, \quad s_2 = -a_0 m B_{23}, \quad 2mq_0 A_{13} = a_0'[2m(A_{22} - A_{11}) + B_{11} - B_{22}] \\ m^2 q_0^2 A_{33} = a_0'^2\left[m^2(A_{11} - A_{22}) - m(B_{11} - B_{22}) + C_{22} - C_{11}\right] \\ a_0'(s_1 + m\lambda_1) = m^2 p_0 q_0 A_{33} + a_0 a_0'(C_{13} + B_{13}m - A_{13}m^2) \\ mq_0(B_{11} + B_{22} + 2mA_{33}) = 2a_0'(C_{13} + B_{13}m - A_{13}m^2) \\ mp_0(B_{11} + B_{22} + 2mA_{33}) + 2a_0\left[C_{22} - C_{33} + m(B_{22} - B_{33}) - m^2(A_{22} - A_{33})\right] + 2(s_3 + \lambda_3) = 0 \end{gathered} \tag{5.4}$$

Для простоты записи в равенствах (5.4) не проведено исключение параметров p_0 и q_0.

Для данного типа прецессий основные переменные задачи выражаются равенствами (3.5), в которых $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[p_0\left(1 - q_0 \,\mathrm{tg}\frac{mt}{2}\right)^{-1} \mathrm{tg}\frac{mt}{2}\right] \tag{5.5}$$

Полурегулярные прецессии второго типа. Следуя описанному ранее подходу [15], положим во втором равенстве из (2.3)

$$\varphi = nt, \quad \dot{\phi} = \frac{n}{d_0 + e_0 \sin\varphi}; \quad d_0^2 = 1 + e_0^2 \tag{5.6}$$

т.е. опять предполагаем, что движение гиростата прецессионно-изоконическое. Из (5.6) вытекает, что $\phi(t)$ – элементарная функция времени

$$\phi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\left(d_0 + e_0 \,\mathrm{tg}\frac{nt}{2}\right)^{-1} \mathrm{tg}\frac{nt}{2}\right]$$

Условия существования прецессии (5.6) таковы [15]:

$$A_{12} = A_{23} = 0,\quad B_{12} = B_{23} = 0,\quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0,\quad B_{11} = B_{22}$$

$$C_{11} = C_{22},\quad s_1 = s_2 = 0,\quad \lambda_2 = 0,\quad \lambda_1 = a_0 B_{13} + n e_0^{-1} a_0'(A_{22} - A_{11})$$

$$s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}) + n e_0^{-1}(a_0' B_{13} - c_0 B_{11})$$

$$\lambda_3 a_0'^2 = a_0 a_0'^2 (B_{33} - B_{11}) + e_0 d_0^{-1} a_0 A_{13} - a_0'(A_{11} - A_{22} + A_{33}) +$$

$$+ d_0^{-1} a_0 a_0'(A_{22} - A_{33}) - n^{-1} e_0^{-1} d_0 a_0'^2 B_{13};\quad d_0^2 = 1/(1 - \lambda^2),\quad e_0^2 = \lambda^2/(1 - \lambda^2)$$

$$\lambda^2(a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) - 2\lambda a_0 a_0' A_{13} - a_0'^2 (A_{22} - A_{11}) = 0 \tag{5.7}$$

$$(A_{22} + \sigma A_{33})(Q_1\sigma + Q_0)^2 - 4\sigma A_{13}^2 (R_1\sigma + R_0)(Q_1\sigma + Q_0) -$$

$$- 4\sigma A_{13}^2 (A_{22} - A_{11})(R_1\sigma + R_0)^2 = 0;\quad \sigma = a_0^2/a_0'^2$$

$$Q_0 = A_{22}[A_{13}^2 - A_{11}(A_{22} - A_{11})]$$

$$Q_1 = A_{13}^2 (A_{22} - A_{11} + A_{33}) + A_{33}(A_{22} - A_{11})(A_{33} - A_{11} - A_{22})$$

$$R_0 = A_{22}(A_{11} - A_{22} + A_{33}),\quad R_1 = A_{11}A_{33} - A_{13}^2$$

Была показана [15] разрешимость условий (5.7).

