УДК 531.36

© 2003 г. В. В. Белецкий

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. Ю. ИШЛИНСКОГО

Рассматривается ограниченная задача четырех тел (материальных точек) с целью изучения возможности существования квазикруговых орбит двух малых тел в поле тяготения двух больших тел. Эта задача может представлять интерес в проблеме динамики астероидных систем.

1. Постановка задачи А.Ю. Ишлинского. А.Ю. Ишлинским однажды в беседе с автором была поставлена следующая задача (фиг. 1): "Два тела с одинаковой массой M каждое, взаимно тяготея, движутся по круговым орбитам. Неожиданно появляются два малых тела с одинаковыми массами m каждое, которые имеют начальные условия такие, что при отсутствии тел M они совершали бы тоже движение по круговой орбите. Взаимодействие – ньютоново. Какие возмущения будут вносить тела M в движение тел m?".

2. Формализация задачи. Положим $m \ll M$ и поставим ограниченную задачу небесной механики, предполагая, что тела m тяготеют друг к другу и к телам M, но не оказывают влияния на круговые движения тел M; тела M тяготеют друг к другу.

Пусть расстояние между телами M равно a. Отнесем все расстояния к a и введем безразмерное время $\tau = \omega t$, где $\omega = \sqrt{2Mf}a^{-3/2}$ – угловая скорость движения тел M. Во введенных таким образом безразмерных переменных уравнения движения в системе координат, вращающейся вместе с телами (см. фиг. 1), имеют вид (плоский случай)

$$x_i'' - 2y_i' = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad y_i'' + 2x_i' = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\rho}, \quad \alpha = \frac{m}{M} \tag{2.2}$$

Здесь r_{i1}, r_{i2} – расстояния от малых тел (i = 1, 2) до больших, ρ – расстояние между малыми телами. Система уравнений (2.1) имеет восьмой порядок – задача с четырьмя степенями свободы.

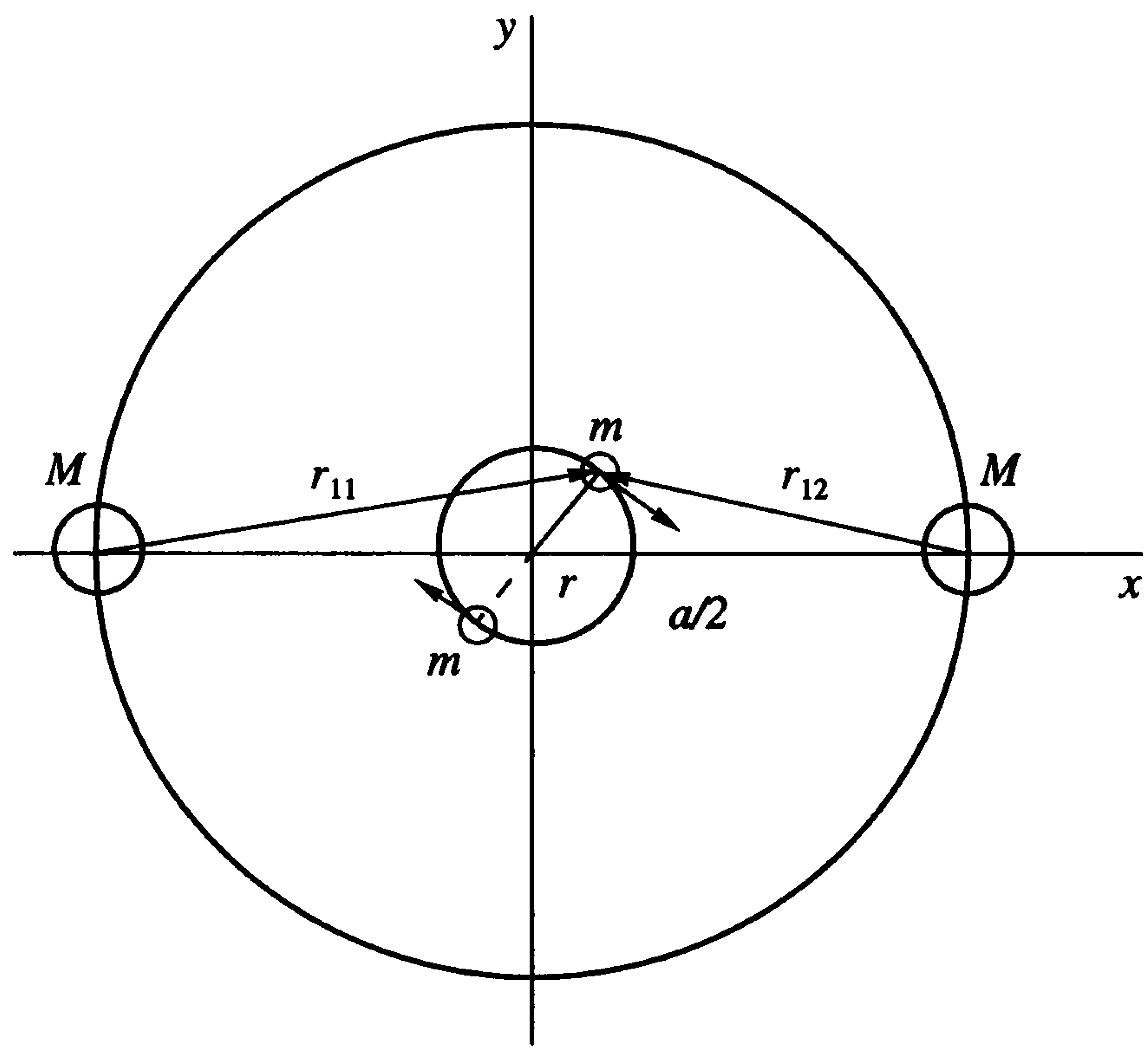
3. Симметричные траектории. Однако будем рассматривать не общую задачу (2.1), (2.2), а задачу, поставленную в разд. 1. Несколько обобщая эту постановку, займемся такими траекториями, которые удовлетворяют симметричным начальным условиям

