

УДК 539.3

© 2003 г. И. В. Панферов

**РАВНОМЕРНЫЙ НАГРЕВ И ИЗГИБ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Решается задача о равномерном нагреве двухслойной пластины. Исследуемый трансверсально-изотропный слой (мягкая пластина) находится в идеальном контакте с жестким изотропным тонким упруго деформированным слоем. Концы пластины свободны от нагрузок. Вводится пограничный слой мягкой пластины (тонкий контактный слой), что позволяет сформулировать граничные условия на концах пластины таким образом, что задача имеет ограниченное гладкое решение [1]. Двухслойная пластина, вообще говоря, ограничена вдоль оси, перпендикулярной к осям, направленным по длине и толщине пластины. Равнодействующая сила и равнодействующий момент, приложенные на концевых поперечных сечениях, равны нулю. Разыскивается точное решение температурной задачи на основе уравнений теории упругости. Аналогичным методом решается плоская задача об изгибе двухслойной пластины под действием равномерно распределенного давления, приложенного на боковой поверхности анизотропного слоя. Концы жесткого изотропного слоя заделаны.

Рассматриваемая температурная задача, вообще говоря, не является плоской или обобщенно-плоской в отличие от изученной ранее [1] несимметричной температурной смешанной задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя, для которой был предложен метод построения точного решения в ординарных рядах Фурье по одной координате.

**1. Нагрев двухслойной пластины. Метод решения.** Решается задача о равномерном нагреве двухслойной пластины, представляющей собой трансверсально-изотропный мягкий слой (МС), который находится в идеальном контакте с жестким изотропным тонким упруго деформируемым слоем (ЖС). На основе уравнений теории упругости определяется напряженно-деформированное состояние МС длины  $2L$  и толщины  $H$ , занимающего область

$$|x'| \leq L, \quad 0 \leq y' \leq H$$

и напряженно-деформированное состояние ЖС толщины  $H_N$ , занимающего область

$$|x'| \leq L, \quad H \leq y' \leq H + H_N$$

Двухслойная пластина, вообще говоря, ограничена вдоль оси  $z$ , перпендикулярной к осям, направленным по длине и толщине пластины. Длина  $Z_0$  пластины по оси  $z$  такова, что  $L \ll Z_0$ .

В дальнейшем будем использовать безразмерные декартовы координаты  $x$ ,  $y$ , отнесенные к  $L$ . Тогда  $y = 0$  – свободная боковая поверхность исследуемого МС,  $x = \pm 1$  – концы пластины,  $y = h$  – поверхность контакта с ЖС ( $h = H/L$ ),  $y = h + h_N$  – свободная боковая поверхность ЖС ( $h_N = H_N/L$ ).

Напряжения, деформации, перемещения ЖС в дальнейшем будем обозначать верхним индексом ( $N$ ).

Для деформации пластины вдоль оси  $z$  имеем

$$\varepsilon_z = (C_1 + C_2 y)/E_x, \quad 0 \leq y \leq h + h_N \quad (1.1)$$

где  $E_x$  – модуль упругости МС по оси  $x$ , а  $C_1, C_2$  – неизвестные постоянные.

Предполагается, что  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}/2$  – ненулевые компоненты деформаций в двухслойной пластине, зависящие от  $x, y$ . В этом случае на контактной поверхности слоев  $y = h$  автоматически удовлетворятся условия в перемещениях

$$\partial_z u_\alpha = \partial_z u_\alpha^{(N)}, \quad \alpha = z, x, y, \quad \partial_x u_z = \partial_x u_z^{(N)}$$

Остальные условия сопряжения слоев (кинематические и силовые) будут удовлетворены в процессе решения задачи.

Запишем связь между напряжениями и деформациями исследуемого МС при учете соотношения (1.1)

$$\begin{aligned} E_0 \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu_y \sigma_y + E_0 \alpha_x T (1 + \nu) - (C_1 + C_2 y) \nu (1 - \nu^2)^{-1} \\ E_0 \varepsilon_y &= \omega \sigma_y - \nu_0 \sigma_x + E_0 (\alpha_y + k \nu' \alpha_x) T - (C_1 + C_2 y) k \nu' (1 - \nu^2)^{-1} \\ E_0 \varepsilon_{xy} &= \gamma_0 \sigma_{xy}, \quad \sigma_z = \nu \sigma_x + k \nu' \sigma_y - E_x \alpha_x T + C_1 + C_2 y \\ \omega &= \frac{k - (k \nu')^2}{1 - \nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{k \nu'}{1 - \nu}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{1 - \nu^2}, \quad \gamma = \frac{E_x}{G}, \quad E_0 = \frac{E_x}{1 - \nu^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь принято, что ось изотропии материала направлена по оси  $y$ ,  $E_x, E_y$  – модули упругости по осям  $x$  и  $y$ ,  $G$  – модуль сдвига в плоскости  $(x, y)$ . Коэффициент  $\nu$  характеризует поперечное сжатие в плоскости изотропии  $(x, z)$  при растяжении в этой плоскости,  $\nu'$  – то же, при растяжении в направлении оси  $y$  [2]. Величины  $\alpha_x, \alpha_y$  – коэффициенты теплового расширения по осям  $x$  и  $y$ , а  $T$  – приращение температуры ( $T = \text{const}$ ).

