

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. В. А. Ромащенко

ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ВОЛН С СИЛЬНЫМИ РАЗРЫВАМИ ОТ ТОНКИХ СЖИМАЕМЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

На примере плоской контактной задачи гидроупругости аналитически исследуется многократное отражение волн с сильными разрывами, распространяющихся в идеальноупругой жидкости, от тонких пленок, имеющих конечный акустический импеданс. Волновое решение представляется в виде суммы базовой (отсутствие пленки) и возмущенной составляющей. Разработан алгоритм последовательного аналитического расчета возмущенных составляющих после многократных отражений от преграды.

На примере одномерной плоской линейной краевой задачи гидроупругости было исследовано [1] многократное отражение волн с сильными разрывами, распространяющихся по слою жидкости, от сверхтонких пленок; пленка моделировалась несжимаемой присоединенной массой, т.е. телом с бесконечным акустическим импедансом. Ниже в продолжение этих исследований задача рассматривается в уточненной контактной постановке, когда преграда имеет конечное волновое сопротивление и учитываются волновые процессы как по толщине жидкости, так и по толщине пленки.

Рассмотрим контактную одномерную волновую задачу гидроупругости. Имеется бесконечный слой идеальноупругой жидкости толщины l и плотности ρ_1 , ось x направим нормально поверхности слоя таким образом, чтобы прямая $x = 0$ соответствовала одной, $x = l$ – противоположной поверхности слоя. На поверхность $x = 0$ (назовем ее левой) падает заданный импульс давления $f(t)$, причем под f понимаем разность между полным и атмосферным давлением на левой границе слоя жидкости. Поверхность $x = l$ (назовем ее правой) контактирует без отрыва и протекания с тонкой бесконечной упругой твердой пластиной (пленкой) толщины αl и плотности ρ_2 . В начальный момент времени $t = 0$ жидкость и препятствие неподвижны и находятся под действием только атмосферного давления P_0 . Силой земного притяжения пренебрегаем. Силовое возбуждение $f(t)$ считается достаточно малым и задача рассматривается в линейной постановке для малых смещений. Поведение жидкости будем описывать в координатах Эйлера, а твердого тела – в координатах Лагранжа.

Используя потенциал скорости жидкости ψ , сформулируем соответствующую контактную гиперболическую краевую задачу следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= \frac{\psi_{tt}}{a_1^2}; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0; \quad u_{xx} = \frac{u_{tt}}{a_2^2}; \quad l \leq x \leq l + \alpha l, \quad t > 0 \\ \psi &= \psi_t = 0; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \quad u = u_t = 0; \quad l \leq x \leq l + \alpha l, \quad t = 0 \\ \rho_1 \psi_t(0, t) &= -f(t); \quad x = 0, \quad t > 0 \\ u_x(l + \alpha l, t) &= 0; \quad x = l + \alpha l, \quad t > 0 \\ \psi_x(l, t) &= u_t(l, t), \quad \rho_1 \psi_t(l, t) = \rho_2 a_2^2 u_x(l, t); \quad x = l, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$u = w + \frac{P_0(x-l)}{\rho_2 a_2^2} \quad (2)$$

a_1, a_2 – скорость звука в жидкости и материале преграды соответственно; $w(x, t)$ – перемещение точек препятствия.

Использование различных по своей физической природе искомым неизвестных ψ и u для левого и правого слоев соответственно объясняется тем, что слой $0 \leq x \leq l$ представляет собой жидкость и его динамику удобно описывать посредством потенциала скорости ψ [3], а слой $l \leq x \leq l + \alpha l$ – твердое упругое тело, и для его описания более традиционна формулировка уравнений в перемещениях [4]. Поэтому для задач гидроупругости часто используют такие математические постановки, когда движения жидкой и твердой сред описываются при помощи различных физических величин. При этом, поскольку полное давление в жидкости равно $P_0 - \rho_1 \psi_t$, функция $f(t)$ представляет собой разность полного и атмосферного давления на границе $x = 0$, а также благодаря представлению (2) для перемещений преграды в формулировке краевой задачи (1) постоянная P_0 исключается (не фигурирует), и, кроме того, все начальные условия и граничное условие при $x = l + \alpha l$ превращаются в однородные. Следует отметить, что правая граница жидкости имеет координату Эйлера $x = l$ только при $t \leq \frac{l}{a_1}$, поэтому при $t > \frac{l}{a_1}$ контактные условия в (1) ставятся приближенно.