$$\mathbf{r}_1^0 = -\mathbf{r}_2^0, \quad \dot{\mathbf{r}}_1^0 = -\dot{\mathbf{r}}_2^0 \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_1^0$, $\mathbf{r}_2^0$ – начальные положения малых тел относительно начала координат, $\dot{\mathbf{r}}_1^0$, $\dot{\mathbf{r}}_2^0$ – соответственно их скорости.

Непосредственно из уравнений движения (2.1), (2.2) следует, что существуют симметричные траектории, удовлетворяющие условиям (3.1) и уравнениям (2.1), (2.2),

$$\mathbf{r}_1(t) = -\mathbf{r}_2(t) \tag{3.2}$$



Фиг. 1

Будем в дальнейшем заниматься только такими траекториями.

Для симметричных траекторий (3.2) порядок системы (2.1) понижается в два раза (задача с двумя степенями свободы). Уравнения движения принимают вид

$$x'' - 2y' = \partial W/\partial x, \quad y'' + 2x' = \partial W/\partial y$$

$$W = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{\beta}{r}, \quad \beta = \frac{\alpha}{8} \tag{3.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x - 1/2)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + 1/2)^2 + y^2}$$

Здесь r – безразмерное расстояние от начала координат до одной из "малых" точек, r_1, r_2 – соответственно расстояния до "больших" точек.