Связь между напряжениями и деформациями ЖС при учете соотношения (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} E_0^{(N)} \varepsilon_x^{(N)} &= \sigma_x^{(N)} - \beta_0 \sigma_y^{(N)} + E_0^{(N)} \alpha T (1 + \beta) - a (C_1 + C_2 y) \beta (1 - \beta^2)^{-1} \\ E_0^{(N)} \varepsilon_y^{(N)} &= \sigma_y^{(N)} - \beta_0 \sigma_x^{(N)} + E_0^{(N)} \alpha T (1 + \beta) - a (C_1 + C_2 y) \beta (1 - \beta^2)^{-1} \\ E_0^{(N)} (1 - \beta) \varepsilon_{xy}^{(N)} &= 2 \sigma_{xy}^{(N)}, \quad \sigma_z^{(N)} = \beta (\sigma_x^{(N)} + \sigma_y^{(N)}) - E^{(N)} \alpha T + a (C_1 + C_2 y) \\ E_0^{(N)} &= E^{(N)} (1 - \beta^2)^{-1}, \quad \beta_0 = \beta (1 - \beta)^{-1}, \quad a = E^{(N)} / E_x \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $E^{(N)}$  – модуль Юнга,  $\beta$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения.

Уравнения анизотропной упругости при учете соотношений (1.1), (1.2) запишем в форме

$$\begin{aligned} \omega \partial_{xxxx}^4 F + \mu \partial_{xxyy}^4 F + \partial_{yyyy}^4 F &= 0 \\ \sigma_x &= \partial_{yy}^2 F, \quad \sigma_y = \partial_{xx}^2 F, \quad \sigma_{xy} = -\partial_{xy}^2 F; \quad \mu = \gamma_0 - 2\nu_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соответственно, уравнения изотропной теории упругости для ЖС сводятся к бигармоническому уравнению для потенциала  $F$  (соотношение (1.4) при  $\omega = 1, \mu = 2$ ).

Запишем граничные условия на боковой поверхности  $y = 0$  МС

$$y = 0: \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \quad (1.5)$$

Условия на контактной поверхности  $y = h$  имеют вид

$$y = h: \sigma_y = \sigma_y^{(N)}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{(N)} \quad (1.6)$$

$$y = h: \varepsilon_x = \varepsilon_x^{(N)}, \quad \partial_x W = \partial_x W^{(N)} \quad (1.7)$$

где  $W$  – безразмерное перемещение (отнесенное к  $L$ ) по оси  $y$ .

Запишем граничные условия на боковой поверхности  $y = h + h_N$  ЖС

$$y = h + h_N: \sigma_y^{(N)} = \sigma_{xy}^{(N)} = 0 \quad (1.8)$$

На концах двухслойной пластины отсутствуют нагрузки:

$$x = \pm 1, \quad 0 \leq y \leq h: \sigma_x = \sigma_{xy} = 0 \quad (1.9)$$

$$x = \pm 1, \quad h \leq y \leq h + h_N: \sigma_x^{(N)} = \sigma_{xy}^{(N)} = 0 \quad (1.10)$$

Поскольку пластина, вообще говоря, ограничена по оси  $z$ , в силу симметрии задачи имеем ( $s = h + h_N$ )

$$\int_0^1 \int_0^h \sigma_z dy dx + \int_0^1 \int_0^s \sigma_z^{(N)} dy dx = 0 \quad (1.11)$$

$$\int_0^1 \int_0^h \sigma_z (y - h) dy dx + \int_0^1 \int_0^s \sigma_z^{(N)} (y - h) dy dx = 0 \quad (1.12)$$

Соотношение (1.11) – условие равенства нулю равнодействующей силы в сечении  $z = \text{const}$ , а (1.12) – условие равенства нулю равнодействующего изгибающего момента в этом сечении.