Так как краевая задача (1) линейная, интерес представляет построение функции влияния для возмущений волн давления в жидкости в окрестности единичного разрыва после n -кратного отражения от границы раздела сред $x = l$. Поэтому изменение во времени внешней нагрузки $f(t)$ задавалось в виде единичной ступенчатой функции Хевисайда

$$f(t) = H(t) \quad (3)$$

имеющей в точке $t = 0$ разрыв первого рода. При такой функции нагрузки волновая задача (1) будет иметь решения с сильными разрывами, расположенными на характеристиках $x \pm a_n t = \text{const}$ ($n = 1, 2$), причем на характеристиках разрывов будут выполняться условия совместности [1, 2].

Исследование задачи (1) при помощи элементарной теории акустических волн [2] неудобно, поскольку рассматривается случай

$$\max\left(\alpha; \frac{\alpha a_1}{a_2}\right) \ll 1 \quad (4)$$

и за время однократного прохождения волны по слою жидкости в пластине будет происходить множество переотражений. Поэтому для решения контактной задачи (1) более предпочтителен метод интегральных преобразований. Используем, следуя известному подходу [2], комплексное преобразование Фурье по времени, определяемое формулами

$$g^F(x, \omega) = \int_0^{+\infty} g(x, t) e^{it\omega} dt, \quad g(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_L g^F(x, \omega) e^{-it\omega} d\omega \quad (5)$$

В качестве L в формуле обращения можно выбрать любую прямую, параллельную вещественной оси и имеющую мнимую часть большую, чем показатель степени рос-

та функции $g^F(x, \omega)$ в верхней комплексной ω -полуплоскости над прямой L [5]. Здесь под показателем степени роста подразумевается точная нижняя грань множества неотрицательных чисел $\Omega(\beta)$ таких, что для всех ω , удовлетворяющих условию $\text{Im} \omega > \beta$, справедлива оценка

$$|g^F(x, \omega)| \leq M |\exp(-i\omega\Omega)|$$

где $M(\beta, \Omega)$ и β – некоторые положительные постоянные.

Для изображений искомым функций краевой задачи (1), учитывая условия совместности, можно получить, как и ранее [2], обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\psi_{xx}^F + \left(\frac{\omega}{a_1}\right)^2 \psi^F = 0, \quad u_{xx}^F + \left(\frac{\omega}{a_2}\right)^2 u^F = 0 \quad (6)$$

с общим решением

$$\psi^F(x, \omega) = A_1(\omega) \sin\left(\frac{x\omega}{a_1}\right) + B_1(\omega) \cos\left(\frac{x\omega}{a_1}\right) \quad (7)$$

$$u^F(x, \omega) = A_2(\omega) \sin\left(\frac{x\omega}{a_2}\right) + B_2(\omega) \cos\left(\frac{x\omega}{a_2}\right)$$

Для определения неизвестных A_1, B_1, A_2, B_2 , являющихся функциями ω , используются граничные и контактные условия задачи (1), записанные для изображений. Учитывая выражение (3), равенство

$$H^F(\omega) = \frac{i}{\omega} \quad (8)$$

а также правила дифференцирования оригиналов и изображений [2, 5], получаем систему

$$\rho_1 B_1 = \omega^{-2}, \quad A_2 = B_2 \operatorname{tg} \left[\frac{(l + \alpha l)\omega}{a_2} \right]$$

