

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. И. О. Осипов

ДВИЖЕНИЕ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Изучаются закономерности движения сейсмической энергии упругих волн в анизотропных средах с четырьмя упругими постоянными в зависимости от направлений движения волн и соотношений упругих постоянных для всех реальных сред рассматриваемого класса анизотропии. Установлена прямая связь образования остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников с особенностями движения энергии волн при определенных условиях для упругих постоянных.

Изучение закономерностей движения энергии плоских упругих волн в анизотропных средах представляет особый интерес, так как векторы плотности потоков энергии с физической точки зрения определяют направления распространения фронтов волн, а почти все сейсмические поля приближенно могут рассматриваться как локально плоские волны. Некоторые вопросы движения сейсмической энергии в анизотропных средах рассматривались ранее [1–5], однако зависимость закономерностей движения потоков энергии от направлений движения волн и соотношений упругих постоянных сред не изучалась.

1. Плоские волны в анизотропных средах. Рассмотрим анизотропную среду с четырьмя упругими постоянными. Оси x, y, z прямоугольной системы координат совпадают с осями упругой симметрии среды, колебания не зависят от координаты z .

Уравнения движения в смещениях имеют вид [6]

$$au_{xx} + du_{yy} + cv_{xy} = u_t, \quad cu_{xy} + dv_{xx} + bv_{yy} = v_t \quad (1.1)$$

Отношения упругих постоянных к плотности среды

$$a = C_{11}/\rho, \quad b = C_{22}/\rho, \quad d = C_{66}/\rho, \quad c = (C_{66} + C_{12})/\rho$$

удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной определенности формы упругой энергии

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad K_1 = ab - (c - d)^2 > 0 \quad (1.2)$$

Решения уравнений (1.1), выражающие плоские волны, имеют вид [6]

$$u_k = (r_k - c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k), \quad v_k = -(p_k - c\theta\lambda_k)w_k(\Omega_k) \\ p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\theta^2 + b\lambda_k^2 - 1, \quad p_k r_k = c^2\theta^2\lambda_k^2 \quad (1.3)$$

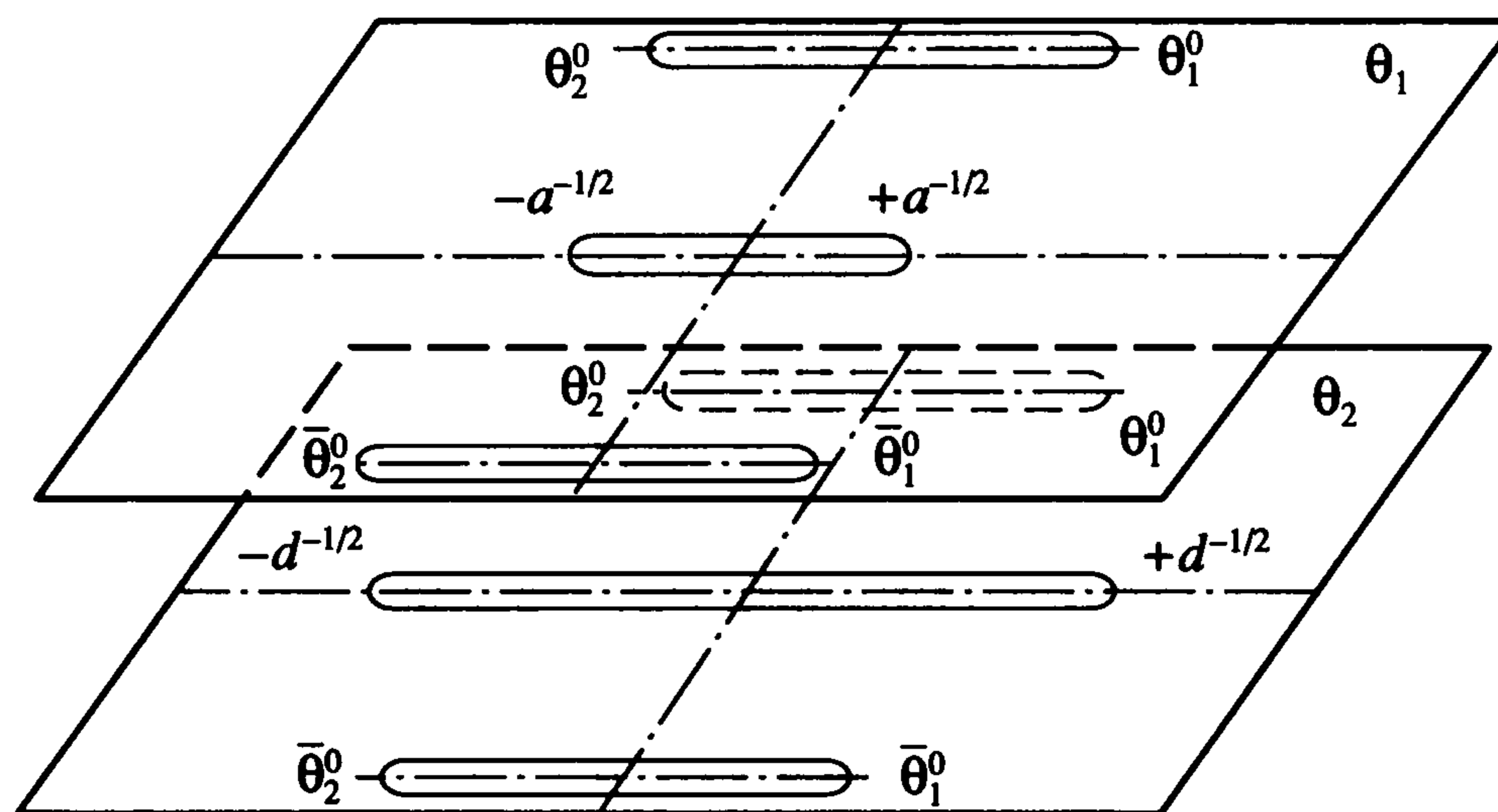
$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y, \quad k = 1, 2$$