Решение задачи (1.1)–(1.12), предположительно, имеет особенность в точках ( $x = \pm 1$ ,  $y = h$ ) исследуемой составной пластины. Найдем ограниченное гладкое напряженно-деформированное состояние составной пластины, которое совпадает с решением системы (1.1)–(1.12) всюду, за исключением некоторой малой окрестности указанных точек.

Задача формулируется следующим образом

Условно разделим МС на полосы  $S_n$ :

$$\{y_{n-1} \leq y \leq y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = 0, \quad y_{N-1} = h$$

где  $N-1$  – общее количество полос. Полоса  $S_N: \{h \leq y \leq h + h_N\}$  – ЖС толщины  $h_N$ .

Пластина  $S_{N-1}$  – тонкий контактный слой априори заданной малой толщины  $\delta_{N-1} \ll h$ . В этом слое требуется найти точное решение уравнения (1.4), соответствующее внутренней смешанной температурной задаче, т.е. это решение должно удовлетворять только граничным условиям на боковых поверхностях  $y = h - \delta_{N-1}$  и  $y = h$ . Этот слой будем называть пограничным [1].

В других условных слоях МС требуется удовлетворить необходимым граничным условиям на поверхностях  $y = y_{n-1}$ ,  $y = y_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N-2$ ) и интегральным граничным условиям на концах  $x = \pm 1$ , которые соответствуют свободной границе. Вообще говоря, эти условные слои могут иметь различную толщину  $\delta_n = y_n - y_{n-1}$ . ЖС и по-

граничный слой образуют условную двухслойную пластину, на концах которой ставятся интегральные условия типа свободной границы.

Точное решение сформулированной задачи для МС имеет вид ( $0 \leq y \leq h$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ )

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \sum_{i=2}^3 (M_{2i}^{(n)} P_{1,2i}^{(n)} + N_{2i}^{(n)} P_{2,2i}^{(n)}) + D_5^{(n)} P_{1,5}^{(n)} + D_3^{(n)} \xi_n + M_2^{(n)} + \\ &+ \sum \cos(\pi m x) \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m}^{(n)} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m} \xi_n) + R_{2i,m}^{(n)} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m} \xi_n)] \kappa_i^2 \\ P_{1,6}^{(n)}(x, y) &= 6x^2 \xi_n^2 - \mu \xi_n^4, \quad P_{2,6}^{(n)} = x^4 - 1 - \omega \xi_n^4 \\ P_{1,5}^{(n)} &= 3x^2 \xi_n - \mu \xi_n^3, \quad P_{1,4}^{(n)} = x^2 - 1 - \mu \xi_n^2, \quad P_{2,4}^{(n)} = -\omega \xi_n^2 \\ \sigma_y^{(n)} &= M_6^{(n)} Q_{1,6}^{(n)} + N_6^{(n)} Q_{2,6}^{(n)} + M_4^{(n)} \xi_n^2 + N_4^{(n)} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + D_5^{(n)} \xi_n^3 - D_1^{(n)} \xi_n - \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$- \sum \cos(\pi m x) \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m}^{(n)} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m} \xi_n) + R_{2i,m}^{(n)} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m} \xi_n)]$$

$$Q_{1,6}^{(n)}(x, y) = \xi_n^4 - \left(x^4 - \frac{1}{5}\right) \frac{1}{\omega}, \quad Q_{2,6}^{(n)} = 6x^2 \xi_n^2 - \frac{\mu}{\omega} \left(x^4 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\sigma_{xy}^{(n)} = -4M_6^{(n)} x \xi_n^3 - 4N_6^{(n)} x^3 \xi_n - 2M_4^{(n)} x \xi_n - 3D_5^{(n)} x \xi_n^2 + D_1^{(n)} x +$$

$$+ \sum \sin(\pi m x) \sum_{i=1}^2 [R_{2i-1,m}^{(n)} \operatorname{ch}(\alpha_{i,m} \xi_n) + R_{2i,m}^{(n)} \operatorname{sh}(\alpha_{i,m} \xi_n)] \kappa_i$$

где

$$\sigma_\alpha^{(n)} = \sigma_\alpha^{(n)}(x, y), \quad \alpha = x, y, xy$$

$$\alpha_{i,m} = \pi m \kappa_i, \quad \xi_n = y - y_{n-1}, \quad y_0 = 0, \quad y_{N-1} = h, \quad 0 \leq \xi_n \leq \delta_n$$

$$2\kappa_{1,2}^2 = \mu \pm (\mu^2 - 4\omega)^{1/2}, \quad \kappa_i > 0, \quad i = 1, 2$$

Для материала с ярко выраженной анизотропией можно принять, что  $\mu > 2\sqrt{\omega}$  [2].

Здесь и всюду далее, если пределы суммирования не указаны, суммирование ведется от  $m = 1$  до  $m = \infty$ .

