

УДК 531.36; 531.381

© 2003 г. А. П. Маркеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕЦЕССИИ ГРИОЛИ

Рассматривается движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести. Тело не является динамически симметричным, а центр тяжести лежит на перпендикуляре к одному из круговых сечений эллипсоида инерции, восстановленном из неподвижной точки. Гриоли установил, что твердое тело, обладающее такой геометрией масс, может совершать регулярную прецессию вокруг невертикальной оси. Дается решение задачи об устойчивости этой прецессии.

В 1947 г. Гриоли [1] сделал неожиданное открытие: твердое тело, не обладающее динамической симметрией и движущееся в однородном поле тяжести, может совершать регулярную прецессию вокруг оси, не совпадающей с вертикалью. До этого регулярные прецессии тяжелого твердого тела были известны только в случаях Эйлера и Лагранжа, когда тело динамически симметрично, а в литературе иногда [2, 3] высказывались утверждения о том, что у тяжелого твердого тела регулярные прецессии с невертикальной осью прецессии невозможны.

К настоящему времени задача о существовании регулярных прецессий твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести полностью решена. Исследования показали [4–7], что существуют только три типа регулярных прецессий: 1) прецессия динамически симметричного тела в случае Эйлера вокруг произвольной оси, имеющей неизменное направление и проходящей через неподвижную точку, 2) регулярная прецессия вокруг вертикали в случае Лагранжа, 3) открытая Гриоли регулярная прецессия тела, не являющегося динамически симметричным, вокруг оси, наклоненной к вертикали. Для всех типов регулярных прецессий центр тяжести тела лежит на перпендикуляре к одному из круговых сечений его эллипсоида инерции для неподвижной точки. История открытия и исследования прецессионных движений твердого тела изложена в работах [8–10].

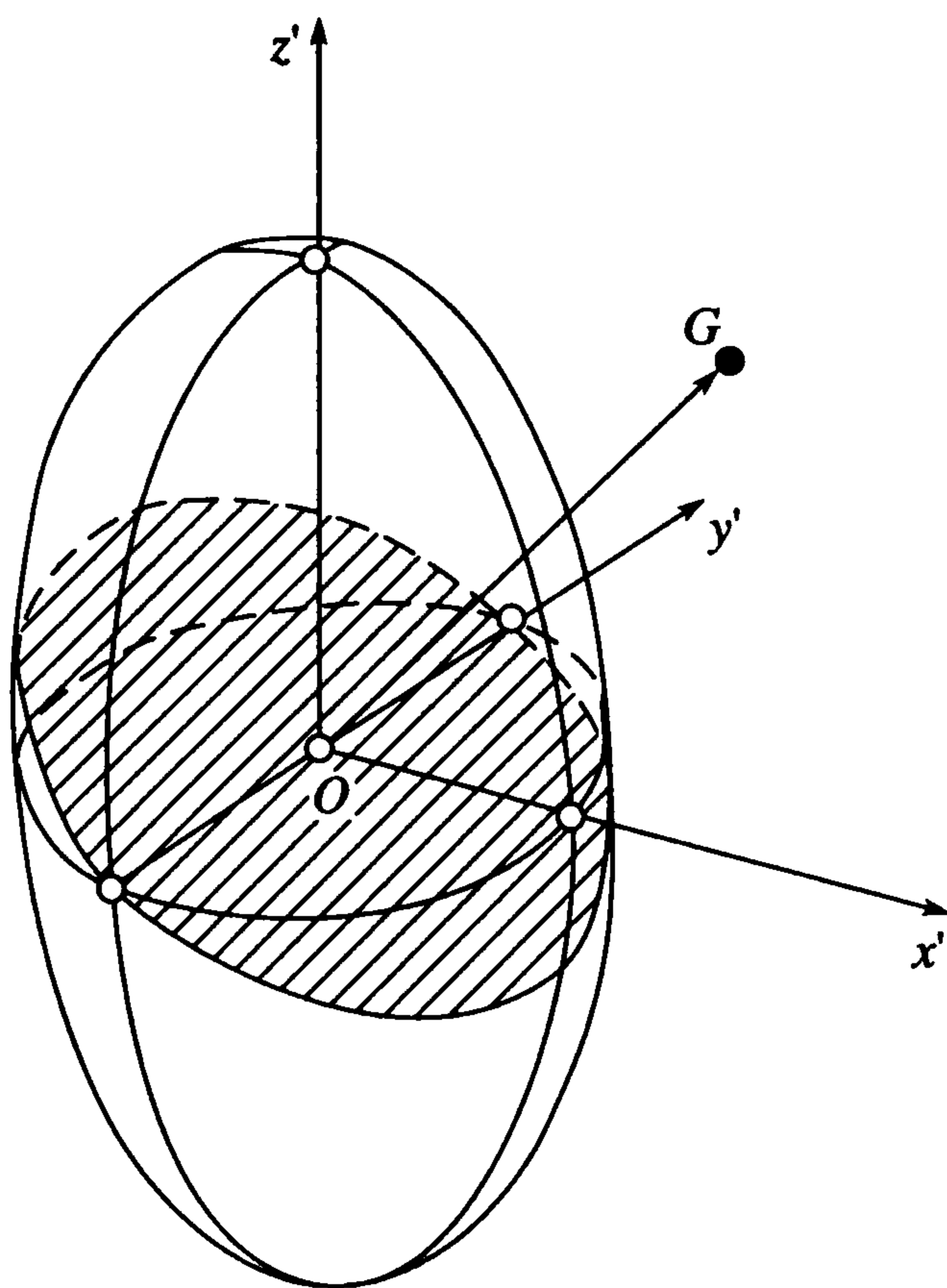
Задача об устойчивости регулярной прецессии Гриоли оказалась очень сложной и, в отличие от прецессий в классических случаях Эйлера и Лагранжа, еще не исследована полностью, хотя попытки ее исследования предпринимались [11–14]. Ниже приводятся новые результаты исследования этой задачи; краткое их изложение опубликовано ранее [15].

1. О движении твердого тела в случае прецессии Гриоли. Рассмотрим движение твердого тела с одной неподвижной точкой O в однородном поле тяжести. Вес тела mg , расстояние от центра тяжести до неподвижной точки равно l . Пусть точка закрепления выбрана так, что выполняются следующие условия (условия Гриоли):

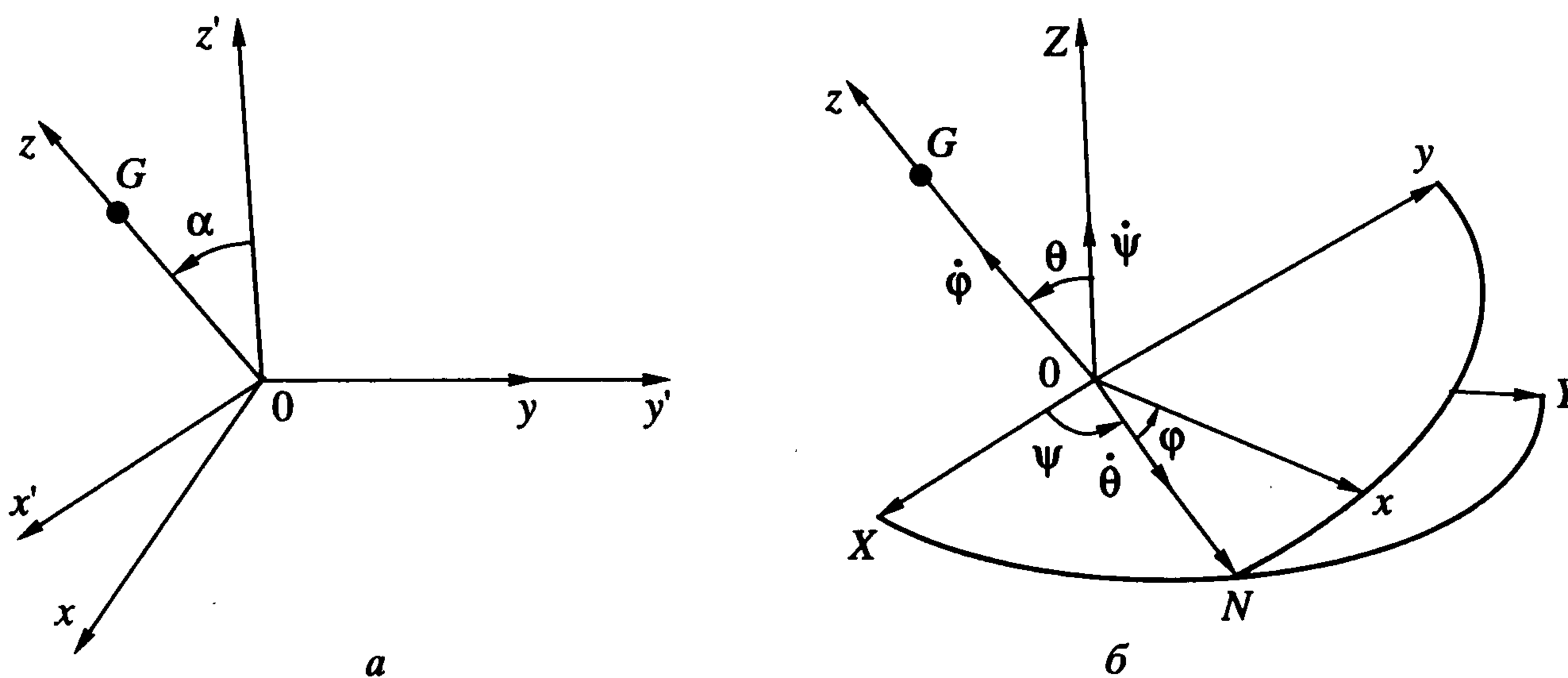
$$x'_g \sqrt{B-C} = z'_g \sqrt{A-B}, \quad y'_g = 0, \quad A > B > C \quad (1.1)$$

Здесь x'_g, y'_g, z'_g – координаты центра тяжести G в системе координат $Ox'y'z'$, образованной главными осями инерции тела для неподвижной точки, A, B, C – соответствующие моменты инерции. Условия (1.1) означают, что тело не обладает динамической симметрией, а его центр тяжести лежит на перпендикуляре к одному из круговых сечений эллипсоида инерции, восстановленном из неподвижной точки (фиг. 1).

Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх, а система $Oxyz$ жестко связана с телом, причем ось Oy совпадает с главной осью Oy' инерции тела для точки O , отвечающей среднему по величине мо-



Фиг. 1



Фиг. 2

менту инерции B , ось Oz проходит через центр тяжести тела. Трехгранник $Oxyz$ получается из трехгранника $Ox'y'z'$ при помощи поворота на угол α вокруг оси Oy' (фиг 2, a), причем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x'_g}{z'_g} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A-B}{B-C}}$$

В системе координат $Oxyz$ матрица \mathbf{J} тензора инерции и единичный вектор γ неподвижной вертикальной оси OZ записываются в виде

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$J_x = J_y = B, \quad J_z = A - B + C, \quad J_{xz} = -\sqrt{(A - B)(B - C)}$$

Кинетическая и потенциальная энергии тела задаются выражениями

$$T = 1/2 J_x (p^2 + q^2) + 1/2 J_z r^2 - J_{xz} p r, \quad \Pi = mgl \gamma_3 \quad (1.2)$$

Здесь p , q и r – проекции вектора угловой скорости ω тела на оси Ox , Oy и Oz соответственно.

За обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 , задающие ориентацию трехгранника $Oxuz$ относительно неподвижной системы координат, возьмем углы Эйлера φ, θ, ψ , которые вводятся обычным образом (фиг 2, б). Тогда

$$p = \dot{q}_3 \gamma_1 + \dot{q}_2 \cos q_1, \quad q = \dot{q}_3 \gamma_2 - \dot{q}_2 \sin q_1, \quad r = \dot{q}_3 \gamma_3 + \dot{q}_1 \quad (1.3)$$

$$\gamma_1 = \sin q_2 \sin q_1, \quad \gamma_2 = \sin q_2 \cos q_1, \quad \gamma_3 = \cos q_2$$

В качестве обобщенных импульсов примем безразмерные величины p_i ($i = 1, 2, 3$), определяемые равенствами

$$p_i = \frac{1}{An} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

Кинетическая энергия T вычисляется по формулам (1.2), (1.3), а величина n определяется из соотношений

$$n^2 = \frac{mgl}{(A - B + C) \sqrt{b^2 + 1}}, \quad b = \frac{b_1}{b_2}, \quad b_1 = \sqrt{(1 - \theta_b)(\theta_b - \theta_c)}, \quad b_2 = 1 - \theta_b + \theta_c$$

Здесь $\theta_b = B/A$, $\theta_c = C/A$ – безразмерные параметры задачи. В плоскости θ_b, θ_c область их допустимых значений ($0 < \theta_c < \theta_b < 1$, $\theta_b + \theta_c > 1$) представляет собой прямоугольный треугольник с вершинами $P_1(1/2, 1/2)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$.

Если еще за независимую переменную принять величину $\tau = n(t + t_0)$, где t_0 – произвольная постоянная, то при учете равенств (1.2)–(1.4) для функции Гамильтона можно получить выражение

$$H = \frac{1}{2\theta_b \theta_c \sin^2 q_2} \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = 2} a_{k_1 k_2 k_3} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} + \Pi^* \quad (1.5)$$

$$a_{200} = \theta_b (\theta_b \sin^2 q_2 + b_2 \cos^2 q_2) - b_1^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + 2\theta_b b_1 \sin q_1 \sin q_2 \cos q_2$$

$$a_{110} = -2(b_1^2 \sin q_1 \cos q_1 \cos q_2 + \theta_b b_1 \cos q_1 \sin q_2) \sin q_2$$

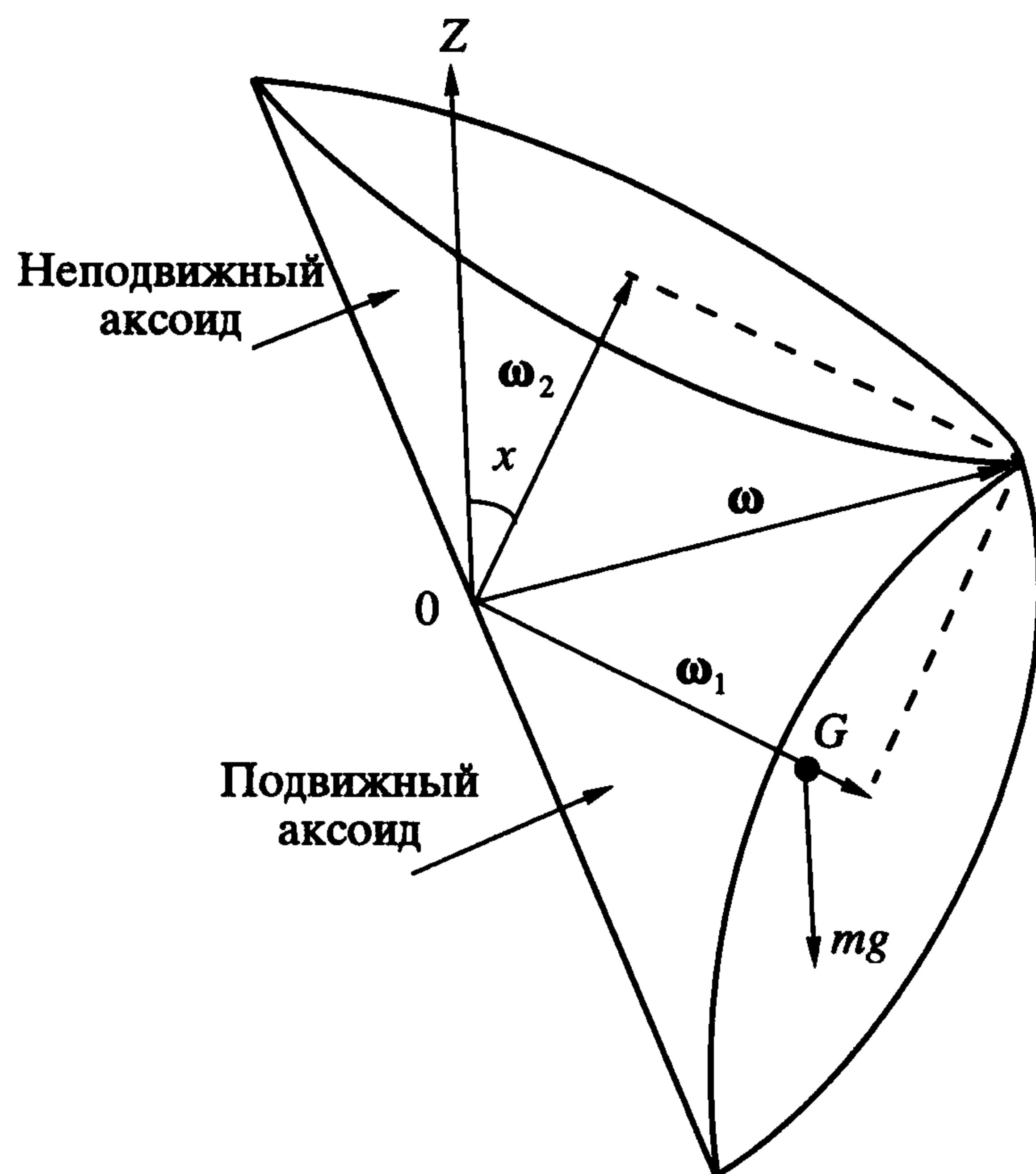
$$a_{101} = -2(\theta_c \cos q_2 + b_1^2 \sin^2 q_1 \cos q_2 + \theta_b b_1 \sin q_1 \sin q_2)$$