где

$$\lambda_k = [A + (-1)^k(A^2 - B)^{1/2}]^{1/2} / (2bd)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$A = (b + d) - L\theta^2, \quad B = 4abd^2(1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2), \quad L = ab + d^2 - c^2$$

Функции λ_1 и λ_2 – ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности. Функции w_1 и w_2 – произвольные непрерывные дважды дифференцируемые функции, если в них коэффициенты при переменных величинах



Фиг. 1

вещественные; если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, под w_k понимают аналитические функции в этой области.

Внутренние радикалы функций (1.4) имеют точки разветвления [7, 8]

$$\theta_i^0 = \pm \{ [M \pm (-4bdc^2 N_1)^{1/2}] / (K_1 K_2) \}^{1/2}$$

$$N_1 = (a-d)(b-d) - c^2, \quad K_1 = ab - (c-d)^2, \quad K_2 = ab - (c+d)^2 \quad (1.5)$$

$$M = bN_1 + dN_7, \quad N_7 = (b-d)^2 - c^2$$

которые могут быть комплексными, мнимыми и вещественными в зависимости от соотношений упругих постоянных.

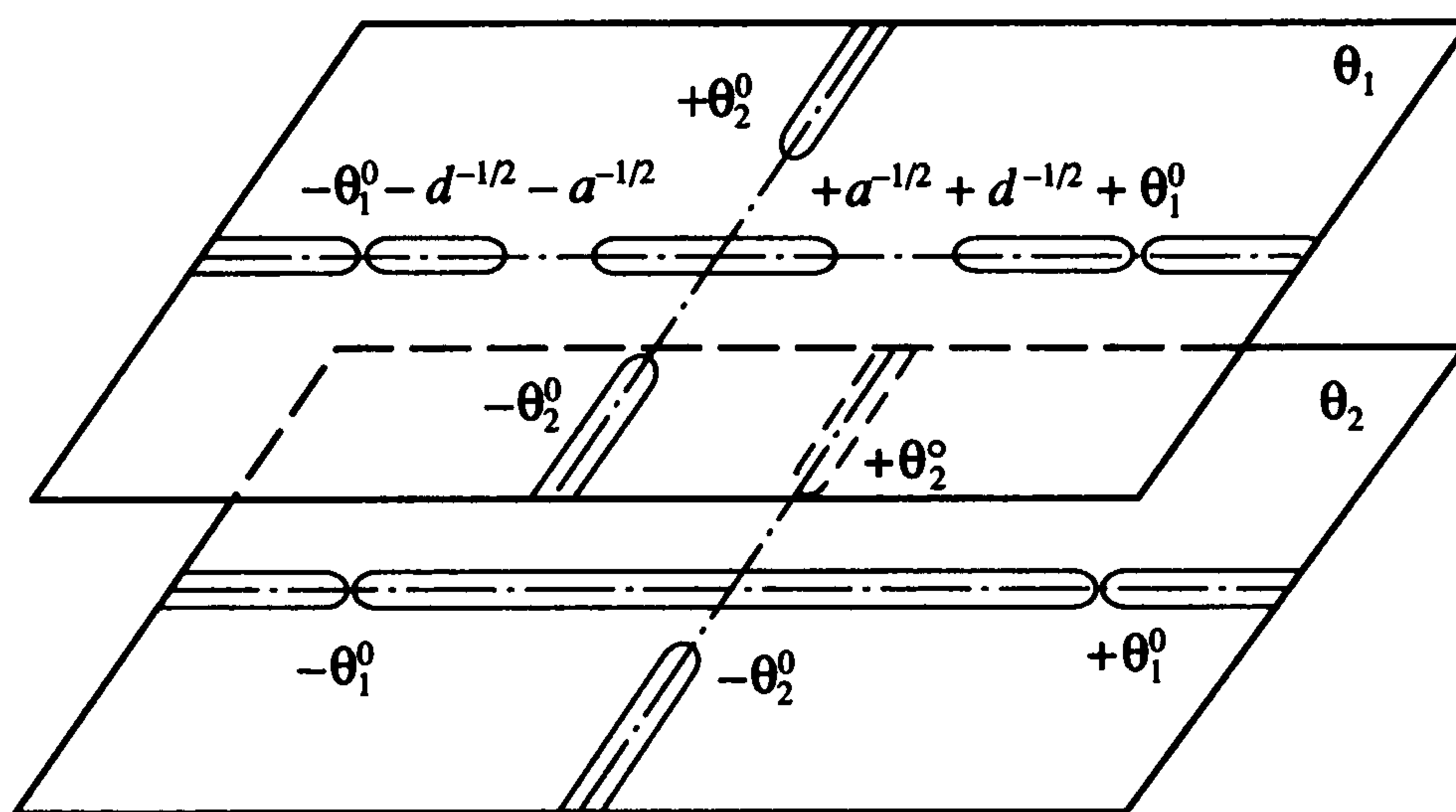
При условии [7, 8]

$$N_2 = (a-d)b - c^2 > 0 \quad (1.6)$$

точками разветвления для внешних радикалов (1.4) являются точки $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и точки $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$. В этом случае риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$, склеенных крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления θ_i^0 . На фиг. 1 изображена риманова поверхность для случая, когда точки разветвления θ_i^0 – комплексные попарно сопряженные.