Точное решение температурной задачи для ЖС имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(N)} &= \sum_{i=2}^3 (M_{2i}^{(N)} P_{1,2i}^{(N)} + N_{2i}^{(N)} P_{2,2i}^{(N)}) + D_5^{(N)} P_{1,5}^{(N)} + D_3^{(N)} \xi_n + M_2^{(N)} + \\ &+ \sum \cos(\pi m x) \sum_{i=1}^4 R_{i,m}^{(N)} f_{i,m}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1,m} &= \operatorname{sh}(\pi m \xi_N), \quad f_{2,m} = \operatorname{ch}(\pi m \xi_N), \quad f_{3,m} = [2(\alpha_m)^{-1} f_{1,m} + \xi_N f_{2,m}]/h_N \\
f_{4,m} &= [2(\alpha_m)^{-1} f_{2,m} + \xi_N f_{1,m}]/h_N \\
P_{1,6}^{(N)}(x, y) &= 6x^2 \xi_N^2 - 2\xi_N^4, \quad P_{2,6}^{(N)} = x^4 - 1 - \xi_N^4 \\
P_{1,5}^{(N)} &= 3x^2 \xi_N - 2\xi_N^3, \quad P_{1,4}^{(N)} = x^2 - 1 - 2\xi_N^4, \quad P_{2,4}^{(N)} = -\xi_N^2 \\
\sigma_y^{(N)} &= M_6^{(N)} Q_{1,6}^{(N)} + N_6^{(N)} Q_{2,6}^{(N)} + M_4^{(N)} \xi_N^2 + N_4^{(N)} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + D_5^{(N)} \xi_N^3 - D_1^{(N)} \xi_N + N_2^{(N)} - \\
&\quad - \sum \cos(\pi m x) \sum_{i=1}^4 R_{i,m}^{(N)} \phi_{i,m}(y)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\phi_{1,m} = f_{1,m}, \quad \phi_{2,m} = f_{2,m}, \quad \phi_{3,m} = \xi_N f_{2,m}/h_N, \quad \phi_{4,m} = \xi_N f_{1,m}/h_N$$

$$Q_{1,6}^{(N)}(x, y) = \xi_N^4 - \left(x^4 - \frac{1}{5}\right), \quad Q_{2,6}^{(N)} = 6x^2 \xi_N^2 - 2\left(x^4 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\sigma_{xy}^{(N)} = -4M_6^{(N)} x \xi_N^3 - 4N_6^{(N)} x^3 \xi_N - 2M_4^{(N)} x \xi_N - 3D_5^{(N)} x \xi_N^2 + D_1^{(N)} x +$$

$$+ \sum \sin(\pi m x) \sum_{i=1}^4 R_{i,m}^{(N)} \phi_{i,m}(y)$$

$$\phi_{1,m} = f_{2,m}, \quad \phi_{2,m} = f_{1,m}, \quad \phi_{3,m} = [(\alpha_m)^{-1} f_{2,m} + \xi_N f_{1,m}]/h_N$$

$$\phi_{4,m} = [(\alpha_m)^{-1} f_{1,m} + \xi_N f_{2,m}]/h_N$$

где

$$\alpha_m = \pi m, \quad \xi_N = y - h, \quad 0 \leq \xi_N \leq h_N$$

$$\sigma_\alpha^{(N)} = \sigma_\alpha^{(N)}(x, y), \quad \alpha = x, y, xy$$

В формулах (1.1), (1.3), (1.14)  $R_{j,m}^{(n)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),  $M_{2j}^{(n)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $N_{2j}^{(n)}$  ( $j = 2, 3$ ),  $D_i^{(n)}$  ( $i = 1, 3, 5$ ) и  $N_2^{(N)}$ ,  $C_1, C_2$  – постоянные, подлежащие определению в процессе решения.

Условия сопряжения условных слоев в МС запишем в форме [1]

$$y = y_{n-1}: \sigma_x^{(n)} = \sigma_x^{(n-1)}, \quad \sigma_y^{(n)} = \sigma_y^{(n-1)} \tag{1.15}$$

$$y = y_{n-1}: \sigma_{xy}^{(n)} = \sigma_{xy}^{(n-1)}, \quad \int_0^x \partial_y \sigma_x^{(n)} dx = \int_0^x \partial_y \sigma_x^{(n-1)} dx \tag{1.16}$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1.$$

Первое уравнение (1.15) следует из непрерывности по  $y$  деформации  $\epsilon_x$ . Второе равенство (1.16) означает, что величина  $\partial_x W$  непрерывна по координате  $y$ .