$$a_{020} = (\theta_c + b_1^2 \cos^2 q_1) \sin^2 q_2$$

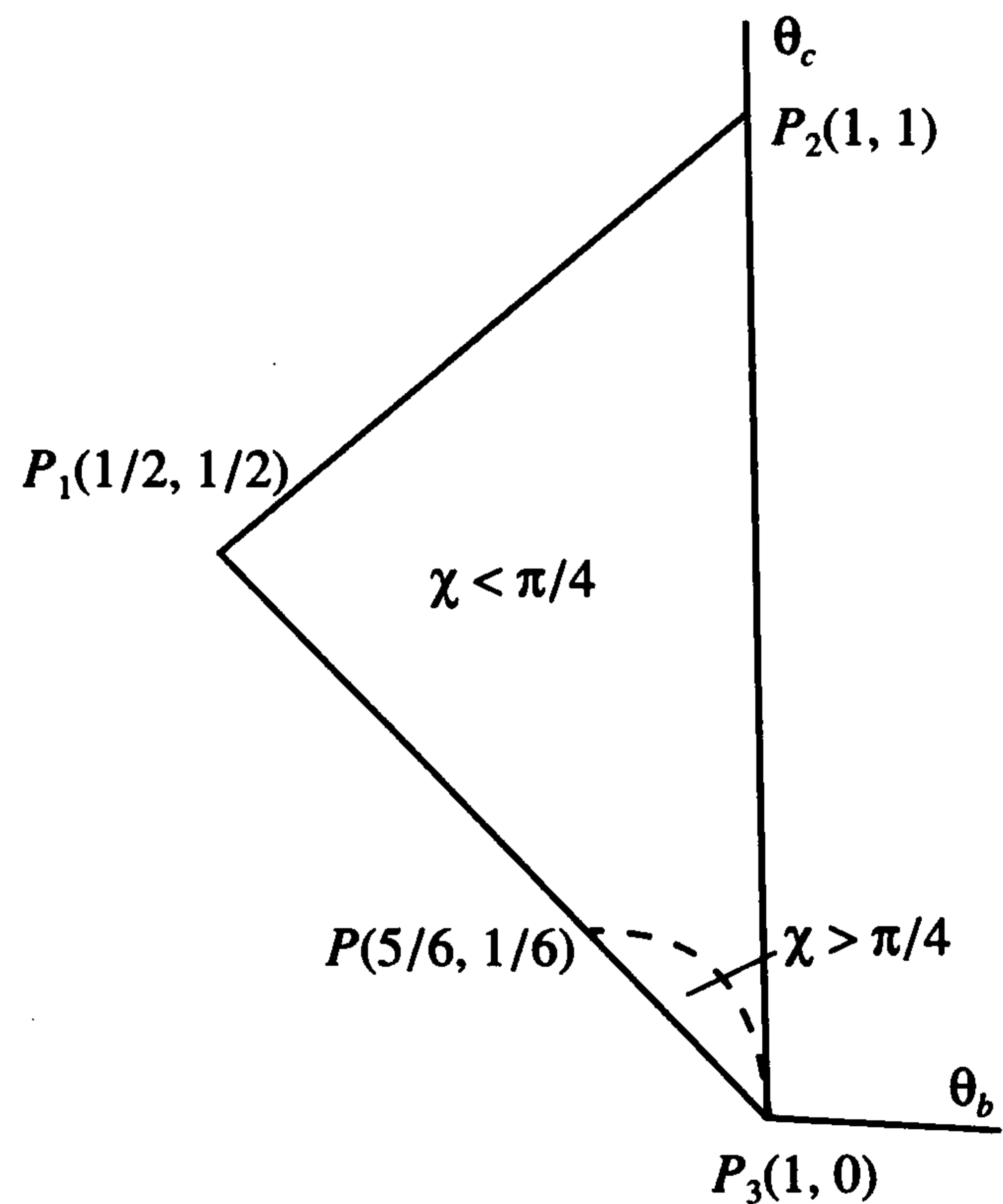
$$a_{011} = 2b_1^2 \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2$$

$$a_{002} = \theta_c + b_1^2 \sin^2 q_1$$

$$\Pi^* = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos q_2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Прецессии Гриоли отвечает следующее решение уравнений движения:

$$q_1 = f_1(\tau) = -\frac{\pi}{2} + \tau - \operatorname{arctg}(b \sin \tau), \quad p_1 = g_1(\tau) = b_2(1 - b \cos \tau) \quad (1.6)$$

$$q_2 = f_2(\tau) = \arccos \frac{b \cos \tau}{\sqrt{b^2 + 1}}, \quad p_2 = g_2(\tau) = \frac{b \sin \tau}{\sqrt{1 + b^2 \sin^2 \tau}} (1 + \theta_c - b b_2 \cos \tau) \quad (1.7)$$

$$q_3 = f_3(\tau), \quad p_3 = \frac{\theta_c}{b_2 \sqrt{b^2 + 1}} \quad (1.8)$$

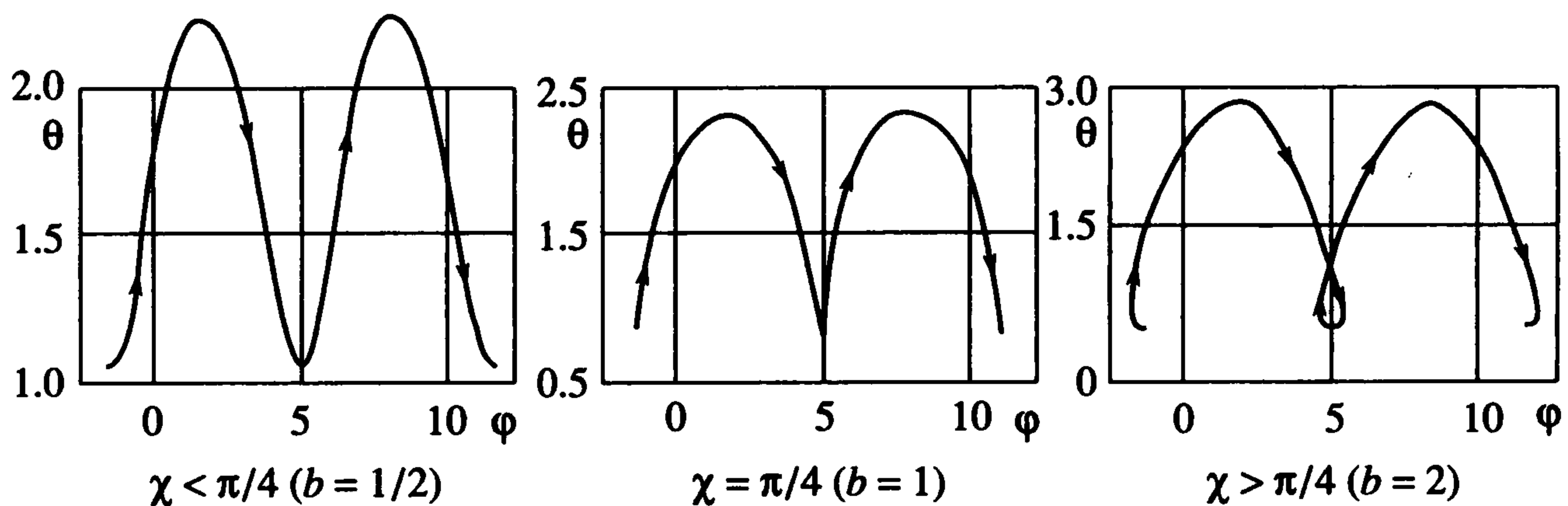
причем

$$f_3(\tau) = q_3(0) + (2k + 1) \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \tau}{\sqrt{b^2 + 1}}, \quad \text{если } k\pi < \tau < (k + 1)\pi$$

$$f_3(m\pi) = q_3(0) + m\pi, \quad m = 0, 1, \dots$$

В прецессии Гриоли ось тела, на которой лежит центр тяжести, является осью собственного вращения, а ось прецессии наклонена к вертикали под углом $\chi = \operatorname{arctg} b$ (фиг. 3). Угол между осями подвижного и неподвижного аксоидов прямой. Модули векторов угловых скоростей собственного вращения ω_1 и прецессии ω_2 одинаковы и равны n . Центр тяжести тела движется по окружности с центром на оси прецессии и лежащей в плоскости, перпендикулярной этой оси. Движение тела является периодическим: за время, равное периоду $2\pi/n$, тело возвращается к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве, при этом вектор угловой скорости принимает свое начальное значение.

Фиг. 4 иллюстрирует зависимость угла χ от величины моментов инерции тела. Штрихами показана кривая, на которой $\chi = \pi/4$ (это участок гиперболы). Границу



Фиг. 5

P_1P_3 она пересекает в точке $P(5/6, 1/6)$, вертикальная прямая $\theta_b = 1$ является ее касательной в точке P_3 . В области $\chi < \pi/4$ угол собственного вращения φ монотонно возрастает ($f_1' > 0$), а в области $\chi > \pi/4$ величина f_1' может обращаться в нуль и угол φ не обладает свойством монотонности. На фиг. 5 в плоскости θ, φ показаны траектории решения (1.6)–(1.8), соответствующего прецессии Гриоли, при различных значениях инерционных параметров тела.

2. Постановка задачи об устойчивости. Получение уравнений возмущенного движения. Координата q_3 является циклической. Заменяя в функции Гамильтона (1.5) импульс p_3 на его постоянное значение из второго выражения (1.8), получим гамильтониан $H(q_1, q_2, p_1, p_2; \theta_b, \theta_c)$ приведенной системы с двумя степенями свободы. Эта система допускает 2π -периодическое по τ решение, задаваемое равенствами (1.6), (1.7).