На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (1.3) выражают вещественные плоские волны: квазипродольные при $k = 1$, квазипоперечные при $k = 2$.

При $N_2 < 0$ внешний радикал функции λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ и $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$, внешний радикал функции λ_2 не имеет точек разветвления. Из четырех точек разветвления для внутреннего радикала функций λ_1 и λ_2 имеем: две вещественные $\pm \theta_1^0$, две мнимые $\pm \theta_2^0$, причем $\theta_1^0 > d^{-1/2}$. Функция λ_1 однозначна на плоскости θ_1 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$, $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^0)$ и $(\pm \theta_1^0, \pm \infty)$ вдоль вещественной оси и с разрезами $(\pm \theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Функция λ_2 однозначна на плоскости θ_2 с разрезами $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ и $(\pm \theta_1^0, \pm \infty)$ вдоль вещественной оси и с разрезами $(\pm \theta_2^0,$



Фиг. 2

$\pm i\infty$) вдоль мнимой оси. Риманова поверхность (фиг. 2) состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 , склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$. На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$, $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения. Функции (1.3) выражают вещественные плоские волны [6]: квазипродольные при $k = 1$ на берегах разреза $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 , квазипоперечные при $k = 2$ на берегах разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 и при $k = 1$ на берегах разрезов $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 .

2. Потоки энергии и лучевые скорости. Распространение упругих волн связано с движением энергии в деформируемой среде.

Проекции вектора плотности потока энергии на координатные оси имеют вид [9]

$$S_x = -[u_t \sigma_x + v_t \tau_{xy}], \quad S_y = -[u_t \tau_{xy} + v_t \sigma_y] \quad (2.1)$$

где u_t, v_t – производные компонент смещений по времени.

Компоненты напряжений для рассматриваемого случая выражаются через производные компонент смещений формулами

$$\sigma_x = \rho[au_x + (c-d)v_y], \quad \sigma_y = \rho[(c-d)u_x + bv_y], \quad \tau_{xy} = \rho d[u_y + v_x] \quad (2.2)$$

Из выражений (2.1) и (2.2) имеем

$$\begin{aligned} S_x &= -\rho\{u_t[au_x + (c-d)v_y] + v_t[d(u_y + v_x)]\} \\ S_y &= -\rho\{u_t[d(u_y + v_x)] + v_t[(c-d)u_x + bv_y]\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя значения производных функций (1.3) в формулы (2.3), получим следующие выражения проекций на координатные оси векторов плотности потоков энергии квазипродольных и квазипоперечных волн:

$$S_{xk} = \rho\theta p_k^{-1}(p_k - c\theta\lambda_k)^2 Q_k [w_k^1(\Omega_k)]^2 \quad (2.4)$$

$$S_{yk} = -\rho\lambda_k p_k^{-1}(p_k - c\theta\lambda_k)^2 M_k [w_k^1(\Omega_k)]^2$$

где

$$Q_k = 2ad\theta^2 + L\lambda_k^2 - (a+d), \quad M_k = 2bd\lambda_k^2 + L\theta^2 - (b+d) \quad (2.5)$$

Фазовые скорости волн (1.3), определяющие распространение фронтов волн в направлениях нормалей, выражаются формулами [7, 10]

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2} \quad (2.6)$$

Лучевые скорости волн (1.3), определяющие распространение фронтов волн в направлениях векторов плотности потоков энергии, связаны с фазовыми скоростями соотношениями [3]

$$b_k = (n_k \cdot c_k) \quad (2.7)$$

где c_k – векторы лучевых скоростей. Согласно соотношениям (2.6) и (2.7) лучевые скорости определяются формулами

$$c_k = [(\theta^2 + \lambda_k^2)^{1/2} \cos \varphi_k]^{-1} \quad (2.8)$$

где φ_k – углы, образованные векторами лучевых скоростей с векторами фазовых скоростей.

При любых направлениях распространения волн (1.3) лучевые и фазовые скорости удовлетворяют условиям $c_k \geq b_k$.

Обозначим углы, образованные векторами фазовых скоростей, лучевых скоростей и смещений частиц среды с отрицательной полуосью y , через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, которые согласно соотношениям (1.3) и (2.4) определяются по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \theta \lambda_k^{-1}, \quad \operatorname{tg} \beta_k = \theta Q_k (\lambda_k M_k)^{-1}, \quad \operatorname{tg} \gamma_k = (r_k - c \theta \lambda_k) (p_k - c \theta \lambda_k)^{-1} \quad (2.9)$$

Углы φ_k , образованные векторами лучевых скоростей с векторами фазовых скоростей, учитывая, что $\varphi_k = \beta_k - \alpha_k$, определяем формулой

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \theta \lambda_k (Q_k - M_k) (\theta^2 Q_k + \lambda_k^2 M_k)^{-1} \quad (2.10)$$

(углы отчитываются от нормалей к фронтам волн против хода часовой стрелки).

Закономерности движения энергии упругих волн определяются значениями N_1, N_2, K_2 и M , а также значениями

$$N_3 = (b-d)a - c^2, \quad N_4 = a-d-c, \quad N_5 = b-d-c, \quad N_6 = (a-d)^2 - c^2, \quad (2.11)$$

$$N_7 = (b-d)^2 - c^2$$

3. Анализ решений при $N_2 > 0, N_3 > 0$. При условии $N_2 > 0$ полученные решения однозначно определены на римановой поверхности, изображенной на фиг. 1. Так как оси x и y совпадают с осями упругой симметрии среды, рассматриваемые волновые процессы достаточно изучить при значениях θ на участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d^{-1/2} \quad (3.1)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 1).