Условия сопряжения МС и ЖС запишем в форме

$$y = h: E_0 \varepsilon_x^{(N-1)} = \frac{1}{a_0} E_0^{(N)} \varepsilon_x^{(N)}, \quad \sigma_y^{(N-1)} = \sigma_y^{(N)}$$

$$y = h: \sigma_{xy}^{(N-1)} = \sigma_{xy}^{(N)}, \quad \int_0^x \partial_y \sigma_x^{(N-1)} dx - [\mu + \nu_0 - (a_0)^{-1} (2 + \beta_0)] \sigma_{xy}^{(N-1)} = \quad (1.17)$$

$$= (a_0)^{-1} \int_0^x \partial_y \sigma_x^{(N)} dx + (\nu - \beta)(1 - \nu^2)^{-1} C_2 x$$

$$a_0(1 - \beta^2) = a(1 - \nu^2) \quad (1.18)$$

Второе равенство (1.18) означает, что величина  $\partial_x W$  непрерывна по координате  $y$  на поверхности  $y = h$ .

Перепишем условие (1.5) на свободной поверхности  $y = 0$  МС

$$y = 0: \sigma_y^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \quad (1.19)$$

и на свободной поверхности  $y = h + h_N$  ЖС

$$y = h + h_N: \sigma_y^{(N)} = \sigma_{xy}^{(N)} = 0 \quad (1.20)$$

Запишем интегральные граничные условия на концах  $x = \pm 1$  МС при учете симметрии напряжений по  $x$

$$\int \sigma_x^{(n)}(1, y) dy = \int \sigma_x^{(n)}(1, y) \xi_n dy = \int \sigma_{xy}^{(n)}(1, y) dy = 0 \quad (1.21)$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 2$$

Верхний и нижний предел интегрирования соответственно равны  $y_n$  и  $y_{n-1}$ .

Из выражений (1.13) следует, что третье условие (1.21) автоматически удовлетворяется.

Интегральные условия на концах  $x = \pm 1$  ЖС и пограничного слоя имеют вид

$$\int_0^{h_N} \sigma_x^{(N)}(1, \xi_N) d\xi_N + \int_0^{\delta_{N-1}} \sigma_x^{(N-1)}(1, \xi_{N-1}) d\xi_{N-1} = 0$$

$$\int_0^{h_N} \sigma_x^{(N)} \xi_N d\xi_N + \int_0^{\delta_{N-1}} \sigma_x^{(N-1)} \xi_{N-1} d\xi_{N-1} - \delta_{N-1} \int_0^{\delta_{N-1}} \sigma_x^{(N-1)} d\xi_{N-1} = 0 \quad (1.22)$$

$$\int_0^{h_N} \sigma_{xy}^{(N)} d\xi_N + \int_0^{\delta_{N-1}} \sigma_{xy}^{(N-1)} d\xi_{N-1} = 0$$

Третье условие (1.22) автоматически удовлетворяется.

Запишем граничные условия в поперечных концевых сечениях  $z = \text{const}$  двухслойной пластины

$$\sum_{n=1}^{N-1} \int_{y_{n-1}}^{y_n} \int \sigma_z^{(n)} dy dx = 0 \quad (1.23)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \int_{y_{n-1}}^{y_n} \int \sigma_z^{(n)} (y - h) dy dx = 0$$

Для пограничного слоя в формулах (1.13) полагаем

$$M_6^{(N-1)} = N_6^{(N-1)} = 0 \quad (1.24)$$

Также потребуем выполнения условия

$$M_6^{(N)} + 2N_6^{(N)} = 0 \quad (1.25)$$

Последнее условие означает, что второе условие (1.17) выполняется точно для любого конечного числа  $L$ , где  $L$  – номер, на котором обрываются суммы рядов Фурье в формулах (1.13), (1.14).

Выписанные выше постоянные определяются из уравнений (1.15)–(1.25). Условие (1.25) позволяет существенно усилить устойчивость процесса вычисления искомых постоянных.

Наличие частных решений в полиномах уравнения (1.3) позволяет усилить сходимость рядов Фурье в выражениях (1.13), (1.14).

Кратко укажем метод составления системы алгебраических уравнений для определения искомых постоянных [1].

Используются следующие разложения функций в ряды Фурье

$$2x^2 - x^4 = \frac{7}{15} + 48 \sum \frac{(-1)^m}{(\pi m)^4} \cos(\pi m x), \quad x^3 - x = 12 \sum \frac{(-1)^m}{(\pi m)^3} \sin(\pi m x) \quad (1.26)$$

Функциональные уравнения (1.15), (1.17), первое уравнение (1.19) и первое уравнение (1.20) разлагаются по базовым функциям  $x^2$ ,  $1$ ,  $\cos(\pi m x)$ . Это означает, что в указанных уравнениях разлагается в ряд Фурье полином  $2x^2 - x^4$  по формуле (1.26). затем приравниваются к нулю алгебраические выражения со множителями  $\cos(\pi m x)$ ,  $x^2$ , а также сумма всех постоянных (множитель единица) данного функционального уравнения.