Введем возмущения Q_i, P_i , положив, как обычно,

$$q_i = f_i(\tau) + Q_i, \quad p_i = g_i(\tau) + P_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Пусть $Y(\tau)$ – матрица фундаментальных решений линеаризованной относительно Q_i, P_i системы уравнений возмущенного движения ($Y(0) = E$, где E – единичная матрица четвертого порядка). Она находится, как правило, при помощи численного интегрирования. Характеристическое уравнение матрицы $Y(2\pi)$ является возвратным

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0 \quad (2.2)$$

где a_1 – след матрицы $Y(2\pi)$, a_2 – сумма всех ее главных миноров второго порядка.

Так как система уравнений движения с функцией Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2; \theta_b, \theta_c)$ автономна, характеристическое уравнение (2.2) имеет корень, равный единице. Но ввиду того, что оно возвратное, этот корень будет кратным, причем его кратность не меньше двух. Поэтому коэффициенты уравнения (2.2) связаны соотношением $a_2 = 2(a_1 - 1)$ и оно может быть записано в виде

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - 2a\rho + 1) = 0, \quad a = a_1/2 - 1 \quad (2.3)$$

Периодическое движение (1.6), (1.7) не является изолированным. Оно принадлежит семейству периодических движений

$$q_i = F_i(\Omega(h)\tau, h), \quad p_i = G_i(\Omega(h)\tau, h), \quad \tau = nt + \tau_0 \quad (\tau_0 = nt_0) \quad (2.4)$$

где h – постоянная интеграла $H = h = \text{const}$. В невозмущенном движении (1.6), (1.7) $h = h_0 = (\theta_c + 1)/2$, причем $\Omega(h_0) = 1$, $d\Omega(h_0)/dh_0 \neq 0$.

Линеаризованные относительно Q_i, P_i уравнения возмущенного движения допускают два типа решений, получающихся дифференцированием функций q_i, p_i из семейства (2.4) по произвольным постоянным τ_0 и h . Решения первого типа $\partial F_i/\partial \tau_0, \partial G_i/\partial \tau_0$ ($i = 1, 2$) – 2π -периодические функции τ . (В соответствии с теорией Флоке линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами это и указывает на существование корня $\rho = 1$ у характеристического уравнения (2.2)). Решение же второго типа $\partial F_i/\partial h, \partial G_i/\partial h$ ($i = 1, 2$), имеет структуру вида $v_i(\tau) + \tau \mu_i(\tau)$ ($i = 1, 2$), где функции $v_i(\tau), \mu_i(\tau)$ 2π -периодичны по τ . Согласно теории Флоке, наличие слагаемого $\tau \mu_i(\tau)$ означает, что матрица $Y(2\pi)$ не приводится к диагональной форме. Следовательно [16], периодическое движение (1.6), (1.7) неустойчиво по Ляпунову в первом приближении.

Оно будет неустойчивым по Ляпунову и в нелинейной задаче. Действительно, пусть

$$h = h^*, \quad 0 < |h^* - h_0| \ll 1$$

Этому значению h отвечает периодическое движение q_i^*, p_i^* из семейства (2.4). Возьмем это движение в качестве возмущенного. Так как $\Omega(h^*) \neq \Omega(h_0)$, то с течением времени точки с координатами $q_i(\tau), p_i(\tau)$ и $q_i^*(\tau), p_i^*(\tau)$ в фазовом пространстве q_1, q_2, p_1, p_2 разойдутся на конечное расстояние, как бы ни были близки их начальные положения $q_i(0), p_i(0)$ и $q_i^*(0), p_i^*(0)$. Это и означает, что имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Будем исследовать орбитальную устойчивость периодического движения (1.6), (1.7), т.е. искать ответ на вопрос, будут ли траектории возмущенных движений при всех τ оставаться в малой окрестности траектории невозмущенного движения, если начальные точки этих траекторий достаточно близки.

Был разработан [17] алгоритм построения уравнений возмущенного движения в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений. Следуя описанному ранее подходу [17], вместо четырех возмущений координат и импульсов Q_i, P_i ($i = 1, 2$), задаваемых равенствами (2.1), введем три величины ξ_2, η_1, η_2 , характеризующие отклонение возмущенных траекторий от траектории невозмущенного периодического движения (1.6), (1.7). Для этого сделаем в системе с гамильтонианом $H(q_1, q_2, p_1, p_2; \theta_b, \theta_c)$ линейную относительно ξ_2, η_1, η_2 замену переменных

$$q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$$

по формулам

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\xi_1) + a_{i1}(\xi_1)\xi_2 + a_{i2}(\xi_1)\eta_1 + a_{i3}(\xi_1)\eta_2 \\ p_i &= g_i(\xi_1) + a_{i+2,1}(\xi_1)\xi_2 + a_{i+2,2}(\xi_1)\eta_1 + a_{i+2,3}(\xi_1)\eta_2; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $f_i(\tau), g_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) задают невозмущенное периодическое движение (1.6), (1.7). Коэффициенты a_{ij} – 2π -периодические функции от ξ_1 . Они подбираются так, чтобы в новых переменных исследуемое периодическое движение записывалось в виде равенств

$$\xi_1(\tau) = \tau + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (2.6)$$

а замена (2.5) была каноническим унивалентным преобразованием. Было показано [17], что коэффициенты $a_{ij}(\xi_1)$ должны вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\Delta} [e_1 f_1' - e_4 f_2' - 2(e_1 c_5 - e_4 c_6 + c_1 c_5^2 - c_3^2 c_4) g_2'] \\ a_{12} &= -\frac{e_3}{\Delta}, \quad a_{13} = \frac{1}{\Delta} (c_5 f_1' - 2c_4 f_2' - e_6 g_2') \\ a_{21} &= \frac{1}{\Delta} [e_5 f_1' - e_1 f_2' + 2(e_1 c_5 - e_4 c_6 + c_1 c_5^2 - c_3^2 c_4) g_1'] \\ a_{22} &= \frac{e_2}{\Delta}, \quad a_{23} = \frac{1}{\Delta} (2c_6 f_1' - c_5 f_2' + e_6 g_1') \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{1}{\Delta} (2c_1 f_2' + e_1 g_1' + e_5 g_2'), \quad a_{32} = \frac{c_3}{\Delta}, \quad a_{33} = \frac{1}{\Delta} (-f_2' + c_5 g_1' + 2c_6 g_2') \\ a_{41} &= \frac{1}{\Delta} (-2c_1 f_1' - e_4 g_1' - e_1 g_2'), \quad a_{42} = -\frac{c_2}{\Delta}, \quad a_{43} = \frac{1}{\Delta} (f_1' - 2c_4 g_1' - c_5 g_2') \end{aligned}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по переменной ξ_1 и приняты обозначения

$$\begin{aligned} \Delta &= c_3 f_1' - c_2 f_2' + e_3 g_1' - e_2 g_2' \\ e_1 &= c_2 c_3 - 2c_1 c_5, \quad e_2 = c_3 c_5 - 2c_2 c_6, \quad e_3 = c_2 c_5 - 2c_3 c_4 \\ e_4 &= c_2^2 - 4c_1 c_4, \quad e_5 = c_3^2 - 4c_1 c_6, \quad e_6 = c_5^2 - 4c_4 c_6 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Замена переменных (2.5) содержит шесть произвольных постоянных параметров c_1, c_2, \dots, c_6 . При их выборе надо следить за тем, чтобы величина Δ не обращалась в нуль при $0 \leq \xi_1 \leq 2\pi$.

Гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ получается из гамильтониана $H(q_1, q_2, p_1, p_2; \theta_b, \theta_c)$ заменой переменных q_1, q_2, p_1, p_2 их выражениями через $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ по формулам (2.5). Функцию Γ можно разложить в ряд по степеням η_1, ξ_2, η_2 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots \quad (2.9)$$

где постоянная h_0 отброшена, Γ_k – форма степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \eta_1 + \varphi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \Gamma_3 = \psi_1(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \eta_1 + \varphi_3(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \\ \Gamma_4 &= \chi(\xi_1) \eta_1^2 + \psi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \eta_1 + \varphi_4(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\chi(\xi_1)$ – 2π -периодическая функция от ξ_1 , а φ_m, ψ_m – формы степени m относительно ξ_2, η_2 с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами.

Орбитальная устойчивость невозмущенного периодического движения означает устойчивость системы с функцией Гамильтона (2.9) по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2 .

3. Об орбитальной устойчивости в первом приближении. Пусть $X(\xi_1)$ – матрица фундаментальных решений ($X(0) = E$, где E – единичная матрица второго порядка) линейной системы с 2π -периодическими по независимой переменной ξ_1 коэффициентами

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_1} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \quad (3.1)$$

где $\varphi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1)$ – квадратичная относительно ξ_2, η_2 часть функции Γ_2 из (2.10). Характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi)$ имеет вид

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad a = \frac{1}{2}(x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)) \quad (3.2)$$

Коэффициент a можно также вычислить при помощи второго равенства (2.3).