На границах участков (3.1) компоненты векторов плотности потоков энергии (2.4) квазипродольных ($k=1$) и квазипоперечных ($k=2$) волн принимают значения

$$\begin{aligned} S_{x1}(0) &= 0, \quad S_{y1}(0) = -\rho(b-d)^2 b^{-3/2} [w_1^1(\Omega_1^0)]^2 \\ S_{x1}(a^{-1/2}) &= \rho(a-d)^2 a^{-3/2} [w_1^1(\Omega_1^*)]^2, \quad S_{y1}(a^{-1/2}) = 0 \\ S_{x2}(0) &= 0, \quad S_{y2}(0) = -\rho(b-d)^2 d^{-3/2} [w_2^1(\Omega_2^0)]^2 \\ S_{x2}(d^{-1/2}) &= \rho(a-d)^2 d^{-3/2} [w_2^1(\Omega_2^*)]^2, \quad S_{y2}(d^{-1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Omega_1^0 = t + b^{-1/2} y, \quad \Omega_1^* = t - a^{-1/2} x, \quad \Omega_2^0 = t + d^{-1/2} y, \quad \Omega_2^* = t - d^{-1/2} x$$

Следовательно, векторы плотности потоков энергии квазипродольных ($k = 1$) и квазипоперечных ($k = 2$) волн при $\theta = 0$ направлены по отрицательной полуоси y , а при $\theta = a^{-1/2}$ и $\theta = d^{-1/2}$ – по положительной полуоси x .

Функции λ_1 и λ_2 на соответствующих участках (3.1) непрерывно убывают в интервалах [8]

$$b^{-1/2} \geq \lambda_1 \geq 0, \quad d^{-1/2} \geq \lambda_2 \geq 0 \quad (3.3)$$

Функции p_k, r_k ($k = 1, 2$) на соответствующих участках (3.1) удовлетворяют условиям

$$p_1 < 0, \quad r_1 < 0, \quad p_2 > 0, \quad r_2 > 0 \quad (3.4)$$

На границах участков (3.1) функции Q_k и M_k принимают значения

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= -R_2 b^{-1}, \quad Q_1(a^{-1/2}) = -(a-d), \quad M_1(0) = -(b-d) \\ M_1(a^{-1/2}) &= -R_1 a^{-1}, \quad Q_2(0) = N_3 d^{-1}, \quad Q_2(d^{-1/2}) = (a-d) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$M_2(0) = (b-d), \quad M_2(d^{-1/2}) = N_2 d^{-1}, \quad R_1 = (a-d)d + c^2, \quad R_2 = (b-d)d + c^2$$

Производные функции Q_k и M_k имеют вид

$$Q_{k\theta} = \theta A_k (bd)^{-1}, \quad M_{k\theta} = 2\theta B_k, \quad D = [K_1 K_2 \theta^4 - 2M\theta^2 + (b-d)^2]^{1/2} \quad (3.6)$$

$$A_k = -K_1 K_2 + (-1)^k L (K_1 K_2 \theta^2 - M) D^{-1}, \quad B_k = (-1)^k (K_1 K_2 \theta^2 - M) D^{-1}$$

Функция D с точностью до положительного постоянного множителя представляет собой внутренний радикал в выражении (1.4), который на участках (3.1) положителен.

На границах участков (3.1) функции A_k и B_k принимают значения

$$\begin{aligned} A_1(0) &= -F_3, \quad A_1(a^{-1/2}) = -a(b+d)R_1^{-1}F_4, \quad A_2(0) = -F_5 \\ A_2(d^{-1/2}) &= d(b+d)N_2^{-1}F_4, \quad B_1(0) = (b-d)^{-1}M \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$B_1(a^{-1/2}) = -R_1^{-1}F_1, \quad B_2(0) = -(b-d)^{-1}M, \quad B_2(d^{-1/2}) = N_2 F_2,$$

где

$$F_1 = K_1 K_2 - aM, \quad F_2 = K_1 K_2 - dM, \quad F_3 = K_1 K_2 - (b-d)^{-1}LM \quad (3.8)$$

$$F_4 = K_1 K_2 - (b+d)^{-1}LM, \quad F_5 = K_1 K_2 + (b-d)^{-1}LM$$

Можно показать, что при $N_2 > 0$ коэффициенты при M в выражениях (3.8) удовлетворяют условиям

$$a > (b-d)^{-1}L > (b+d)^{-1}L > d \quad (3.9)$$

если

$$R_3 = (c^2 - d^2) - ad > 0 \quad (3.10)$$

При $R_3 < 0$ в условиях (3.9) $(b-d)^{-1}L > a$.

Выражения (3.8) приводятся к виду

$$\begin{aligned} F_1 &= bdN_6 - (c^2 - d^2)N_1, \quad F_2 = [(ab - c^2) + (a-d)d]N_1 + d^2N_6 \\ F_3 &= 2d(b-d)^{-1}[(c^2 - d^2)N_1 - adN_7], \quad F_4 = 2bd[aN_1 + dN_6](b+d)^{-1} \\ F_5 &= 2b(b-d)^{-1}\{[(ab - c^2) + (b-d)d]N_1 + d^2N_7\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Производные функции A_k и B_k с точностью до постоянного множителя $L > 0$ имеют одинаковые значения:

$$A_{k\theta} = LB_{k\theta} = (-1)^k 8bdc^2 LN_1 \theta D^{-3/2} \quad (3.12)$$

При $N_2 > 0, N_3 > 0$ значение N_1 может иметь разные знаки.