$$B_1 \sin\left(\frac{l\omega}{a_1}\right) - A_1 \cos\left(\frac{l\omega}{a_1}\right) = i a_1 \left[A_2 \sin\left(\frac{l\omega}{a_2}\right) + B_2 \cos\left(\frac{l\omega}{a_2}\right) \right] \quad (9)$$

$$i \rho_1 \left[A_1 \sin\left(\frac{l\omega}{a_1}\right) + B_1 \cos\left(\frac{l\omega}{a_1}\right) \right] = \rho_2 a_2 \left[B_2 \sin\left(\frac{l\omega}{a_2}\right) - A_2 \cos\left(\frac{l\omega}{a_2}\right) \right]$$

решая которую находим

$$A_1(\omega) = i(1 - \lambda q - \lambda Q + qQ) Z \rho_1^{-1} \omega^{-2}, \quad B_1(\omega) = \rho_1^{-1} \omega^{-2}$$

$$A_2(\omega) = i(\lambda - 1)(1 - Qr) Z \mu \rho_1^{-1} a_1^{-1} \omega^{-2}, \quad B_2(\omega) = (\lambda - 1)(1 + Qr) Z \mu \rho_1^{-1} a_1^{-1} \omega^{-2} \quad (10)$$

где

$$q = \exp\left(\frac{2il\omega}{a_1}\right), \quad Q = \exp\left(\frac{2i\alpha l\omega}{a_2}\right), \quad r = \exp\left(\frac{2il\omega}{a_2}\right)$$

$$\mu = \exp[il\omega(a_1^{-1} - a_2^{-1})], \quad \lambda = \frac{(1 - K)}{(1 + K)}, \quad K = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}$$

$$Z = \frac{1}{(1 + \lambda q - \lambda Q - qQ)}$$

Таким образом, полное решение краевой задачи (1)–(3) в изображениях представлено формулами (7), (10). Используя известные теоремы дифференцирования изображений и оригиналов [2, 5], получим изображения скоростей и давлений для жидкого слоя, а также скоростей и деформаций (либо напряжений) для пластины. Случай $\lambda = -1$ соответствует свободной поверхности на границе $x = l$; $\lambda = 0$ – равенству акустических сопротивлений жидкости и преграды; $\lambda = 1$ – преграде с бесконечным импедансом, причем случай $\lambda = -1$ хорошо изучен [2], а случай $\lambda = 1$ был подробно рассмотрен ранее [1].

Можно показать (ранее [1] это было показано для случая $\lambda = 1$), что при малой толщине препятствия, когда выполняется условие (4), возмущения волновых полей в жидком слое по сравнению со случаем $\alpha = 0$ для любого конечного $t > \frac{l}{a_1}$ будут иметь место только в малой окрестности жидкости за разрывным фронтом отраженной волны. Чтобы явно выделить только эти возмущения, всюду далее удобно работать с функцией

$$\Psi = \psi - \psi_0 \quad (11)$$

где ψ_0 – решение для случая $\alpha = 0$. Для ψ_0 имеем хорошо известное решение

$$\psi_0^F = \frac{\left[\cos\left(\frac{x\omega}{a_1}\right) + i(1+q)(1-q)^{-1} \sin\left(\frac{x\omega}{a_1}\right) \right]}{(\rho_1 \omega^2)} \quad (12)$$

которое получается из решения (7), (10) при $\lambda = -1$. Возмущение давления в жидкости, как известно [1, 3], равно

$$P_a = -\rho_1 \Psi_t \quad (13)$$

Тогда из соотношений (7)–(13) получим изображение функции влияния исследуемых возмущений волновых картин давления при малых α

$$P_a^F(x, \omega) = \frac{-i\theta(1+\lambda) \left(e^{\frac{ix\omega}{a_1}} - e^{-\frac{ix\omega}{a_1}} \right)}{\omega} \quad (14)$$

$$\theta = \frac{q(1-Q)}{[(1-q)(1-qQ + \lambda q - \lambda Q)]}$$

Обращая это выражение по формуле (5), имеем

$$P_a(x, t) = -i \frac{1+\lambda}{2\pi} \int_L \theta(\omega) e^{-it\omega} \left(e^{\frac{ix\omega}{a_1}} - e^{-\frac{ix\omega}{a_1}} \right) \frac{d\omega}{\omega} \quad (15)$$