Если $|a| > 1$, то уравнение (3.2) имеет один корень, модуль которого больше единицы. Имеет место параметрический резонанс, и прецессия Гриоли орбитально неустойчива на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [16].

Значения параметров θ_b, θ_c , для которых $|a| = 1$, задают границы областей параметрического резонанса (ОПР).

Если $|a| < 1$, то прецессия орбитально устойчива в первом приближении. В этом случае корни уравнения (3.2) комплексно сопряженные и имеют модули, равные единице: $\rho_1 = \exp(i2\pi\lambda)$, $\rho_2 = \exp(-i2\pi\lambda)$, где λ – вещественная величина, определяемая из уравнения

$$\cos 2\pi\lambda = a \quad (3.3)$$

Аналитическое и численное исследования показали, что существуют только две ОПР. На фиг.6 эти области заштрихованы. Они исходят из точек $P_4(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ и $P_7(2\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$, лежащих на отрезке P_1P_2 . В малых окрестностях этих точек, когда $\theta_b = \theta_c + \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (т.е. когда твердое тело мало отличается от динамически симметричного тела, сплюснутого вдоль оси симметрии Ox'), для границ ОПР были получены аналитические выражения.

Левая граница области, исходящей из точки P_4 , оканчивается в точке $P_5(0.74957, 0.25043)$ отрезка P_1P_3 , а правая граница – в точке $P_6(0.75652, 0.24348)$. При малых ε кривая P_4P_5 задается уравнением

$$\begin{aligned} \theta_b &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{540}(267 - 73\sqrt{3})\varepsilon^2 + \frac{1}{1944000}(278042\sqrt{3} - 141267)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) = \\ &= 0.5774 + 0.2603\varepsilon^2 + 0.1751\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad (3.4)$$

а кривая P_4P_6 – уравнением

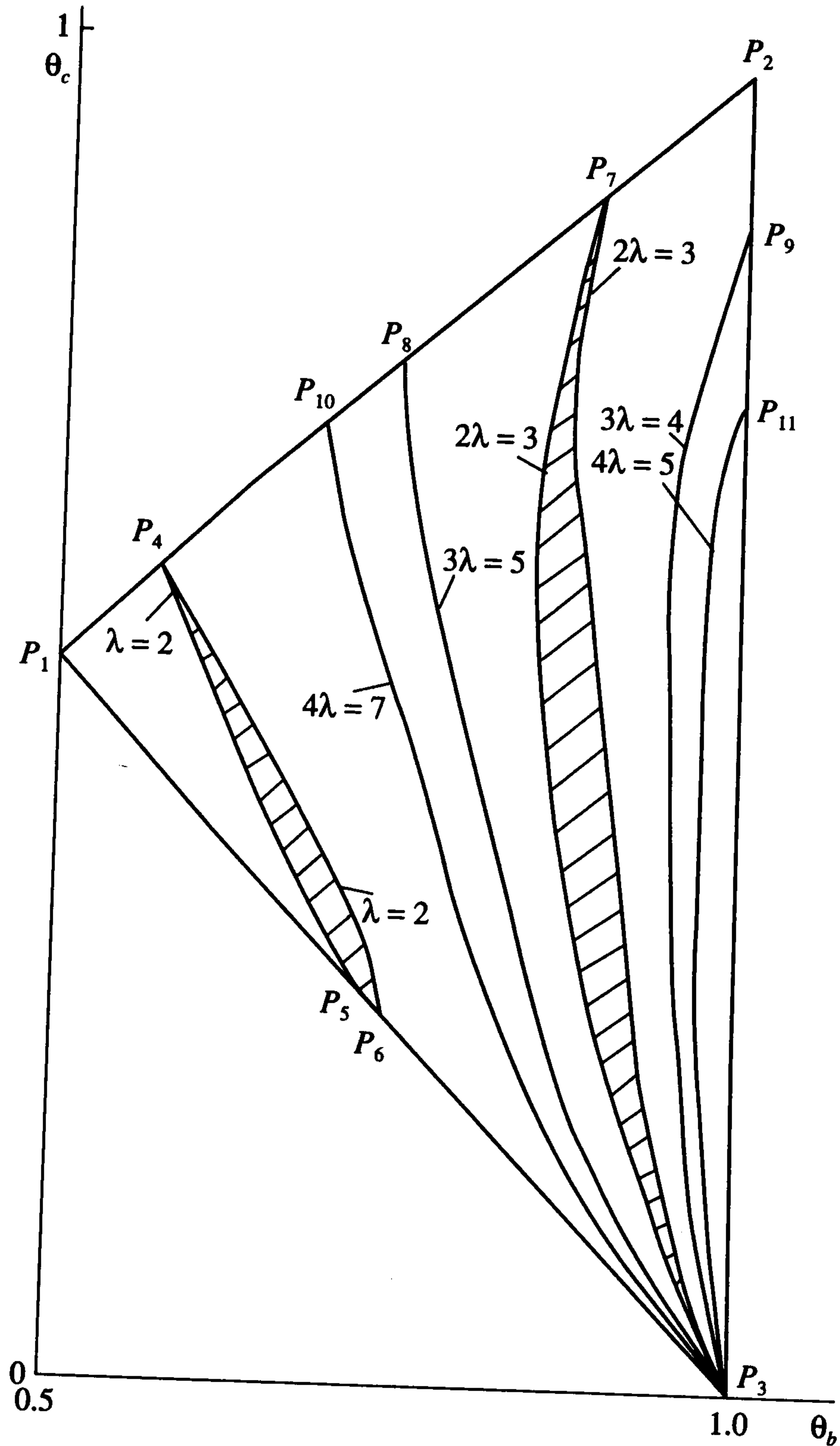
$$\begin{aligned} \theta_b &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{540}(267 - 73\sqrt{3})\varepsilon^2 + \frac{1}{1944000}(453542\sqrt{3} + 1147983)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) = \\ &= 0.5774 + 0.2603\varepsilon^2 + 0.9946\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обе границы ОПР, исходящей из точки P_7 , при $\theta_c \rightarrow 0$ стремятся к угловой точке P_3 области допустимых значений параметров. Вблизи точки P_7 граничные кривые задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \theta_b &= \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{1000}(405 - 373\sqrt{5})\varepsilon^2 \mp \frac{1}{80}\sqrt{3050 - 1310\sqrt{5}}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) = \\ &= 0.8944 - 0.4291\varepsilon^2 \mp 0.1374\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где верхний и нижний знаки относятся соответственно к левой и правой границам.

4. Нелинейный анализ. Если значения параметров θ_b, θ_c не принадлежат ОПР, то для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости прецессии Гриоли недостаточно первого приближения. Необходим анализ нелинейных уравнений возмущенного движения.



Фиг. 6

4.1. О методе исследования. Для решения задачи сначала по формулам (2.5), (2.7) делалась каноническая замена переменных $q_i, p_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$ ($i = 1, 2$), чтобы в новых переменных решение, отвечающее прецессии Гриоли, записывалось в виде (2.6). Для значений θ_b, θ_c , лежащих в области $\chi < \pi/4$ на фиг. 4, параметры c_k , содержащиеся в (2.5), (2.7), выбирались такими: $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = 0, c_3 = 1$. Тогда замена (2.5) имеет вид

$$q_1 = f_1(\xi_1), \quad q_2 = f_2(\xi_1) + \xi_2$$

$$p_1 = g_1(\xi_1) + \frac{g_2' \xi_2 + \eta_1 - f_2' \eta_2}{f_1'}, \quad p_2 = g_2(\xi_1) + \eta_2 \quad (4.1)$$

На кривой $\chi = \pi/4$ и в области $\chi > \pi/4$ принято, что $c_1 = c_2 = c_4 = c_6 = 0$, $c_3 = -c_5 = 1$, и замена (2.5) записывается в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(\xi_1) - \eta_2, & q_2 &= f_2(\xi_1) + \frac{f_1' \xi_2 - \eta_1 + (f_2' + g_1') \eta_2}{f_1' + g_2'} \\ p_1 &= g_1(\xi_1) + \frac{g_2' \xi_2 + \eta_1 - (f_2' + g_1') \eta_2}{f_1' + g_2'}, & p_2 &= g_2(\xi_1) + \eta_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

После перехода по формулам (4.1) или (4.2) к переменным $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ и получения представления гамильтониана возмущенного движения в виде ряда (2.9) для решения задачи об орбитальной устойчивости надо получить нормальную форму гамильтониана возмущенного движения, а затем воспользоваться теоремой Арнольда – Мозера [18, 19] и условиями устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонанса [20, 21]. Нормализация квадратичной части гамильтониана (2.9) осуществлялась при помощи описанных ранее алгоритмов [17, 21], нормализация членов более высоких степеней (в данном случае третьей и четвертой степени) – методом Депри – Хори [20, 22].

При анализе устойчивости важно наличие или отсутствие резонансов, причем наиболее существенны резонансы до четвертого порядка включительно, т.е. случаи, когда величина $m\lambda$, где λ определяется из уравнения (3.3), равняется целому числу для $m = 1, 2, 3, 4$.