Прецессии общего вида. Примеры прецессий общего вида указаны в работах [14, 15]. Было обобщено [14] решение А.И. Докшевича (3.7), (3.8). Отметим, что в найденных условиях существования выполняются все равенства (3.8), исключая ограничение на s_3/s_1 и последнее соотношение. Остальные условия таковы:

$$C_{ij} = 0,\quad (i \neq j),\quad B_{12} = B_{23} = 0,\quad B_{11} = B_{22},\quad C_{11} = C_{22},\quad s_0 = 0$$

$$\lambda_2 = 0,\quad \lambda_1 = a_0 B_{13},\quad \lambda_3 = -b_1 b_3^{-1} B_{11} + a_0(B_{33} - B_{11}),\quad B_{11} = a_0' b_3 B_{13}$$

$$s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}) + \frac{s_1 A_{13}\left[(A_{11} - A_{22})(A_{22} - 2A_{33}) + 2A_{13}^2\right]}{(A_{22} - A_{11})[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2]}$$

Прецессия общего вида [15] такова:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}),\quad \dot\varphi^2 = \mu_1 + \mu_2 \sin\varphi,\quad \mathbf{v} = (a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0)$$

Она имеет место при следующих условиях:

$$A_{ij} = 0\ (i \neq j),\quad B_{ij} = 0\ (i \neq j),\quad B_{11} = B_{22},\quad C_{12} = C_{23} = 0,\quad C_{11} = C_{22}$$

$$s_2 = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\quad a_0 = \frac{A_{11}}{A_{11} - A_{33}},\quad s_1 = \frac{C_{13}(A_{11}^2 + A_{33}^2 - 4A_{11}A_{33})}{(A_{33} - A_{11})(2A_{33} - A_{11})}$$

$$\lambda_3 = \frac{A_{11}B_{33} + B_{11}(A_{33} - 2A_{11})}{A_{11} - A_{33}},\quad \mu_1 = \frac{s_1(A_{11} - A_{33}) + A_{11}(C_{11} - C_{33})}{(A_{33} - A_{11})^2}$$

$$\mu_2 = \frac{2A_{11}C_{13}}{(A_{33} - A_{11})(A_{11} - 2A_{33})}$$

6. Прецессии твердого тела, подвешенного на стержне. Уравнения движения тела, подвешенного на стержне, запишем в виде [27]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + m\rho^2[(\mathbf{e}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{e} - \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})] = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + R(t)\rho(\mathbf{e}\times\mathbf{r}) \qquad (6.1)$$

$$mr_0[\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}] = m\rho[\mathbf{e}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})\boldsymbol{\omega} + \omega^2\mathbf{e}] + P\boldsymbol{\nu} - R(t)\mathbf{r} \quad (6.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела с массой m, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор направления силы тяжести $\mathbf{P} = mg\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{r}$ – единичный вектор, направленный по стержню длиной r_0 из неподвижной точки Q_1 в точку O подвеса тела, $R(t)$ – величина силы реакции, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, направленный от точки O в центр масс C, A – тензор инерции тела, построенный в точке O, $\rho = OC$, g – ускорение свободного падения.

Пусть в точке подвеса тела распределение его масс удовлетворяет условиям Гесса [21]. Подвижную систему координат введем так, чтобы $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$. Тогда

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22})$$

Умножим скалярно обе части уравнения (6.1) на вектор $\mathbf{e}$

$$(A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})^{\bullet} = A\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}). \qquad (6.3)$$

В силу принятых условий, накладываемых на A_{ij}, из равенства (6.3) вытекает, что соотношение $A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e} = 0$ будет инвариантным соотношением. Предположим, что вектор угловой скорости тела имеет вид $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbf{e} + \omega_0\boldsymbol{\nu}$, т.е. движение является полурегулярной прецессией первого типа. Очевидно, $\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0$, т.е. в силу того, что $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$, и соотношения (6.3) имеем

$$\dot{\varphi} = -\omega_0 A_{33}^{-1}(A_{13}a_0'\sin\varphi + A_{33}a_0), \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0'\sin\varphi,\ a_0'\cos\varphi,\ a_0) \qquad (6.4)$$

Было показано [11], что компоненты вектора $\mathbf{r}$ таковы:

$$r_1 = \sin\varphi\sin\phi_0, \quad r_2 = \cos\varphi\sin\phi_0, \quad r_3 = \cos\phi_0 \qquad (6.5)$$

Условия, связывающие параметры задачи (6.1), (6.2),

$$mr_0\omega_0^2 a_0'\rho(a_0\sin\phi_0 - a_0'\cos\phi_0)\sin\phi_0 - m\rho^2 a_0'\omega_0^2(a_0\cos\phi_0 + a_0'\sin\phi_0) -$$

$$- mg\rho a_0\sin\phi_0 + \omega_0^2 a_0 a_0' A_{22}\cos\phi_0 = 0$$

$$mr_0\rho\omega_0^2 a_0(a_0'\cos\phi_0 - a_0\sin\phi_0) - mg\rho a_0' + \omega_0^2 a_0 a_0' A_{22} = 0$$