Случай 1. При $N_1 > 0$ производные (3.12) удовлетворяют условиям

$$A_{i\theta} < 0, \quad B_{i\theta} < 0, \quad A_{2\theta} > 0, \quad B_{2\theta} > 0 \quad (3.13)$$

Учитывая условия (1.2), из равенства

$$(b-d)^2 K_1 K_2 - M^2 = 4bdc^2 N_1 \quad (3.14)$$

заклучим, что $K_2 > 0$. При $N_1 > 0$, значения N_4 и N_5 могут иметь одинаковые (положительные) знаки или противоположные.

Случай 1а. Если $N_4 > 0$ и $N_5 > 0$, то $N_6 > 0, N_7 > 0$, и согласно выражениям (3.11) $F_i > 0$ при $i = 2, 4, 5$, а F_1 и F_3 могут принимать положительные и отрицательные значения. Из равенств (1.5) следует, что $M > 0$.

При $M > 0, K_2 > 0, R_3 > 0$ согласно условиям (3.9) возможны следующие комбинации распределения значений F_i :

$$\begin{aligned} F_1 < 0, \quad F_5 > F_2 > F_4 > F_3 > 0 \\ F_5 > F_2 > F_4 > F_3 > F_1 > 0 \\ F_1 < F_3 < 0, \quad F_5 > F_2 > F_4 > 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

При выполнении первой комбинации условий (3.15) согласно выражениям (3.7) имеем

$$\begin{aligned} A_1(0) < 0, \quad A_1(a^{-1/2}) < 0, \quad B_1(0) > 0, \quad B_1(a^{-1/2}) > 0 \\ A_2(0) < 0, \quad A_2(d^{-1/2}) > 0, \quad B_2(0) < 0, \quad B_2(d^{-1/2}) > 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из соотношений (3.13) и (3.16) следует, что на участках (3.1) функции A_k и B_k удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} A_1(\theta) < 0, \quad B_1(\theta) > 0, \quad A_2(\theta) < 0 \quad (\theta < \theta_{12}^*), \quad A_2(\theta) > 0 \quad (\theta > \theta_{12}^*) \\ B_2(\theta) < 0 \quad (\theta < \theta_2^*), \quad B_2(\theta) > 0 \quad (\theta > \theta_2^*) \end{aligned} \quad (3.17)$$

где θ_{12}^* и θ_2^* – нули функций $A_2(\theta)$ и $B_2(\theta)$.

Из соотношений (3.6) и (3.17) следует, что производные функций Q_k и M_k на участках (3.1) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} Q_{1\theta} < 0, \quad M_{1\theta} > 0, \quad Q_{2\theta} < 0 \quad (\theta < \theta_{12}^*), \quad Q_{2\theta} > 0 \quad (\theta > \theta_{12}^*) \\ M_{2\theta} < 0 \quad (\theta < \theta_2^*), \quad M_{2\theta} > 0 \quad (\theta > \theta_2^*) \end{aligned} \quad (3.18)$$

На границах участков (3.1) согласно выражениям (3.5) функции Q_1 и M_1 имеют отрицательные значения, Q_2 и M_2 – положительные значения.

Функции Q_2 и M_2 соответственно в точках θ_{12}^* и θ_2^* имеют минимум. Из уравнений $A_2(\theta_{12}^*) = 0$ и $B_2(\theta_2^*) = 0$ экстремальные точки можно представить выражениями

$$\theta_{12}^* = [M(K_1 K_2)^{-1} + L^{-1} D_{12}^*]^{1/2}, \quad \theta_2^* = [M(K_1 K_2)^{-1}]^{1/2} \quad (3.19)$$

D_{12}^* – значение функции D , определяемой выражением (3.6) при θ_{12}^* , причем $D_{12}^* > 0$.

Так как функция B_2 в точке $\theta = a^{-1/2}$ меньше нуля, то согласно выражениям (3.19) имеем следующее распределение экстремальных точек на вещественной оси θ :

$$a^{-1/2} < \theta_2^* < \theta_{12}^* < d^{-1/2} \quad (3.20)$$

Минимальные значения функций Q_2 и M_2 удовлетворяют условиям

$$Q_2(\theta_{12}^*) = 2adL^{-1}D_{12}^* > 0, \quad M_2(\theta_2^*) = D_{12}^* > 0 \quad (3.21)$$

Из соотношений (3.5), (3.18)–(3.21) следует, что функции Q_1 и M_1 на первом участке (3.1) имеют отрицательные значения, функция Q_1 – непрерывно убывающая, функция M_1 – непрерывно возрастающая. На втором участке (3.1) Q_2 и M_2 – положительные функции, принимающие минимальные значения в точках θ_{12}^* и θ_2^* , удовлетворяющих условию (3.20).

Так как на границах участков (3.1) разности значений (3.5) функций Q_k и M_k

$$\begin{aligned} |M_1(0) - |Q_1(0)| &= b^{-1}N_7, & |Q_1(a^{-1/2})| - |M_1(a^{-1/2})| &= a^{-1}N_6 \\ Q_2(0) - M_2(0) &= d^{-1}N_1, & M_2(d^{-1/2}) - Q_2(d^{-1/2}) &= d^{-1}N_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

больше нуля, то графики функции Q_k и M_k пересекаются и имеют вид, изображенный на фиг. 3,а. Точки пересечения определяются условиями $Q_k(\tilde{\theta}_k) = M_k(\tilde{\theta}_k)$ и имеют координаты

$$\tilde{\theta}_1 = [(b-d-c)K_2^{-1}]^{1/2}, \quad \tilde{\theta}_2 = [(b-d+c)K_1^{-1}]^{1/2} \quad (3.23)$$

Значения функций Q_k и M_k в точках пересечения графиков определяются выражениями

$$Q_1(\tilde{\theta}_1) = M_1(\tilde{\theta}_1) = -c, \quad Q_2(\tilde{\theta}_2) = M_2(\tilde{\theta}_2) = c \quad (3.24)$$

Было установлено [10], что при $N_4 > 0$, $N_5 > 0$ фазовые скорости квазипродольных волн принимают минимальные значения в точках $\tilde{\theta}_1$, квазипоперечных волн – максимальные значения в точках $\tilde{\theta}_2$. Следовательно, точки пересечения графиков Q_k и M_k соответствуют волнам с экстремальными фазовыми скоростями.