Уравнения (3.3) обладают первым интегралом

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - W = -c$$

из которого следует, что реальное движение происходит в области

$$W \ge c$$

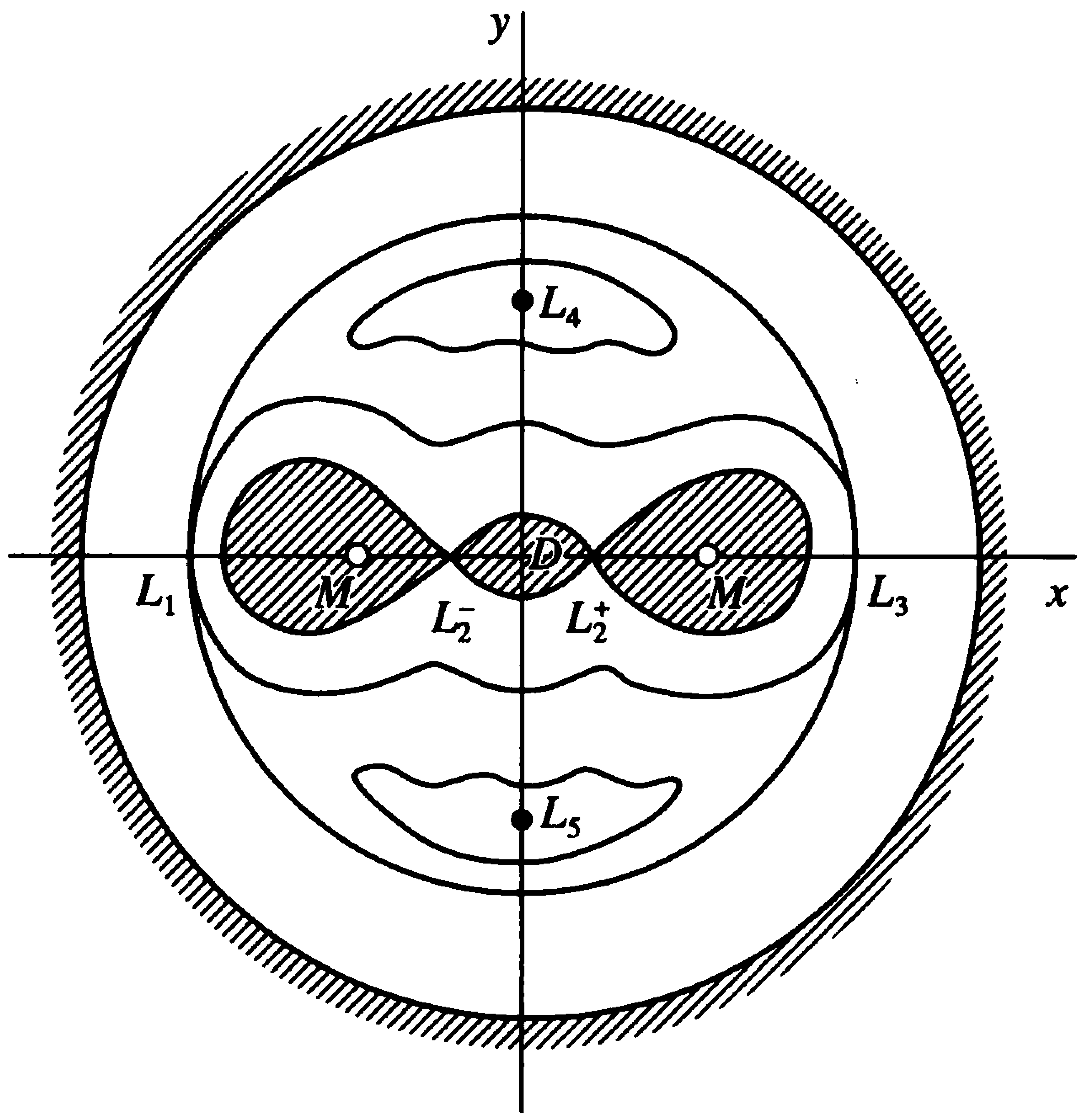
и ограничено поверхностями нулевой скорости $W = c$.

Прежде чем строить поверхности нулевой скорости, обратимся к точкам либрации задачи (3.3). Эти точки соответствуют решениям системы уравнений

$$\partial W/\partial x = 0, \quad \partial W/\partial y = 0$$

или, в явном виде:

1) точки L_1, L_3 с координатами $y_1 = y_3 = 0$, $x_1 = -x_3$, где x_3 ($x_3 > 1/2$) удовлетворяют уравнению



Фиг. 2

$$x_3 - (x_3^2 + 1/4)/(x_3^2 - 1/4)^2 - \beta/x_3^2 = 0$$

2) точки L_2^+, L_2^- с координатами $y_2^+ = y_2^- = 0$, $x_2^- = -x_2^+ = -x^*$, где x_* $(0 < x_* < 1/2)$ удовлетворяют уравнению

$$x_*^3(1 + (1/4 - x_*^2)^2) = \beta(1/4 - x_*^2)^2$$

3) точки L_4, L_5 с координатами $x_4 = x_5 = 0$, $y_5 = -y_4$, где y_4 $(y_4 > 0)$ удовлетворяют уравнению

$$y_4^2((1/4 + y_4^2)^{3/2} - 1) = \beta(1/4 + y_4^2)^{3/2}$$

откуда, между прочим, следует, что $y_4 > \sqrt{3}/2$.