Выражение (15) неудобно для дальнейшего анализа, так как подынтегральная функция имеет бесконечное множество полюсов и, кроме того, точное аналитическое определение этих полюсов довольно затруднительно. Поэтому поступаем так: для случаев конечного импеданса преграды ($0 < K < +\infty$; $|\lambda| < 1$) всегда можно зафиксировать конечное значение $\text{Im} \omega = \beta_1 > 0$, не зависящее от α , из условия

$$|q| < \frac{(1-|\lambda|)}{(1+|\lambda|)} < 1 \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении этого условия

$$|qQ| + |\lambda q| + |\lambda Q| < 1 \quad (17)$$

и, таким образом, θ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд по неотрицательным степеням $q^n Q^m$

$$\theta = \sum_{n=1, m=0}^{\infty} (1-Q)q^n(qQ + \lambda Q - \lambda q)^m = \sum_{n=1, m=0}^{\infty} D_{nm}q^n Q^m \quad (18)$$

Можно показать, что при таком выборе β_1 величина θ будет ограничена в полуплоскости $\text{Im } \omega > \beta_1$ и показатель степени роста функции $P_a^F(x, \omega)$ в этой полуплоскости будет равен нулю. Подставляя выражение (18) в равенство (15), будем иметь

$$P_a(x, t) = -i(1 + \lambda) \sum_{n=1, m=0}^{\infty} D_{nm} \left[I\left(t - d_{nm} - \frac{x}{a_1}\right) - I\left(t - d_{nm} + \frac{x}{a_1}\right) \right] \quad (19)$$

$$I(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_L e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega}, \quad d_{nm} = 2l \left(\frac{n}{a_1} + \frac{m\alpha}{a_2} \right)$$

причем, чтобы удовлетворить условиям теоремы обращения (второе выражение (5)) [5], в качестве контура L выбираем прямую $\text{Im } \omega = \text{const}$, удовлетворяющую условию (16). Интегралы в равенстве (19) сразу вычисляются с использованием второго выражения (5) и равенства (8). Получим

$$I(\tau) = -iH(\tau) \quad (20)$$

Отсюда следует, что для любых конечных t и α в двойном ряде (19) будет ненулевым только конечное число членов, а именно тех, которые удовлетворяют условию

$$d_{nm} - \frac{x}{a_1} < t < d_{nm} + \frac{x}{a_1} \quad (21)$$

Рассмотрим ситуацию после j -го отражения волны от границы контакта $x = l$

$$t = \frac{[(2j-1) + \zeta]l}{a_1}, \quad x = (1 - \zeta)l + \xi; \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \xi < l\zeta \quad (22)$$

Подстановка выражений (22) в условие (21) приводит к неравенству

$$n - \frac{\xi}{(2l)} < j - \frac{ma_1\alpha}{a_2} < n + 1 - \zeta + \frac{\xi}{(2l)} \quad (23)$$

которому могут удовлетворять только значения $1 \leq n \leq j$. Благодаря множителю $(1 - Q)$ в выражении (14) и кусочному постоянству интеграла (20) в ряде (19) будет также взаимно уничтожаться большинство членов с одинаковым индексом n .

Из выражений (19), (20) следует, что возмущение поля давлений в жидкости всегда будет иметь вид многоступенчатой кусочно-постоянной функции. При малых α эти функции в ряде случаев можно аппроксимировать непрерывными функциями, к которым приводит асимптотика $\alpha \rightarrow +0$. Рассмотрим эту асимптотику. Обозначим

$$R_j^e(\eta) = P_a(x, t), \quad \eta = \frac{a_2\xi}{(2\alpha la_1)} \quad (24)$$

где x и t удовлетворяют соотношениям (22). Опуская подробности доказательства, можно предложить следующий алгоритм последовательного вычисления $R_j^e(\eta)$.