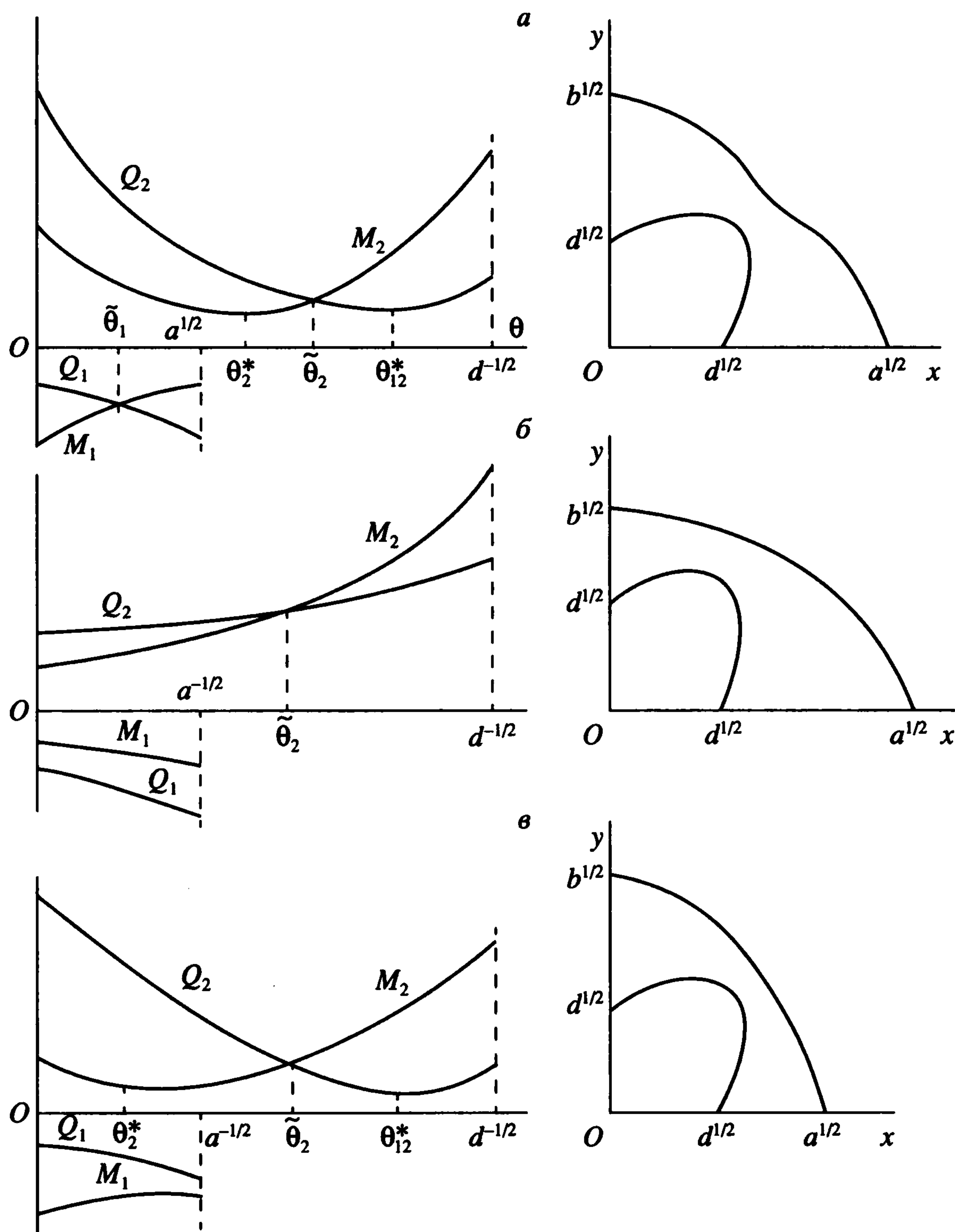
Если $F_1 > 0$, то согласно соотношениям (3.8) и (3.9) выполняется второе условие (3.15). Повторяя рассуждения, проведенные для первой комбинации условий (3.15), получим условия для производных функций Q_k и M_k , отличающиеся от условий (3.18) лишь тем, что условие $M_{1\theta} > 0$ меняется на

$$M_{1\theta} > 0 \quad (\theta_1 < \theta_1^*), \quad M_{1\theta} < 0 \quad (\theta > \theta_1^*) \quad (3.25)$$

Экстремальные точки, определяемые выражениями (3.19), удовлетворяют условию

$$\theta_1^* = \theta_2^* < a^{-1/2} < \theta_{12}^* < d^{-1/2} \quad (3.26)$$

Отсюда и из выражений (3.5) и (3.22) следует, что графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 3,а. График функции M_1 отличается тем, что в точке θ_1^* он имеет максимум $M_1(\theta_1^*) = -D_1^* < 0$; в отличие от распределения (3.20) экстремальные точки (3.19) удовлетворяют условию (3.26).