При $\beta = 0$ уравнения (3.3) переходят в уравнения ограниченной задачи трех тел с одинаковыми массами двух тяготеющих тел. Соответственно точки L_2^+, L_2^- стягиваются при $\beta \to 0$ к точке $L_2(0, 0)$ и точки L_i^- $(i = 1, \ldots, 5)$ превращаются в точки либрации ограниченной задачи трех тел (например, $y_4 = \sqrt{3}/2$ и т.п.).

Поверхности нулевой скорости $W = c$ задачи (3.3) качественно изображены на фиг. 2. Заштрихована для примера область возможных движений $W \geq c_2$, где c_2 – такое значение постоянной c, что поверхность $W = c_2$ проходит через точки либрации L_2^+, L_2^-.

Если $c > c_2$, то движение никогда не выйдет из некоторой окрестности D начала координат, либо не выйдет из некоторой окрестности какой-то из точек M, либо, при очень больших начальных расстояниях от начала координат, всегда останется на большом расстоянии от него.

Если c несколько меньше c_2, то точка, начав движение в окрестности начала координат, может через горловину в окрестности $L_2^+ (L_2^-)$ перейти на движение в окрестности одной из точек M, затем обратно и т.д.

Существует такое значение $c = c_{13}$, что поверхность $W = c_{13}$ проходит через точки либрации $L_{1,3}$. При $c < c_{13}$ область возможных движений $W > c$ не ограничена: движение через "горловину" в окрестностях точек $L_{1,3}$ может уйти сколь угодно далеко от начала координат, если даже началось в его окрестности. Если $c = c_{13}$, части поверхности $W = c$ сливаются в точках L_1 и L_3.

Для рассматриваемой задачи существенное значение имеет поверхность $W = c_2$. Исходное движение останется в окрестности D начала координат, если оно началось там с такими начальными условиями, что $c \geq c_2$. При этом движение никогда не выйдет из области D: $W \geq c_2$ (фиг. 2). Эта область ограничена некоторым овалом, наибольшее значение координаты x на котором есть $x_* = L_2^+$. Приближенно, можно вычислить, что

$$x_* \approx (\beta/17)^{1/3} \approx 0.389\beta^{1/3} \tag{3.4}$$

При этом

$$c_2 = \frac{x_*^2}{2} + \frac{2}{1-4x_*^2} + \frac{\beta}{x_*} \tag{3.5}$$

или приближенно

$$c_2 \approx 2 + \frac{3}{2}(17\beta^2)^{1/3} \tag{3.6}$$

а максимальное значение координаты y_* на границе области определяется условиями

$$y_* \approx x\beta^{1/3}; \quad \frac{1}{x} - \frac{7}{2}x^2 = \frac{3}{2}17^{1/3}$$

так что

$$y_* = 0.245\beta^{1/3} \tag{3.7}$$

Итак, на вопрос, поставленный в разд. 1, имеется следующий частичный ответ.

Если симметричные начальные условия таковы, что значение постоянной интеграла Якоби $c \geq c_2$, где c_2 определяется соотношениями (3.5), (3.6), то движение вечно будет оставаться в окрестности D начала координат, D: $W \geq c \geq c_2$. Максимальные размеры области D определяются размерными значениями координат x, y

$$x_{\max} \approx 0.1945a\alpha^{1/3}, \quad y_{\max} \approx 0.1225a\alpha^{1/3}; \quad \alpha = m/M \tag{3.8}$$

Приближенно можно считать, что область D – эллипс с полуосями $x_{\max}$, $y_{\max}$. Такова ситуация для любых симметричных (не обязательно круговых) начальных данных.

4. Случай круговых начальных данных. Теперь полезно рассмотреть ситуацию для круговых начальных условий, что отвечает исходной постановке задачи (разд. 1). В этом случае

$$v_0^2 = \left(\sqrt{\frac{\beta}{r_0}} \mp r_0\right)^2 \tag{4.1}$$

и соответственно

$$c_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{20}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\beta}{r_0} \pm \sqrt{\beta r_0} \tag{4.2}$$

Верхний знак отвечает "прямому" движению, нижний – "обратному" (относительно направления движения точек M). Необходимые условия ограниченности движения (движение в области D):

$$c_{\pm} \geq c_2 \tag{4.3}$$

При прочих равных условиях "обратное" движение "менее устойчиво", чем прямое, так как для обратного движения легче нарушается условие (4.3), ибо $c_- < c_+$.