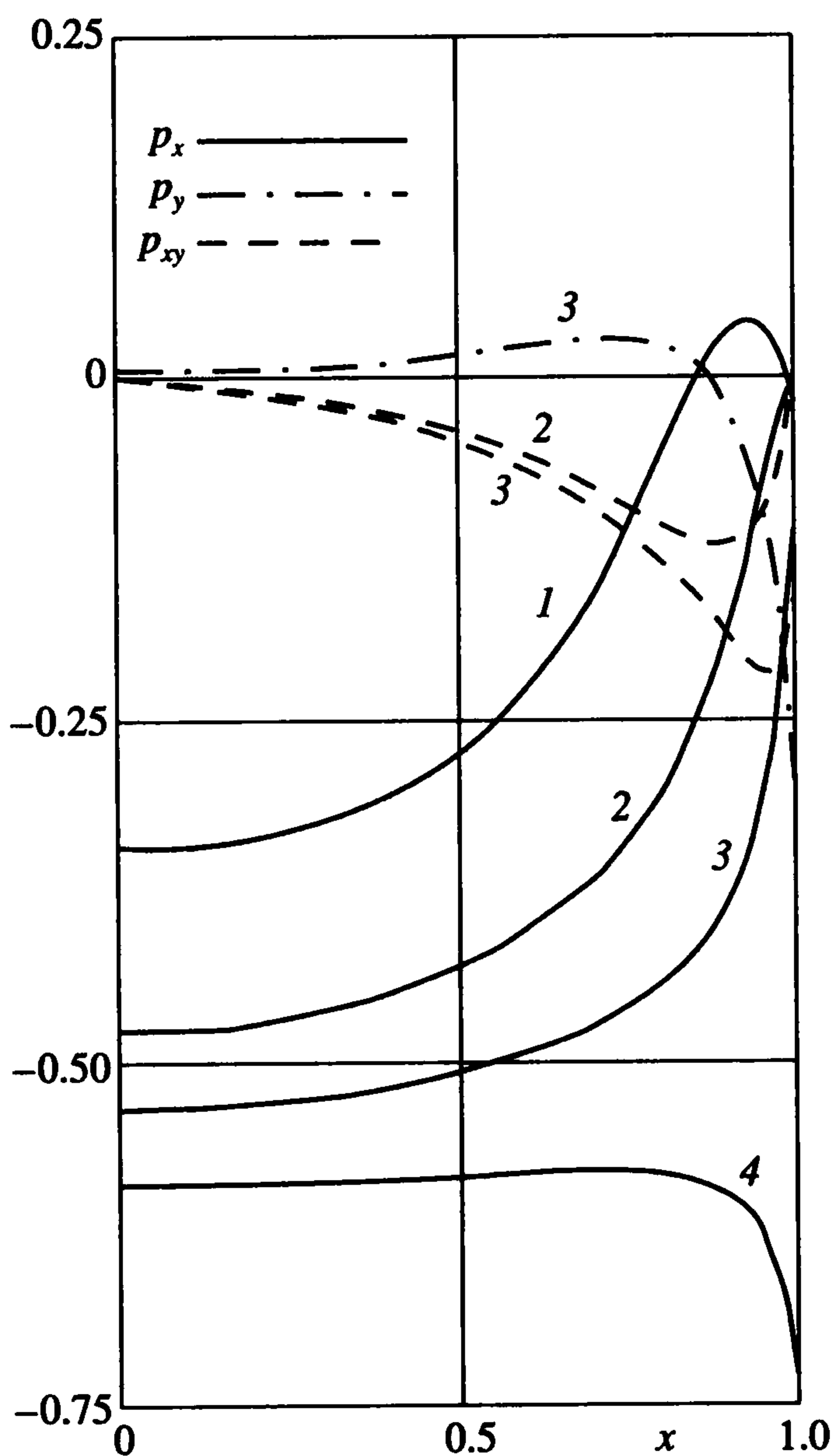
Функциональные уравнения (1.16), (1.18), второе уравнение (1.19) и второе уравнение (1.20) разлагаются по базовым функциям  $x$ ,  $\sin(\pi m x)$ . Здесь используется разложение в ряд Фурье функции  $x^3 - x$ .