Фиг. 3

Если $F_3 < 0$, то согласно соотношениям (3.8) и (3.9) выполняется третье условие (3.15). Производные функций Q_k и M_k удовлетворяют условиям, отличающимся от условий (3.18) заменой первого условия на

$$Q_{1\theta} > 0 \quad (\theta < \theta_{11}^*), \quad Q_{1\theta} < 0 \quad (\theta > \theta_{11}^*) \tag{3.27}$$

Экстремальные точки (3.19) удовлетворяют условию

$$\theta_{11}^* < a^{-1/2} < \theta_2^* < \theta_{12}^* < d^{-1/2} \tag{3.28}$$

Отсюда и из выражений (3.5) и (3.22) следует, что графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 3,а, график функции Q_1 отличается наличием в точке

$$\theta_{11}^* \text{ максимума } Q_1(\theta_{11}^*) = -2adL^{-1} D_{11}^* < 0.$$

При $R_3 < 0$ условия (3.9) и (3.15) изменяются незначительно: в условии (3.9) имеем $(b-d)^{-1}L > a$, в условиях (3.15) $F_3 < F_1$. Можно показать, что и в этих случаях графики функций Q_k и M_k имеют вид, аналогичный графикам на фиг. 3,а.

Таким образом, при $N_4 > 0$ и $N_5 > 0$ функции Q_k и M_k , определенные на участках (3.1), удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$M_1 < Q_1 < 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_1), \quad Q_1 < M_1 < 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_1) \quad (3.29)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$

$$Q_2 > M_2 > 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_2), \quad M_2 > Q_2 > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (3.30)$$

На участках (3.1) углы α_1 и α_2 , определяющие направления векторов фазовых скоростей квазипродольных ($k=1$) и квазипоперечных ($k=2$) волн (1.3), согласно соотношениям (2.9) и (3.3) монотонно возрастают.

При движении волн (1.3) в направлениях осей упругой симметрии среды y и x направления векторов фазовых и лучевых скоростей и смещений частиц среды согласно соотношениям (2.9) и (2.10) определяются углами:

при $\theta = 0$

$$\alpha_k = \beta_k = \varphi_k = 0 \quad (k=1,2), \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pi/2 \quad (3.31)$$

при $\theta = a^{-1/2}$ и $\theta = d^{-1/2}$

$$\alpha_k = \beta_k = \pi/2, \quad \varphi_k = 0, \quad \gamma_1 = \pi/2, \quad \gamma_2 = 0 \quad (3.32)$$

Из соотношений (3.31) и (3.32) следует, что в этом случае направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн и векторов смещений частиц среды квазипродольных волн совпадают с направлениями нормалей к фронтам волн. Направления векторов смещений квазипоперечных волн совпадают с фронтами волн. Следовательно, в направлениях осей упругой симметрии квазипродольные и квазипоперечные волны переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

Для волн (1.3) с экстремальными фазовыми скоростями (фиг. 3,а) при значениях $\theta = \tilde{\theta}_k$, определяемых формулами (3.23) и соответствующих точкам пересечения графиков функций Q_k и M_k (фиг. 3,а), направления векторов фазовых и лучевых скоростей и смещений частиц среды определяются следующими углами:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma}_1 = \arctg(N_5 N_4^{-1})^{1/2}, \quad \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 = 0 \\ \tilde{\alpha}_2 &= \tilde{\beta}_2 = \arctg(N_9 N_8^{-1})^{1/2}, \quad \tilde{\gamma}_2 = \pi/2 + \tilde{\alpha}_2 \\ N_8 &= a-d+c, \quad N_9 = b-d+c \end{aligned} \quad (3.33)$$

Из соотношений (3.33) следует, что квазипродольные и квазипоперечные волны в направлениях $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$, не являющихся направлениями осей упругой симметрии среды, как и в направлениях осей симметрии, переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны, так как векторы фазовых и лучевых скоростей квазипродольной и квазипоперечной волны и вектор смещений частиц среды квазипродольной волны совпадают с нормальными к фронтам волн, а вектор смещений квазипоперечной волны совпадает с фронтом волны.

Из формул (2.9) и (2.10) и условий (3.29) и (3.30) имеем следующие условия для направлений векторов фазовых и лучевых скоростей:

на участках $(0, \tilde{\theta}_1)$ и $(0, \tilde{\theta}_2)$

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \tilde{\alpha}_1, \quad \varphi_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2 < \tilde{\alpha}_2, \quad \varphi_2 > 0 \quad (3.34)$$

на участках $(\tilde{\theta}_1, a^{-1/2})$ и $(\tilde{\theta}_2, d^{-1/2})$

$$\tilde{\alpha}_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 > 0, \quad \tilde{\alpha}_2 < \beta_2 < \alpha_2 < \pi/2, \quad \varphi_2 < 0 \quad (3.35)$$

Фазовая скорость квазипродольной волны в направлении $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$ имеет минимальное значение, фазовая скорость квазипоперечной волны в направлении $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$ имеет максимальное значение. Из условий (3.34) и (3.35) следует, что векторы лучевых скоростей (потоков энергии) отклоняются от направлений нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей. Это свойство потоков энергии объясняет причину образования остроугольных кромок в направлениях $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$ на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников в средах, для которых $N_4 > 0$, $N_5 > 0$ при выполнении соответствующего условия [7], условия (2.8), так как с физической точки зрения векторы плотности потоков энергии определяют направления распространения фронтов волн. Например, если в начальный момент времени возбуждена квазипоперечная волна с овальным фронтом, на участках фронта, прилегающих к направлению $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$ с максимальной фазовой скоростью, векторы плотности потоков энергии отклоняются от нормалей к фронту волны в сторону направлений $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$, образуя остроугольные кромки ([7], фиг. 2).

Случай 16. Если $N_4 > 0$, $N_5 < 0$ при $N_1 > 0$, то

$$a > b, \quad N_6 > 0, \quad N_7 < 0, \quad K_2 > 0 \quad (3.36)$$

Значение M согласно формулам (1.5) может иметь разные знаки.