С точностью до старших членов разложения

$$c_{\pm} \approx 2 + 8x_0^2 - 4y_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{r_0} \pm \sqrt{\beta r_0} \tag{4.4}$$

Учитывая соотношения (3.6), (4.3) и (4.4), обнаружим, что область выполнения условия (4.3) ограничена поверхностью (поверхностями)

$$8x_0^2 - 4y_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{r_0} \pm \sqrt{\beta r_0} = \frac{3}{2}(17\beta^2)^{1/3} \tag{4.5}$$

Вводя

$$x_0 = \bar{x}_0\beta^{1/3}, \quad y_0 = \bar{y}_0\beta^{1/3}$$

получим из равенства (4.5) уравнения в нормированных переменных $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$

$$8\bar{x}_0^2 - 4\bar{x}_0^2 + \frac{1}{2\bar{r}_0} \pm \sqrt{\bar{r}_0} = \frac{3}{2}17^{1/3} \tag{4.6}$$

Оценочное исследование поверхностей (4.5) показывает, что они представляют собой овалы со следующими значениями больших полуосей:

для прямого движения

$$x_{0\max} \approx 0.38x_*, \quad y_{0\max} \approx 0.36x_* \tag{4.7}$$

для обратного движения

$$x_{0\max} \approx 0.31x_*, \quad y_{0\max} \approx 0.29x_* \tag{4.8}$$

Значение x_* определяется формулой (3.4).

Таким образом, если начальные данные круговые и движение прямое, то оно никогда не выйдет из области D (овала с полуосями (3.8) при условии, что начальные координаты лежат внутри поверхности (4.5) – со знаком "плюс" перед радикалом в левой части. Эта поверхность представляет собой овал с полуосями

$$x_{\max}^{+} = 0.074a\alpha^{1/3}, \quad y_{\max}^{+} = 0.070a\alpha^{1/3} \tag{4.9}$$

Аналогичное заключение имеет место и для обратных круговых движений, только полуоси соответствующего овала имеют значения

Эта поверхность представляет собой овал с полуосями.

$$x_{\max}^{-} = 0.060a\alpha^{1/3}, \quad y_{\max}^{-} = 0.056a\alpha^{1/3} \tag{4.10}$$

5. Слабовозмущаемое движение. Пусть $a/2 = R$ – расстояние от начала координат до одной из точек M (см. фиг. 1). Область D – овал с полуосями

$$x_{\max} = 0.389R\alpha^{1/3}, \quad y_{\max} = 0.245R\alpha^{1/3} \tag{5.1}$$

Введем две сферы с радиусами

$$r_+ = 0.140R\alpha^{1/3}, \quad r_- = 0.112R\alpha^{1/3} \tag{5.2}$$

Из вышеизложенного ясно, что если начальное движение круговое, прямое и начальное значение $r = r_0 \le r_+$, то движение вечно будет происходить внутри области D. Такое движение назовем слабовозмущаемым. Если же $r_0 > r_+$ (еще точнее, если $r_0 > 0.148R\alpha^{1/3}$), то "всякое может случиться": движение может покинуть область D, перейти в окрестность точек M, вернуться назад и т.д.

Если движение не является слабовозмущаемым, то будем называть его сильновозмущаемым.

Совершенно аналогично, обратное круговое движение является слабовозмущаемым при $r_0 \le r_-$ и сильновозмущаемым при $r_0 > 0.120R\alpha^{1/3}$ (неявно предполагается, что величина r_0 не очень велика: совершенно очевидно, что при $r_0 \gg R$ круговое движение возмущается слабо, как и во "внешнем варианте" ограниченной задачи трех тел).