Представим одинарный ряд в виде двойного

$$\sum_{k=0}^{\infty} (Q\lambda + qQ - q\lambda)^k = \sum_{n=0, m=0}^{\infty} S(n, m)q^n Q^m \quad (25)$$

причем выражения $S(n, m)$ всегда нужно записывать следующим образом:

$$S(n, m) = \begin{cases} \lambda^m T(n, m, \lambda), & \lambda > 0 \\ (-\lambda)^m T(n, m, \lambda) \cos \pi m, & \lambda < 0 \\ H(n-m) - H(n-m-1), & \lambda = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Приближенные асимптотические значения волновых возмущений $R_j(\eta)$ определяются по такой схеме:

$$R_0(\eta) = 0, \quad R_{j+1}(\eta) = R_j(\eta) + (1 + \lambda)S(j, \eta), \quad j \geq 0 \quad (27)$$

Возмущения поля давления в жидкости при $\lambda \neq 0$ после первых трех отражений от пластинки, вычисленные по алгоритму (25)–(27), выглядят так:

$$R_1(\eta) = (1 + \lambda)\varphi(\eta, \lambda), \quad R_2(\eta) = (\lambda^{-1} - \lambda)[(1 + \lambda)\eta + \lambda]\varphi(\eta, \lambda)$$

$$R_3(\eta) = (1 + \lambda)\left[\frac{1}{2}\eta^2(\lambda^{-1} - \lambda)^2 + \eta\left(\lambda^{-1} - 1 - \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^{-2}\right) + 1 - \lambda + \lambda^2\right]\varphi(\eta, \lambda) \quad (28)$$

$$\varphi(\eta, \lambda) = \frac{(\lambda \operatorname{sign} \lambda)^\eta [1 + \operatorname{sign} \lambda + (1 - \operatorname{sign} \lambda) \cos \pi \eta]}{2}$$

Точные решения $R_j^e(\eta)$ представляют собой кусочно-постоянные многоступенчатые функции и выражаются через $R_j(\eta)$ следующим образом:

$$R_j^e(\eta) = R_j([\eta]) \quad (29)$$

где $[\eta]$ – целая часть неотрицательного числа η . Анализ нескольких первых асимптотик (27), (28) показал, что максимальная ошибка от аппроксимации точных разрывных решений (29) гладкими непрерывными функциями (27), (28) имеет порядок $1 - |\lambda|$ для $(1 - |\lambda|) \ll 1$ и порядок $(|\lambda| \ln |\lambda|)^{-1}$ при $0 < |\lambda| \ll 1$. Таким образом, аппроксимации (27), (28) обладают высокой точностью в случаях, когда акустические импедансы слоев существенно (на порядок) различаются. Если же волновые сопротивления слоев близки либо одного порядка, рекомендуется строить точные решения по формулам (29), потому что ошибка приближения при малых λ может быть весьма большой и, более того, стремиться к бесконечности при $\lambda \rightarrow 0$.

При равных импедансах имеем тривиальную ситуацию

$$K = 1, \quad \lambda = 0, \quad R_j(\eta) = H(j-1-\eta), \quad R_j^e(\eta) = H(j-\eta)$$

Можно показать, что предельный переход $a_2 \rightarrow +\infty$ приводит выражения (28) к асимптотикам для преграды с бесконечным импедансом. Эти асимптотики были подробно исследованы [1] и для их нахождения получена удобная рекуррентная формула

$$R_j^0(\chi) = 2e^{-\chi} G_j(\chi), \quad j \geq 1, \quad \chi = \frac{\rho_1 \xi}{(\rho_2 \alpha l)}$$

$$G_1(\chi) = 1, \quad G_{j+1}(\chi) = 1 - G_j(\chi) + 2 \int_0^\chi G_j(\chi') d\chi' \quad (30)$$