служат условиями существования полурегулярной прецессии тела, подвешенного на стержне. Отметим, что углы между двумя векторами из тройки $\mathbf{e}$, $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\upsilon}$ постоянны. Скорость точки подвеса также постоянна

$$\upsilon_0 = r_0\left|\omega_0(a_0'\cos\varphi_0 - a_0\sin\phi_0)\right|$$

Таким образом, было показано [1] существование полурегулярной прецессии тела, подвешенного на стержне. Однако это не означает, что возможно прямое перенесение результатов решения классической задачи (2.1) на решение задачи (6.1), (6.2). Так, например, было доказано [10] несуществование регулярных прецессий относительно наклонной оси (прецессий Гриоли) в задаче о движении тела, подвешенного на стержне.

7. Прецессии системы связанных твердых тел. Рассмотрим в однородном силовом поле движение системы твердых шарнирно связанных гиростатов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ($n \geq 1$) [24].

Гиростат S_1 имеет неподвижную точку O_1, а гиростаты S_i ($i = 2, ..., n$) соединены между собой в виде "цепочки" при помощи идеальных сферических шарниров $O_2, ..., O_n$ таким образом, что для каждого гиростата его центр масс и шарниры лежат на одной прямой [13]. Пусть O_1xyz – неподвижная система координат, ось O_1z которой с единичным вектором $\mathbf{v}$ направлена вертикально вверх. Подвижные системы координат $C_ix_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$ свяжем с центрами масс C_i гиростатов и направим по главным осям эллипсоида инерции.

Обозначим через $A^{(i)}$ центральный тензор инерции i-го гиростата с диагональными элементами $A_1^{(i)} < A_2^{(i)} < A_3^{(i)}$, через $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ – векторы абсолютной угловой скорости корпуса i-го гиростата и его гиростатического момента. Положим, что $\mathbf{r}^{(i)}$, $\mathbf{r}^{(i+1)}$ ($\mathbf{r}^{(i+1)} = k^{(i)}\mathbf{r}^{(i)}$) – радиус-векторы точек O_i и O_{i+1} относительно точки C_i, $\omega_j^{(i)}$, $\lambda_j^{(i)}$, $e_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, 3$) – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$, $\mathbf{r}^{(i)}$ на оси $x_j^{(i)}$. Считаем, что $k^{(n)} = 0$.

Уравнения движения данной системы таковы:

$$A^{(i)}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}^{(i)} \times (A^{(i)}\boldsymbol{\omega}^{(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{(i)}) = \mathbf{r}^{(i)} \times (\mathbf{R}^{(i)} - k^{(i)}\mathbf{R}^{(i+1)}) \tag{7.1}$$

где $\mathbf{R}^{(i)}$ – сила реакции со стороны тела S_{i-1}, $\mathbf{R}^{(i+1)}$ – сила реакции со стороны тела S_{i+1}.

В скалярном виде из уравнений (7.1) имеем

$$A_1^{(i)}\dot{\omega}_1^{(i)} + (A_3^{(i)} - A_2^{(i)})\omega_2^{(i)}\omega_3^{(i)} + \lambda_3^{(i)}\omega_2^{(i)} - \lambda_2^{(i)}\omega_3^{(i)} =$$
$$= e_2^{(i)}(R_3^{(i)} - k^{(i)}R_3^{(i+1)}) - e_3^{(i)}(R_2^{(i)} - k^{(i)}R_2^{(i+1)}) \quad (1\ 2\ 3) \tag{7.2}$$

Пусть выполнены условия $e_2^{(i)} = 0$, $\lambda_2^{(i)} = 0$ ($i = 1, ..., n$). Тогда из уравнений (7.2) при выполнении условий

$$e_1^{(i)}\sqrt{A_1^{(i)}(A_3^{(i)} - A_2^{(i)})} - e_3^{(i)}\sqrt{A_3^{(i)}(A_2^{(i)} - A_1^{(i)})} = 0 \tag{7.3}$$

следуют инвариантные соотношения

$$A_1^{(i)}e_1^{(i)}\omega_1^{(i)} + A_3^{(i)}e_3^{(i)}\omega_3^{(i)} + \lambda_3^{(i)}e_1^{(i)} - \lambda_1^{(i)}e_3^{(i)} = 0 \tag{7.4}$$

Таким образом, если для каждого гиростата S_i его центр масс C_i и шарниры O_i, O_{i+1} лежат на одной прямой, перпендикулярной одному из круговых сечений его центрального гирационного эллипсоида, а гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ лежит в плоскости, перпендикулярной этому круговому сечению, то уравнения (7.2) допускают систему инвариантных соотношений (7.4). Очевидно, при $n = 1$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = 0$ приходим к случаю Гесса [21].