Пусть параметры θ_b, θ_c лежат на границе области устойчивости в линейном приближении. Тогда $|a| = 1$. При $a = 1$ имеет место резонанс первого порядка (λ – целое число), а при $a = -1$ – резонанс второго порядка (λ – полуцелое число). Будем рассматривать общий случай, когда матрица $X(\xi_1)$ фундаментальных решений системы (3.1), вычисленная при $\xi_1 = 2\pi$, не приводится к диагональной форме. При помощи канонического преобразования

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \rightarrow w_1, r_1, x_2, y_2 \quad (4.3)$$

функцию Гамильтона (2.9) можно привести к следующей нормальной форме [21]:

$$H = r_1 + \frac{1}{2} \delta y_2^2 + k_{30} x_2^3 + k_{10} x_2 r_1 + k_{40} x_2^4 + k_{20} x_2^2 r_1 + k_{00} r_1^2 + O_5 \quad (4.4)$$

где k_{ij} – постоянные, величина δ равна 1 или -1 , ее конкретное значение определяется в процессе нормализации линейной системы (3.1). Через O_n в (4.4) и далее обозначается ряд, начинающийся с членов не ниже n -й степени относительно $|r_1|^{1/2}, x_2, y_2$. Коэффициенты ряда O_5 в (4.4) периодичны относительно w_1 . Период равен 2π при резонансе первого порядка и 4π при резонансе второго порядка. Если коэффициент k_{30} нормальной формы (4.4) отличен от нуля или он равен нулю, но $\delta k_{40} < 0$, то периодическое движение орбитально неустойчиво; если же в нормальной форме (4.4) коэффициент k_{30} равен нулю, но при этом $\delta k_{40} > 0$, то периодическое движение орбитально устойчиво [21].

Пусть теперь параметры θ_b, θ_c лежат внутри области устойчивости в линейном приближении. Тогда $|a| < 1$. Если $a = -1/2$, то имеет место резонанс третьего порядка (3λ – целое число), а если $a = 0$, то имеем резонанс четвертого порядка (4λ – целое число).

Рассмотрим сначала нерезонансный случай, когда $a \neq -1/2$ и $a \neq 0$. Тогда при помощи канонического 2π -периодического относительно w_1 преобразования (4.3) функцию Гамильтона (2.9) можно привести к такой нормальной форме [17]:

$$H = r_1 + \lambda r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O_5 \quad (4.5)$$

Здесь и ниже $x_2 = \sqrt{2r_2} \sin w_2$, $y_2 = \sqrt{2r_2} \cos w_2$, c_{ij} – постоянные коэффициенты. Если величина, определяемая равенством

$$D = c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{20} \quad (4.6)$$

отлична от нуля, то периодическое движение орбитально устойчиво [18, 19].

При резонансе третьего порядка $3\lambda = k$ имеем такую нормальную форму гамильтониана возмущенного движения [17]:

$$H = r_1 + \lambda r_2 + r_2 \sqrt{r_2} (\alpha_{30} \sin(3w_2 - kw_1) + \beta_{30} \cos(3w_2 - kw_1)) + O_4 \quad (4.7)$$

где α_{30} , β_{30} – постоянные коэффициенты. При выполнении неравенства

$$\alpha_{30}^2 + \beta_{30}^2 \neq 0 \quad (4.8)$$

периодическое движение орбитально неустойчиво [20].

При резонансе четвертого порядка $4\lambda = k$ нормальная форма гамильтониана возмущенного движения будет такой [17]:

$$H = r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + r_2^2 (\alpha_{40} \sin(4w_2 - kw_1) + \beta_{40} \cos(4w_2 - kw_1)) + O_5 \quad (4.9)$$

где α_{40} , β_{40} – постоянные коэффициенты. Если

$$|D| > \sqrt{\alpha_{40}^2 + \beta_{40}^2} \quad (4.10)$$

то периодическое движение орбитально устойчиво [20]. Если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то имеет место орбитальная неустойчивость.

Замечание. При построении нормализующих замен переменных и вычислении коэффициентов нормальной формы гамильтониана возмущенного движения необходимо решать некоторые системы дифференциальных уравнений [17, 21].

4.2. Резонансы. Величина λ определяется из уравнения (3.3) неоднозначно. Эта неоднозначность устраняется (при учете непрерывности характеристических показателей) рассмотрением предельного случая $\theta_b = \theta_c$, для которого линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют постоянные коэффициенты, а $\lambda = \sqrt{1 + \theta_b^{-2}}$ – частота малых колебаний в окрестности траектории невозмущенного движения.

В криволинейном треугольнике $P_1P_4P_5$ на фиг. 6 $\lambda = 2 + (2\pi)^{-1} \arccos a$, в треугольнике $P_7P_2P_3$ $\lambda = 1 + (2\pi)^{-1} \arccos a$, а в четырехугольнике $P_4P_7P_3P_6$ $\lambda = 2 - (2\pi)^{-1} \arccos a$.

На кривых P_4P_5 и P_4P_6 имеет место резонанс первого порядка $\lambda = 2$, а на границах ОПР, исходящей из точки P_7 , – резонанс второго порядка $2\lambda = 3$. Внутри областей устойчивости в первом приближении существуют две кривые резонансов третьего порядка ($3\lambda = 5$ и $3\lambda = 4$) и две кривые резонансов четвертого порядка ($4\lambda = 7$ и $4\lambda = 5$).

Они начинаются (см. фиг. 6) в точках $P_8(3/4, 3/4)$, $P_9(1, \sqrt{7}/3)$ и $P_{10}(4\sqrt{33}/33, 4\sqrt{33}/33)$, $P_{11}(1, 3/4)$ соответственно. При $\theta_c \rightarrow 0$ эти кривые стремятся к точке P_3 .

Вблизи прямой $\theta_b = \theta_c$, когда $\theta_b = \theta_c + \varepsilon^2$, резонансные кривые $4\lambda = 7$ и $3\lambda = 5$ задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \theta_b &= \frac{4}{33} \sqrt{33} + \left(\frac{5221}{10890} - \frac{11074}{179685} \sqrt{33} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) = \\ &= 0.6963 + 0.1254 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (\text{кривая } 4\lambda = 7) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\theta_b = \frac{3}{4} + \frac{4747}{186368}\epsilon^2 + \frac{4407170511151}{4741058789376}\epsilon^4 + O(\epsilon^6) = \quad (4.12)$$

$$= 0.75 + 0.0255\epsilon^2 + 0.9296\epsilon^4 + O(\epsilon^6) \text{ (кривая } 3\lambda = 5)$$

Если $\theta_b = 1 - \epsilon^2$, $0 < \epsilon \ll 1$ (т.е. твердое тело мало отличается от динамически симметричного тела, вытянутого вдоль оси симметрии Oz'), то уравнения резонансных кривых $3\lambda = 4$ и $4\lambda = 5$ будут такими:

$$\theta_c = \frac{1}{3}\sqrt{7} - \left(\frac{9197}{32340}\sqrt{7} + \frac{21671}{10780}\right)\epsilon^2 - \left(\frac{467489565881}{134220702000}\sqrt{7} + \frac{76509120239}{12782924000}\right)\epsilon^4 + O(\epsilon^6) = \quad (4.13)$$

$$= 0.8819 - 2.7627\epsilon^2 - 15.2004\epsilon^4 + O(\epsilon^6) \text{ (кривая } 3\lambda = 4)$$

$$\theta_c = \frac{3}{4} - \frac{20401}{4536}\epsilon^2 - \frac{11809141307}{216040608}\epsilon^4 + O(\epsilon^6) = \quad (4.14)$$

$$= 0.75 - 4.4976\epsilon^2 - 54.6617\epsilon^4 + O(\epsilon^6) \text{ (кривая } 4\lambda = 5)$$

4.3. Результаты. Опишем результаты аналитического и численного исследования орбитальной устойчивости прецессии Гриоли для значений параметров θ_b , θ_c , не принадлежащих ОПР. Графически эти результаты иллюстрируются фиг. 7.

Сначала рассмотрим два упомянутых выше случая тела, близкого к динамически симметричному. В этих случаях задача об орбитальной устойчивости прецессии Гриоли допускает аналитическое исследование. Оно проводилось с использованием системы MAPLE VII.