позволяющая быстро вычислять возмущения давлений после большого числа отражений от пленки. Для второго и третьего отражения имеем

$$G_2(\chi) = 2\chi, \quad G_3(\chi) = 2\chi^2 - 2\chi + 1$$

Анализ выражений (28) показывает, что асимптотики как функции безразмерной координаты $\frac{\xi}{\alpha l}$ зависят еще от двух безразмерных параметров: $\frac{a_1}{a_2}$ и $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ и не зависят

от толщины пластинки. При уменьшении α они будут пропорционально поджиматься наподобие “гармошки” к разрывному фронту отраженной волны вдоль координаты x , сохраняя при этом неизменными все свои максимумы и минимумы, а также значение в точке разрыва $\xi = +0$. Поэтому с математической точки зрения величины (28) и (30) представляют собой дефект сходимости первых производных решений с сильными разрывами краевой контактной гиперболической задачи (1) в асимптотике $\alpha \rightarrow +0$. Как функции η они зависят еще только от одного параметра: отношения акустических импедансов “жидкость – преграда”.

Для преград с большим волновым сопротивлением $K < 1$, $\lambda > 0$ и возмущения давлений затухают по экспоненциальному закону по мере удаления от разрывного фронта. Для преград с малым импедансом $K > 1$, $\lambda < 0$ и возмущения экспоненциально затухают с колебаниями, период которых относительно координаты x равен $\frac{4a_1\alpha l}{a_2}$. В случае равенства импедансов ($K = 1$, $\lambda = 0$) либо нулевого импеданса пре-

грады ($\rho_2 = 0$ или/и $a_2 = 0$, $K = +\infty$, $\lambda = -1$) никаких возмущений не будет.