Так же как и в задаче о движении тела, подвешенного на стержне, инвариантным соотношениям (7.4) можно удовлетворить, рассмотрев класс полурегулярных прецессий тел S_i (положим $\boldsymbol{\lambda}^{(i)} = 0$)

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} = \dot{\varphi}_i\mathbf{k}_i + \omega_0\mathbf{v}, \quad \dot{\varphi}_i = \omega_0(a_i + b_i\sin\varphi_i); \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{O}_i\mathbf{O}_{i+1}/O_iO_{i+1} \tag{7.5}$$

Можно показать [13], что при выполнении равенств (7.4) движение цепочки тяжелых твердых тел слагается из двух движений: 1) движения ломаной $O_1O_2...O_{n+1}$ как цепочки тяжелых стержней с массами, равными массам соответствующих тел, и центральными моментами инерции $A_2^{(i)}$, 2) вращений тела относительно звеньев указанной ломаной. Если же имеют место дополнительные соотношения (7.5), то полурегулярная прецессия системы S_1, ..., S_n является суперпозицией равномерного вращения вокруг вертикали с угловой скоростью ω_0 ломаной $O_1O_2...O_n$ как твердого тела, и вращений тел S_i по закону из соотношений (7.5). Отметим, что при этом все звенья лежат в одной вертикальной плоскости, а в равенствах (7.5) некоторые из b_i могут быть равными нулю.

Были рассмотрены [16] прецессионные движения связки двух несимметричных тяжелых тел в предположении, что одно тело совершает прецессионное движение, а второе равномерно вращается относительно вертикали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
2. *Аппельрот Г.Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1938. № 3. С. 385–411.
3. *Гриоли Д.* К общей теории асимметричных гироскопов // Проблемы гироскопии. Под ред. Г. Циглера. М.: Мир, 1967. С. 34–39.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. 1947. T. 26, fsk. 3–4. P. 271–281.
5. *Горр Г.В.* Регулярная прецессия гиростата в центральном ньютоновском поле сил // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 105–108.
6. *Горр Г.В.* Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 451–458.
7. *Горр Г.В.* Прецессии относительно вертикали тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1977. Вып. 9. С. 3–17.
8. *Горр Г.В.* Одно свойство прецессии относительно наклонной оси в задаче о движении тяжелого гиростата // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 35–41.
9. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
10. *Горр Г.В., Кононыхин Г.А.* О динамической невозможности регулярной прецессии типа Гриоли при движении твердого тела, подвешенного на стержне // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 371–374.
11. *Горр Г.В., Кононыхин Г.А.* Полурегулярная прецессия гироскопа Гесса, подвешенного на стержне, и ее обобщение в задаче о движении системы двух твердых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 2. С. 48–51.
12. *Горр Г.В., Курганский Н.В.* О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 16–20.
13. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 707–712.
14. *Горр Г.В.* Новое решение обобщенной задачи о движении тела с неподвижной точкой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 532–535.
15. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Прецессионно-изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 31–39.
16. *Бирман И.Е., Горр Г.В.* К динамике прецессионных движений системы двух твердых тел в поле силы тяжести // ПММ. 1995. Т. 59. Вып.2. С. 188–198.

17. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rendiconti Sem. mat. Univ. Padova. 1957. T. 27. № 2. P. 276–283 = *Брессан А.* О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1958. № 6. С. 153–158.
18. *Харламова Е.И., Горр Г.В.* О безнутационных движениях твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 8. С. 23–31.
19. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 2001. Вып. 31. С. 3–17.
20. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopi forces, II // J. Theor. and Appl. Mech. 1986. T. 5, № 5. P. 755–762.
21. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punk // Math. Ann. 1890. B. 37. H. 2. S. 153–181.
22. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. Отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
23. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 167 с.
24. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1949. Т. 2 . С. 153–309.
25. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* К вопросу о классификации движений гиростата Жуковского // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 8. С. 104–111.
26. *Bentsik E.* Su di un tipo di precessioni regolari per un corpo rigido asimmetrico soggento a forze newtoniane // Rendiconti Sem, mat. Univ. Padova. 1968–1969. V. 41. P. 252 – 260 = *Бентсик Э.* Об одном виде регулярной прецессии твердого несимметричного тела в поле ньютоновского притяжения // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1970. № 2. С. 3–8.
27. *Румянцев В.В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5–15.
28. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 52–73.

Донецк

Поступила в редакцию
25.III.2003