1. Случай $\theta_b = \theta_c + \epsilon^2$ ($0 < \epsilon \ll 1$). В пределе, когда $\epsilon = 0$, тело динамически симметрично и его геометрия масс ($A > B = C$) соответствует участку P_1P_2 границы области допустимых значений параметров θ_b , θ_c . Для точек (θ_b, θ_c) , не лежащих ни на одной из резонансных кривых, исходящих из точек P_4, P_{10}, P_8, P_7 отрезка P_1P_2 , гамильтониан возмущенного движения имеет нормальную форму вида (4.5). Для коэффициентов нормальной формы можно получить следующие выражения:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\theta_b^2 + 1}}{\theta_b} + O(\epsilon^2), \quad c_{20} = \frac{\theta_b^2 - \theta_b + 1}{2(\theta_b^2 + 1)} + O(\epsilon^2) \quad (4.15)$$

$$c_{11} = \frac{1 - 2\theta_b^2}{\theta_b(\theta_b^2 + 1)\sqrt{\theta_b^2 + 1}} + O(\epsilon^2), \quad c_{02} = \frac{2\theta_b^4 - 11\theta_b^2 + 2}{4\theta_b(\theta_b^2 + 1)^2} + O(\epsilon^2)$$

Величина (4.6) будет такой:

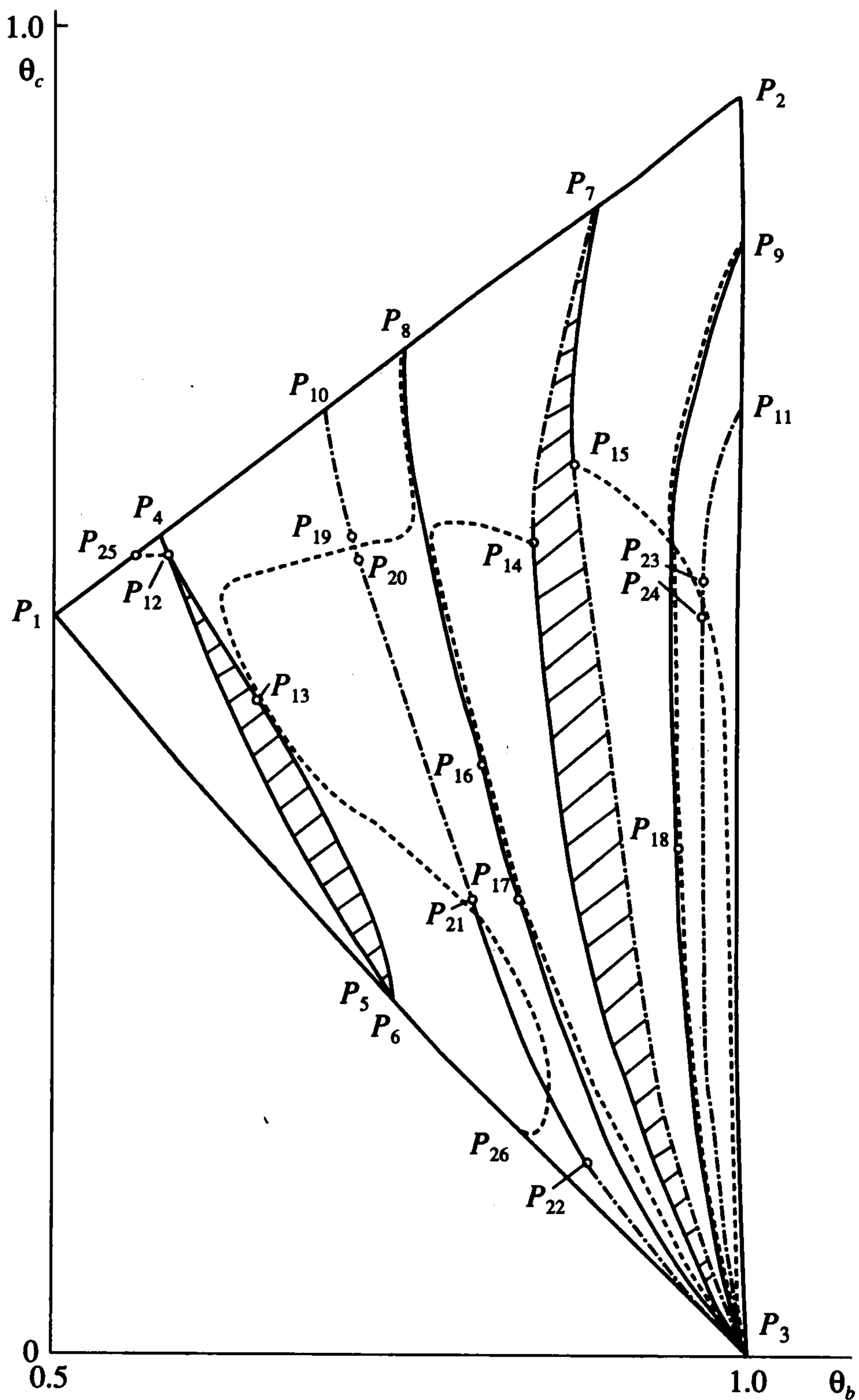
$$D = \frac{2\theta_b^6 + 14\theta_b^4 - 15\theta_b^3 + 10\theta_b^2 - 2}{4\theta_b^2(\theta_b^2 + 1)^2} + O(\epsilon^2) \quad (4.16)$$

При $\epsilon = 0$ величина D в интервале P_1P_2 обращается в нуль только в одной точке: $P_{25}(0.56776, 0.56776)$.

Интервал P_1P_2 разбивается точками $P_{25}, P_4, P_{10}, P_8, P_7$ на шесть интервалов. Пусть значения θ_c^* и θ_c^{**} ($\theta_c^* < \theta_c^{**}$) соответствуют граничным точкам какого-либо из них. Тогда для малых ϵ при выполнении неравенств

$$\theta_c^* + f^*(\epsilon) < \theta_c < \theta_c^{**} - f^{**}(\epsilon) \quad (4.17)$$

где f^* и f^{**} – некоторые непрерывные положительные функции от ϵ , обращающиеся в нуль при $\epsilon = 0$, не будет резонансов до четвертого порядка включительно, а величина



Фиг. 7

на D отлична от нуля. Согласно сказанному в разд. 4.1, отсюда следует, что если величина ε достаточно мала и выполняется неравенство (4.17), то прецессия Гриоли орбитально устойчива. Иными словами, при малых значениях ε к каждому из упомянутых шести интервалов отрезка P_1P_2 примыкает область орбитальной устойчивости.

Теперь рассмотрим резонансные случаи.

Резонанс первого порядка $\lambda = 2$. На кривых P_4P_5 и P_4P_6 , задаваемых при малых значениях ε уравнениями (3.4) и (3.5) соответственно, нормальная форма гамильтониана возмущенного движения записывается в виде (4.4). Можно показать, что на кривой P_4P_5 в нормальной форме (4.4) имеем $\delta = 1$, $k_{30} = 0$,

$$k_{40} = \left(\frac{179511837}{671088640} - \frac{1849015981}{5033164800} \sqrt{3} \right) \varepsilon^{12} + O(\varepsilon^{13}) = -0.3688\varepsilon^{12} + O(\varepsilon^{13})$$

а на кривой P_4P_6 имеем $\delta = -1$, а

$$k_{30} = \sqrt[4]{12} \left(\frac{3464297}{15728640} - \frac{35449069}{47185920} \sqrt{3} \right) \varepsilon^{10} + O(\varepsilon^{12}) = -2.0119\varepsilon^{10} + O(\varepsilon^{12})$$

Поэтому и на левой, и на правой границах ОПР, исходящей из точки P_4 , при достаточно малых ε прецессия Гриоли орбитально неустойчива.

Резонанс второго порядка $2\lambda = 3$. На границах (3.6) ОПР, исходящей из точки P_7 , нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения, как и при резонансе первого порядка, имеет вид (4.4), причем и на левой, и на правой границах

$$k_{30} = 0, \quad k_{40} = \frac{25}{3981312} (167065 - 74123\sqrt{5}) \varepsilon^6 + O(\varepsilon^7) = 0.0083\varepsilon^6 + O(\varepsilon^7)$$

но $\delta = 1$ на левой границе и $\delta = -1$ на правой границе.

Отсюда, согласно сказанному в разд. 4.1, следует, что при достаточно малых ε на левой границе ОПР, исходящей из точки P_7 , прецессия Гриоли орбитально устойчива, а на правой неустойчива.

Резонанс третьего порядка $3\lambda = 5$. Резонансная кривая задается уравнением (4.12). На этой кривой нормальная форма гамильтониана имеет вид (4.7), причем

$$\alpha_{30} = -\frac{1270053}{10976000} \sqrt{10} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^6) = -0.3659\varepsilon^5 + O(\varepsilon^6), \quad \beta_{30} = 0$$

При достаточно малых значениях ε неравенство (4.8) выполняется, и следовательно, имеет место орбитальная неустойчивость.

Резонанс четвертого порядка $4\lambda = 7$. На соответствующей этому резонансу кривой (4.11) в нормальной форме функции Гамильтона (4.9) имеем $\alpha_{40} = 0$, $\beta_{40} = O(\varepsilon^2)$, а для величины D из (4.6) можно получить выражение

$$D = \frac{2335}{1568} - \frac{495}{2401} \sqrt{33} + O(\varepsilon^2) = 0.3048 + O(\varepsilon^2)$$

Так как при достаточно малых ε неравенство (4.10) выполняется, то прецессия Гриоли орбитально устойчива.