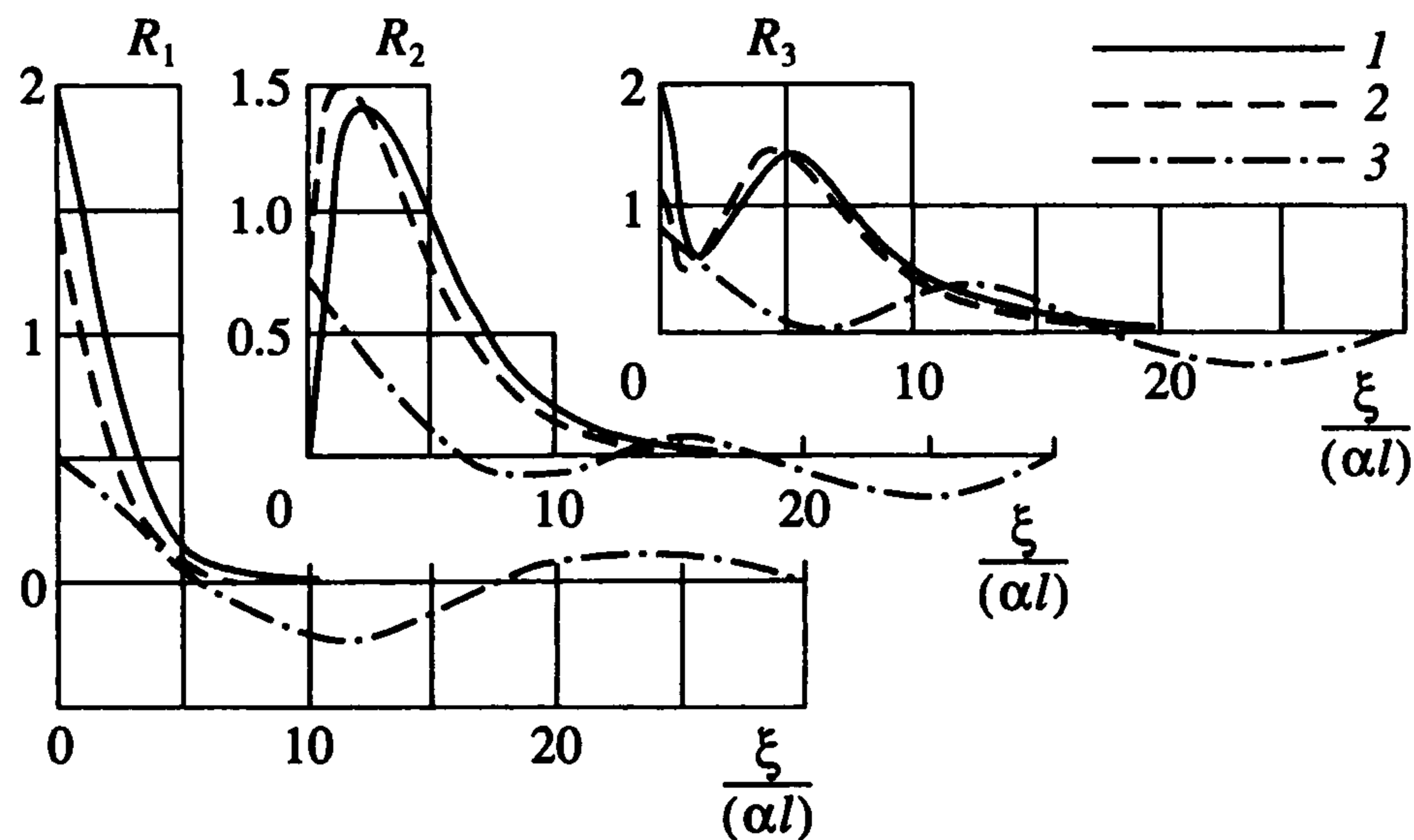
Как уже упоминалось, в случае близких импедансов ($K \approx 1$) формулы (27), (28) могут терять точность. Более детальный анализ показал, что существенная потеря точности наблюдается в интервале $0 < \eta < j$. Рассмотрим, к примеру, асимптотику $R_2(\eta)$ при $K = 1 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Можно показать, что внутри интервала $0 < \eta < 1$ эта функция имеет экстремум, стремящийся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow +0$, в то время как точное решение постоянно и ограничено на этом промежутке. Поэтому при K , близких к единице, асимптотические приближенные формулы (27) можно применять при $\eta \geq j$, а при $0 \leq \eta < j$ следует строить кусочно-постоянные функции (29). Поступая таким образом в промежутке $0 \leq \eta < j$, получим ступенчатую функцию, близкую к единице, которую следует рассматривать скорее не как возмущение, а как естественное продолжение падающей волны, вызванное удлинением расчетного слоя жидкости на малую величину, пропорциональную толщине преграды. При равных импедансах ($K = 1$, $\lambda = 0$) асимптотики и точные решения равны $H(j - 1 - \eta)$ и $H(j - \eta)$ соответственно и возмущениями не являются. С физической точки зрения случай $K \approx 1$ неинтересен. Использование соотношения (29) в интервале $0 < \eta < j$ рекомендуется и в ситуациях, когда импедансы слоев различны, но имеют один порядок ($|\lambda| = O(1)$, $1 - |\lambda| = O(1)$), так как ошибка аппроксимации в этих случаях может быть порядка единицы при нецелых значениях аргумента.

На фигуре изображены возмущения давления (28) после первых трех отражений

от пластинки для $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$ и разных значений $\sigma = \frac{a_1}{a_2}$. Кривым 1, 2, 3 соответствуют

$\sigma = 0$ ($K = 0$, $\lambda = 1$), $\sigma = \frac{2}{3}$ ($K = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$), $\sigma = 6$ ($K = 3$, $\lambda = -\frac{1}{2}$). Для большей информа-

тивности графики построены в независимых безразмерных координатах $R_j\left(\frac{\xi}{(\alpha l)}\right)$, поскольку аргумент η в формуле (24) сам является функцией σ . Заметим, что $\sigma = 0$



соответствует преграде с бесконечным импедансом, $\sigma = 2$ – равенству импедансов жидкости и препятствия, $\sigma = +\infty$ – свободной поверхности на границе $x = l$.