Слабовозмущаемое движение удобно исследовать, используя вместо функции W некий ее эквивалент, содержащий лишь старшие члены разложений величин r_1^{-1}, r_2^{-1}. С точностью до аддитивной постоянной тогда

$$W = \frac{17}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 + \frac{\beta}{r} \tag{5.3}$$

Уравнения движения принимают вид

$$x'' - 2y' = 17x - \frac{\beta x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad y'' + 2x' = -7y - \frac{\beta y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{5.4}$$

Нормируя декартовы координаты

$$x = \bar{x}\beta^{1/3}, \quad y = \bar{y}\beta^{1/3}$$

приведем уравнения (5.4) к виду

$$x'' - 2y' + \left(\frac{1}{r^3} - 17\right)x = 0, \quad y'' + 2x' + \left(\frac{1}{r^3} + 7\right)y = 0; \quad r^3 = (x^2+y^2)^{3/2} \tag{5.5}$$

Здесь для краткости опущена черта в обозначениях нормированных координат. Заметим, что для слабовозмущенного движения заведомо $1/r^3 > 17$.

Переходя в уравнениях (5.5) к полярным координатам

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

получим

$$\begin{gathered} r'' - r(\phi'+1)^2 + \frac{1}{r^2} = r(16\cos^2\phi - 8\sin^2\phi) \\ \frac{d}{dt}r^2(\phi'+1) = -24r^2\cos\phi\sin\phi \end{gathered} \tag{5.6}$$

Конечно, уравнения (5.6) имеют первый интеграл

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\phi'^2) - \frac{1}{r} - \frac{17}{2}r^2\cos^2\phi + \frac{7}{2}r^2\sin^2\phi = -c \tag{5.7}$$

Величина $\phi' + 1$ – угловая скорость в абсолютном движении. Так как рассматривается слабовозмущенное движение, то ϕ – быстрая фаза ($|\phi'| \gg 1$), и в известном приближении систему (5.6) можно заменить усредненной по быстрой фазе системой

$$r'' - r(\phi'+1)^2 + \frac{1}{r^2} = 4r, \quad r^2(\phi'+1) = r_0^2\omega_0 \tag{5.8}$$

Здесь r_0 – радиус невозмущенной орбиты, ω_0 – абсолютная угловая скорость на невозмущенной орбите (может иметь знак "плюс" или "минус").

Из системы (5.8) следует (с учетом того, что $\omega_0^2 = 1/r_0^3$)

$$r'' + \frac{1}{r^2} - \frac{r_0}{r^3} - 4r = 0 \tag{5.9}$$

Малое отклонение δr от исходной круговой орбиты удовлетворяет в силу соотношения (5.9) уравнению

$$(\delta r)'' + \Omega^2 \delta r = 4r_0, \quad \Omega^2 = \omega_0^2 - 4 = \frac{1}{r_0^3} - 4 \tag{5.10}$$

Возмущения в движении, вызванные только влиянием внешних масс M, вычисляются интегрированием уравнения (5.10) при начальных условиях $\delta r_0^o = 0$, $\delta r_0' = 0$. Оказывается тогда, что

$$\delta r = \frac{8r_0}{\Omega^2} 62 \sin\frac{\Omega}{2} r \tag{5.11}$$

Конечно, эта формулировка справедлива только на ограниченном интервале времени.

Формула (5.11) описывает очень малые возмущения: $\delta r/r_0 \approx 10^{-3}$. Между тем из точных оценок следует, что не запрещено соотношение $\delta r/r_0 \approx 1$.

Замечания. 1°. Все сказанное выше описывает лишь ситуацию внутри множества симметричных траекторий и не затрагивает более общие вопросы, например вопрос об устойчивости или неустойчивости в каком-либо смысле множества симметричных траекторий относительно произвольных несимметричных возмущений начальных данных.

2°. Настоящая работа была первоначально опубликована в труднодоступном сборнике [1]. В связи с астрономическими открытиями в последние годы систем двойных астероидов [2] (не исключены системы и большего числа астероидов) предлагаемая работа приобрела новый интерес.

Автор благодарит за помощь в оформлении этой статьи А.А. Савченко и Н.Н. Щербакову.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований Бюро научно-технического сотрудничества (01-01-02001) и Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00508).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В.* Об одной ограниченной задаче четырех тел. // Почти периодические орбиты в небесной механике. / Под ред. Е.П. Аксенова. М., Изд-во МГУ, 1990. С. 83–92.
2. *Финкельштейн А.М.* Российская Академия наук между Марсом и Юпитером. СПб.: Наука, 2001. 303 с.

Москва
e-mail:beletsky@keldysh.ru

Поступила в редакцию
31.III.2003