2. Случай $\theta_b = 1 - \varepsilon^2$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). При $\varepsilon = 0$ тело динамически симметрично, а его геометрия масс ($A = B > C$) соответствует на фиг. 7 вертикальному участку P_2P_3 границы области допустимых значений параметров θ_b, θ_c . Если параметры θ_b, θ_c не принадлежат кривым (4.13) и (4.14), исходящим из точек P_9 и P_{11} отрезка P_2P_3 , то при достаточно малых ε отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно. Нормализованный гамильтониан имеет вид (4.5), а его коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\theta_c^2 + 1} + O(\varepsilon^2), \quad c_{20} = \frac{\theta_c^2 - \theta_c + 1}{2\theta_c(\theta_c^2 + 1)} + O(\varepsilon^2) \\ c_{11} &= \frac{\theta_c(\theta_c^2 - 2)}{(\theta_c^2 + 1)\sqrt{\theta_c^2 + 1}} + O(\varepsilon^2), \quad c_{02} = \frac{2\theta_c^4 - 11\theta_c^2 + 2}{4(\theta_c^2 + 1)^2} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Для величины D получаем выражение

$$D = -\frac{2\theta_c^6 - 10\theta_c^4 + 15\theta_c^3 - 14\theta_c^2 - 2}{4\theta_c(\theta_c^2 + 1)^2} + O(\varepsilon^2)$$

При $\varepsilon = 0$ величина D не обращается в нуль ни при каких значениях θ_c из интервала P_2P_3 .

Точки P_9 и P_{11} разбивают этот интервал на три интервала (P_2P_9) , (P_9P_{11}) и $(P_{11}P_3)$. Обозначим через θ'_c и θ''_c ($\theta'_c < \theta''_c$) граничные точки какого-либо из этих интервалов. Тогда для малых ε в области, задаваемой неравенствами

$$\theta'_c + f'(\varepsilon) < \theta_c < \theta''_c - f''(\varepsilon) \quad (4.19)$$

где f' и f'' – некоторые непрерывные положительные функции от ε , обращающиеся в нуль при $\varepsilon = 0$, нет резонансов до четвертого порядка включительно и $D \neq 0$. Согласно сказанному в разд. 4.1, в области (4.19) прецессия Гриоли орбитально устойчива. Это означает, что к каждому из трех интервалов (P_2P_9) , (P_9P_{11}) и $(P_{11}P_3)$ примыкает область орбитальной устойчивости.

Теперь рассмотрим резонансные случаи, когда параметры θ_b , θ_c принадлежат кривым (4.13) и (4.14).

Резонанс третьего порядка $3\lambda = 4$. На соответствующей резонансной кривой (4.13) нормальная форма функции Гамильтона имеет вид (4.7), причем $\beta_{30} = 0$, а

$$\alpha_{30} = \frac{1}{1024000} \sqrt{6}(3249715 - 1128212\sqrt{7})\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) = 0.6333\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

Так как при достаточно малых ε неравенство (4.8) выполняется, то имеет место орбитальная неустойчивость.

Резонанс четвертого порядка $4\lambda = 5$. На кривой (4.14) нормализованный гамильтониан возмущенного движения имеет вид (4.9), причем $\alpha_{40} = 0$, $\beta_{40} = O(\varepsilon^2)$, а

$$D = \frac{2603}{3000} + O(\varepsilon^2) = 0.8677 + O(\varepsilon^2)$$

При малых ε неравенство (4.10) выполняется, и прецессия Гриоли орбитально устойчива.

3. Произвольные значения параметров. При произвольных значениях параметров θ_b , θ_c из области их допустимых значений коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона, необходимые для исследования устойчивости, находились численно. В соответствии с предложенными ранее алгоритмами [17, 21] для этого надо было интегрировать некоторые системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заранее известными начальными условиями. Вычисления проводились для значений θ_c , не меньших 0.01. Опишем (см. также фиг. 7) полученные результаты.

На левой границе P_4P_5 ОНР, исходящей из точки P_4 , прецессия Гриоли орбитально неустойчива всюду, кроме точки $P_{12}(0.578, 0.57175)$, где вопрос об устойчивости остался открытым. На правой границе P_4P_6 также имеет место неустойчивость всюду, кроме точки $P_{13}(0.65635, 0.444957)$. В этой точке прецессия орбитально устойчива.

Левая граница ОНР, исходящей из точки P_7 , разбивается точкой $P_{14}(0.853, 0.604)$ на два участка. На участке P_7P_{14} имеет место орбитальная устойчивость, в точке P_{14} вопрос об устойчивости остался открытым, в остальных исследованных точках прецессия неустойчива. Правая граница точкой $P_{15}(0.87876, 0.678)$ также разбивается на два участка. К точке P_7 примыкает участок P_7P_{15} орбитальной неустойчивости, в точке P_{15} вопрос об устойчивости остался открытым, в остальных исследованных точках имеет место орбитальная устойчивость.

На фиг. 7 участки резонансных кривых, на которых прецессия Гриоли орбитально неустойчива, изображены сплошными линиями, а участки орбитальной устойчивости – штрихпунктиром.

На кривых резонансов третьего порядка всюду имеет место орбитальная неустойчивость, кроме точек $P_{16}(0.809339, 0.449)$ и $P_{17}(0.831305, 0.336)$ на кривой $3\lambda = 5$ и точки $P_{18}(0.954319, 0.389)$ на кривой $3\lambda = 4$, в которых имеет место орбитальная устойчивость.

На кривой резонанса четвертого порядка $4\lambda = 7$ обнаружены участки неустойчивости $P_{19}P_{20}$ и $P_{21}P_{22}$. В граничных точках этих участков $P_{19}(0.7221, 0.5905)$, $P_{20}(0.7224, 0.5895)$, $P_{21}(0.809, 0.332)$, $P_{22}(0.892, 0.138)$ вопрос об устойчивости остался открытым. В остальных исследованных точках прецессия орбитально устойчива.

На кривой $4\lambda = 5$ есть участок неустойчивости $P_{23}P_{24}$. В его граничных точках $P_{23}(0.97688, 0.5746)$ и $P_{24}(0.9767, 0.5717)$ вопрос об устойчивости остался открытым. В остальных исследованных точках этой кривой прецессия орбитально устойчива.

Для значений параметров θ_b, θ_c , лежащих вне ОПР и не принадлежащих рассмотренным выше кривым резонансов до четвертого порядка включительно, прецессия Гриоли орбитально устойчива всюду, кроме, быть может, кривой $D = 0$, на которой нарушается условие теоремы Арнольда – Мозера. Эта кривая состоит из пяти участков, показанных на фиг. 7 штриховыми линиями: участок, проходящий через точки P_{25} и P_{12} , участок, соединяющий точки P_8 и $P_{26}(0.83902, 0.16098)$, участки $P_{14}P_3$ и $P_{15}P_9$, петлеобразный участок, лежащий между кривой $3\lambda = 4$ и вертикалью $\theta_b = 1$.

Таким образом, вопрос об орбитальной устойчивости прецессии Гриоли решен для почти всех допустимых значений параметров из области $\theta_c \geq 0.01$; для оставшихся неисследованными шести точек $P_{k+18}(k = 1, 2, \dots, 6)$, лежащих на кривых резонансов четвертого порядка, и для кривой $D = 0$ при анализе устойчивости необходимо рассмотреть члены выше четвертой степени в разложении гамильтониана возмущенного движения в ряд.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1947. Ser.4. T. 26. Fasc. 3–4. P. 271–281.
2. Routh E.J. Dynamics of a system of rigid bodies. Pt 2. N.Y.: Dover, 1955 = Раус Э. Динамика системы твердых тел. Т.2. М.: Наука, 1983. 544 с.
3. Grammel R. Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Bd.1. Berlin: Springer, 1950 = Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
4. Гуляев М.П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1955. № 3. С. 15–21.
5. Гуляев М.П. О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну закрепленную точку // Тр. Сектора математики и механики АН КазССР. 1958. Т. 1. С. 202–208.
6. Гуляев М.П. О круговых сечениях взаимных эллипсоидов инерции // Тр. Сектора математики и механики АН КазССР. 1958. Т. 1. С. 175–193.
7. Гуляев М.П. О регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли) // Теоретическая механика. Сб. науч.-метод. статей. М.: Наука, 1975. Вып. 5. С. 130–137.
8. Горр Г.В. Методы исследования движений твердого тела и их приложения в классификации движений // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1982. Вып. 14. С. 54–74.
9. Галиуллин И.А. Регулярные прецессии твердого тела с одной закрепленной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 6–18.
10. Галиуллин И.А. История открытия и исследования регулярных прецессий твердого тела // Исследования по истории физики и механики. 1993–1994. М.: Наука, 1997. С. 191–218.

11. *Grioli G.* Questioni di stabilita riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico // *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3.* 1949. Т. 1. Р. 43–71.
12. Брюм А.З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // *Механика твердого тела.* Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 68–72.
13. Мозалевская Г.В., Харламов А.П., Харламова Е.И. Уход гироскопа Д. Гриоли // *Механика твердого тела.* Киев: Наук. думка, 1992. Вып. 24. С. 15–25.
14. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
15. Маркеев А.П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли) // *Докл. РАН.* 2002. Т. 387. № 3. С. 338–342.
16. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
17. Маркеев А.П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // *ПММ.* 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 929–938.
18. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
19. Moser J.K. *Lectures on Hamiltonian Systems.* Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968 = Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
20. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
21. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.
22. Giacaglia G.E.O. *Perturbation Methods in Non-Linear Systems.* N.Y.: Springer, 1972 = Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.