Было доказано [1], что в случае преграды с бесконечным импедансом все возмущения с четным номером j отражения от пленки имеют нуль в точке $\xi = +0$. Анализ выражений (27), (28) показывает, что $a_2 = +\infty$ является единственным случаем, когда четные асимптотики равны нулю в этой точке, за исключением тривиальных ситуаций свободной поверхности справа ($a_2 = 0$ или $\rho_2 = 0$) либо равенства акустических сопротивлений, когда возмущения волновых картин вообще отсутствуют.

Рассматривая функции (27)–(29) как функции влияния для возмущений давления на единичном разрыве, можно предложить простой приближенный способ построения волновых картин давления для случаев произвольной нагрузки $f(t)$, имеющей конечное (либо счетное без точек сгущения) множество разрывов первого рода, в краевой задаче (1) и тонких преград. Давление в жидкости следует представлять в виде линейной суперпозиции базовой и возмущенной составляющих. Базовая составляющая – это хорошо известное решение для случая отсутствия пластины (правая поверхность жидкости свободна, $\alpha = 0$), возмущенная – это функции (27) либо (29), умноженные на соответствующую величину разрыва и быстро затухающие по мере удаления от фронта разрыва.

Следует отметить, что для контактных задач типа “жидкость – жидкость” или “твердое тело – твердое тело” функция влияния для волновых возмущений (15) не изменится (для твердого тела она лишь изменит знак и будет представлять собой возмущения напряжений). Поэтому исследованные здесь волновые возмущения будут иметь место в случае любых контактных волновых задач с сильными разрывами и тонкими слоями: гидроупругости, гидромеханики и теории упругости. Эти возмущения волновых полей, как уже отмечалось выше, являются особыми, они не исчезают при $\alpha \rightarrow +0$: волновая картина в окрестности разрыва при $\alpha \rightarrow +0$ неравномерно стремится к волновой картине при $\alpha = 0$. Экстремальные значения всплесков давлений при этом зависят только от параметра K и номера отражения, не зависят от α и могут быть весьма существенными (доходить до двух величин разрыва, см. фигуру). Для непрерывных функций нагрузки эти явления не наблюдаются. Если $f(t) \in C$, то решения краевой задачи (1) будут либо классическими (если $f(t) \in C_1$), либо иметь слабые разрывы. Такие решения вместе со своими первыми производными при $\alpha \rightarrow +0$ равномерно стремятся к соответствующим решениям при $\alpha = 0$ в любом конечном прямоугольнике $0 \leq x \leq l$; $0 \leq t \leq t_* < +\infty$.

Результаты (27)–(29) можно использовать в методах неразрушающего акустического контроля качества изделий с тонкими покрытиями (типа покраска или напыле-

ние поверхности, никелирование, хромирование и т.п.). Считая физико-механические характеристики основного слоя известными, нагружая образец с присоединенным тонким поверхностным слоем разрывным импульсом и фиксируя отраженные сигналы, можно однозначно определить: а) по величине всплесков возмущений – импеданс покрытия, б) по степени затухания возмущений – отношение толщины покрытия к скорости звука в нем.

Однако при этом могут возникнуть проблемы технологического характера в связи с трудностью генерирования сигнала, который для сверхтонкой пленки можно считать разрывным: время нарастания такого сигнала должно быть величиной бо-

лее высокого порядка малости, чем отношение $\frac{\alpha l}{a_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ромащенко В.А.* Аномальное отражение неклассических волн от сверхтонких препятствий // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1027–1032.
2. *Жарий О.Ю., Улитко А.Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Выща школа, 1989. 184 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
5. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304 с.

Киев
e-mail:roma@ipp.adam.kiev.ua

Поступила в редакцию
1.ІІ.2001