Полученную систему алгебраических уравнений для определения искомых постоянных в решении (1.13), (1.14), (1.1) замыкают уравнения (1.24), (1.25), (1.23) и два первых уравнения из (1.21), (1.22).

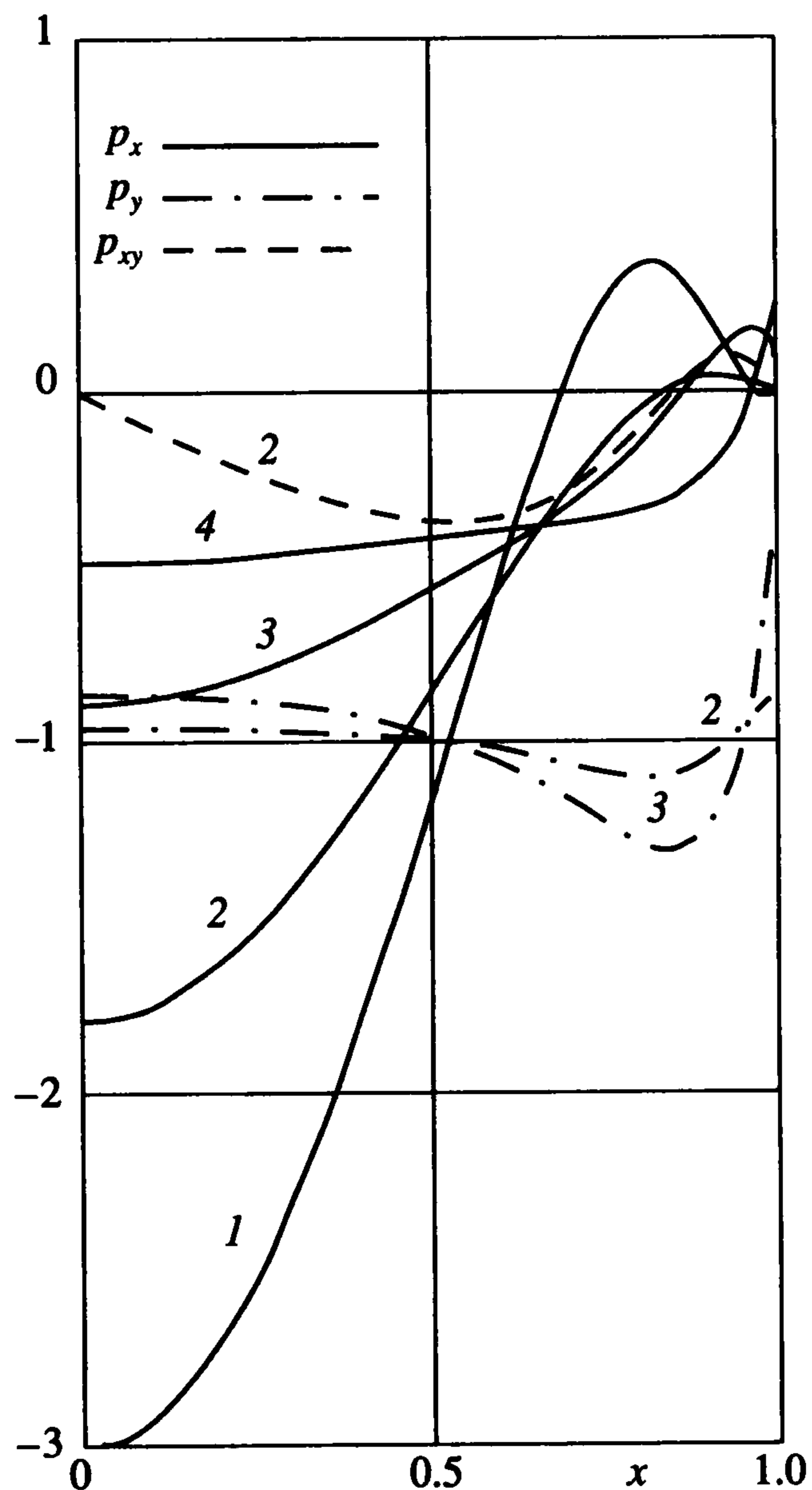
Так как деформация  $\epsilon_z$  – линейная функция по координате  $y$ , данная температурная задача формально не является плоской или обобщенно-плоской.

**Результаты расчетов.** Расчеты безразмерных напряжений (отнесенных к величине  $E_0 \alpha_x T$ ), приведенные в этом разделе, выполнены при  $k = 3$ ,  $\gamma = 6$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\nu' = 0.1$ ,  $h = 0.2$ ,  $h_N = 0.02$ ,  $a = 10^4$ ,  $\alpha = 0.5 \alpha_x$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $N = 6$ ,  $\delta_{N-1} = 0.2h$ ,  $\delta_1 = 0.7\delta$ ,  $\delta_i = \delta$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $\delta = 0.8h/(N - 2.3)$ ,  $L = 80$ , где  $L$  – номер, на котором обрываются ряды Фурье по координате  $x$ . Значение толщины  $\delta_1$  первого слоя взято меньше, чем величины толщин других условных слоев; для того чтобы улучшить аппроксимацию условия  $\sigma_x(1, y) = 0$  вблизи свободной боковой поверхности  $y = 0$  МС.

На фиг. 1 показано распределение безразмерных напряжений  $p_x$  (сплошная кривая),  $p_y$  (штрих-пунктир),  $p_{xy}$  (штриховая кривая) по  $x$  в разных сечениях исследуемого МС  $0 \leq y \leq h$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям  $y = 0$ ,  $y = 0.584h$ ,  $y = h - \delta_{N-1} = 0.8h$ ,  $y = h$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже приведены результаты расчета напряжений  $p_x^{(N)}$  на поверхностях  $y = h$  и  $y = s, s = h + h_N$

$x$	0	0.4	0.6	0.8	1
$p_x^{(N)}(x, h)$	144	132	112	69.2	6.5
$p_x^{(N)}(x, s)$	-134	-124	-104	-63.6	-4.9

Сравнение результатов расчета напряжений с индексами  $(n)$  и  $(n - 1)$  на поверхностях сопряжения этих решений  $y = y_{n-1}$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) свидетельствует о высокой степени сходимости рядов Фурье в решении (1.13), (1.14). Вычисления также показывают, что при  $N \geq 5$  решения практически совпадают.

**2. Изгиб двухслойной пластины.** Решается задача об изгибе двухслойной пластины. Трансверсально-изотропный упругий мягкий слой (МС) находится в идеальном контакте с жестким изотропным тонким слоем (ЖС). Концы  $x = \pm 1$  ЖС заделаны, концы МС свободны от нагрузок. На свободной боковой поверхности  $y = 0$  МС действует равномерно распределенная нагрузка

$$\sigma_y(x, 0) = -q, \quad q = \text{const.}$$

Воспользуемся решением, выписанным в разд. 1. Имеем

$$C_1 = C_2 = 0, \quad T = 0, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (0 \leq y \leq h + h_N) \quad (2.1)$$

Напряжения в ЖС определяются формулами (1.14). Напряжения в МС – соотношениями (1.13). В формуле (1.13) для вычисления  $\sigma_y$  следует добавить член  $(-q)$ .

Для пограничного слоя  $S_{N-1}$  имеет место условие (1.24)

$$M_6^{(N-1)} = N_6^{(N-1)} = 0$$

Также требуется выполнение условия (1.25).

Отметим, что на концах пограничного слоя непосредственно не ставятся граничные условия.

Вместо первого условия (1.19) на боковой поверхности  $y = 0$  имеем

$$y = 0: \sigma_y^{(1)} = -q$$

Вместо интегральных условий (1.22) на концах  $x = \pm 1$  ЖС напишем условия закрепленного конца жесткой пластины при учете симметрии решения задачи по  $x$

$$x = 1, \quad y = 0.5h_N + h: u_x^{(N)} = 0, \quad \partial_y u_x^{(N)} = 0; \quad u_x^{(N)} = \int_0^1 \varepsilon_x^{(N)} dx$$

Условия (1.23) отсутствуют. Остальные соотношения для определения искомым постоянных (1.15)–(1.18), (1.20), (1.21) и второе условие (1.19) остаются без изменений.

Расчеты безразмерных напряжений (отнесенных к величине  $q$ ) выполнены при  $N = 6$ ,  $\delta_{N-1} = 0.2h$ ,  $\delta_i = \delta$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\delta = 0.8h/(N - 2)$ ,  $L = 80$ . Значения механических констант двухслойной пластины и ее геометрические параметры  $h$ ,  $h_N$  приведены в заключительной части разд. 1.

На фиг. 2 показано распределение безразмерных напряжений  $p_x$  (сплошная кривая),  $p_y$  (штрих-пунктир),  $p_{xy}$  (штриховая кривая) по  $x$  в разных сечениях исследуемого мягкого анизотропного слоя  $0 \leq y \leq h$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям  $y = 0$ ,  $y = 0.4h$ ,  $y = h - \delta_{N-1} = 0.8h$ ,  $y = h$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панферов И.В. Несимметричная температурная смешанная задача для трансверсально-изотропного упругого слоя // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 1059–1064.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.