При $K_2 > 0$, $M < 0$ согласно выражениям (3.8) $F_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), F_5 может иметь разные знаки.

Если $F_5 < 0$, повторяя рассуждения, выполненные для первой комбинации условий (3.15), получим

$$Q_{1\theta} < 0, \quad M_{1\theta} < 0, \quad Q_{2\theta} > 0, \quad M_{2\theta} > 0 \quad (3.37)$$

Учитывая, что $N_6 > 0$, $N_7 < 0$, из соотношений (3.5), (3.22) и (3.37) заключаем, что графики функции Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 3,б. Функции Q_1 и M_1 – отрицательные непрерывно убывающие функции: удовлетворяющие условию $Q_1 < M_1$. Функции Q_2 и M_2 – положительные непрерывно возрастающие функции, удовлетворяющие условиям $Q_2 > M_2$ на участке $(0, \tilde{\theta}_2)$ и $M_2 > Q_2$ на участке $(\tilde{\theta}_2, d^{-1/2})$.

При $F_5 > 0$ приходим к условиям, отличающимся от (3.37) заменой третьего условия на

$$Q_{2\theta} < 0 \quad (\theta < \theta_{12}^*), \quad Q_{2\theta} > 0 \quad (\theta > \theta_{12}^*) \quad (3.38)$$

Отсюда следует, что графики Q_k и M_k несущественно отличаются от графиков на фиг. 3,б. Заметное отличие имеет только график функции Q_2 , имеющей положительный минимум в точке θ_{12}^* на участке $(\tilde{\theta}_2, d^{-1/2})$, условия для функций Q_2 и M_2 на участке $(0, d^{-1/2})$ не изменяются.

При $M > 0$ и $K_2 > 0$ согласно выражениям (3.8) $F_5 > 0$; из соотношений (3.14) и (3.36) следует, что $F_i > 0$ ($i = 2, 3, 4$), F_1 может иметь разные знаки. Согласно выражениям (3.9) при $F_1 < 0$ значения F_i удовлетворяют первому условию (3.15). В этом случае производные функций Q_k и M_k удовлетворяют условиям (3.18).

Учитывая неравенства (3.36), из соотношений (3.5), (3.18) и (3.22) заключаем, что графики функций Q_2 и M_2 имеют вид, показанный на фиг. 3,а, функции Q_2 и M_2 на участке $(0, d^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (3.30). Графики функций Q_1 и M_1 имеют вид, аналогичный графикам на фиг. 3,б, на участке $(0, a^{-1/2})$ выполняется условие

$$Q_1 < M_1 < 0 \quad (3.39)$$

Можно показать, что при $F_1 > 0$ имеем аналогичную картину.

Таким образом, при $N_1 > 0$, $N_4 > 0$ и $N_5 < 0$ функции Q_k и M_k удовлетворяют на участке $(0, a^{-1/2})$ условию (3.39), на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.30).

В этом случае [10] фазовые скорости квазипродольных волн внутри участка $(0, a^{-1/2})$ не имеют экстремальных значений, фазовые скорости квазипоперечных волн внутри участка $(0, d^{-1/2})$ имеют максимум при значении $\theta = \tilde{\theta}_2$. Фазовая скорость квазипродольной волны имеет минимум при $\theta = 0$ в направлении $\alpha_1 = 0$, максимум – при $\theta = a^{-1/2}$ в направлении $\alpha_1 = \pi/2$ (фиг. 3,б).

Согласно соотношениям (2.9), (2.10), (3.39) и (3.30) направления векторов фазовых и лучевых скоростей удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 > 0 \quad (3.40)$$

на участках $(0, \tilde{\theta}_2)$ и $(\tilde{\theta}_2, d^{-1/2})$

$$0 < \alpha_2 < \beta_2 < \tilde{\alpha}_2, \quad \varphi_2 > 0, \quad \tilde{\alpha}_2 < \beta_2 < \alpha_2 < \pi/2, \quad \varphi_2 < 0 \quad (3.41)$$

Отсюда следует, что векторы лучевых скоростей отклоняются от нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей.

Случай 1в. Если $N_4 < 0$, $N_5 > 0$ при $N_1 > 0$, имеем

$$b > a, \quad N_6 < 0, \quad N_7 > 0, \quad K_2 > 0, \quad M > 0 \quad (3.42)$$

В этом случае при $N_1 > |N_6|$ из соотношений (3.11) следует, что $F_i > 0$ ($i = 2, 4, 5$), $F_1 < 0$, F_3 может иметь разные знаки; для значений F_i могут выполняться первый и третий набор условий (3.15).

При выполнении первого набора условий (3.15) производные функций Q_k и M_k удовлетворяют условиям (3.18). Учитывая неравенства (3.42), из соотношений (3.5), (3.18) и (3.22) заключаем, что функции Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 3,в.

При выполнении третьего набора условий (3.15) производные функций Q_k и M_k удовлетворяют условиям (3.27). Из соотношений (3.5), (3.27) и (3.22) при учете неравенств (3.42) следует, что графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 3,в. Непринципиальное отличие имеет график функции Q_1 , имеющей максимум отрицательного знака в точке θ_{11}^* на участке $(0, a^{-1/2})$.

Следовательно, при $N_4 < 0$, $N_5 > 0$ в случае $N_1 > 0$ функции Q_k и M_k на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям

$$M_1 < Q_1 < 0 \quad (3.43)$$

а на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.30).

В данном случае [10] фазовые скорости квазипродольных волн внутри участка $(0, a^{-1/2})$ не имеют экстремальных значений; максимальное значение достигается при $\theta = 0$ в направлении $\alpha_1 = 0$, минимальное – при $\theta = a^{-1/2}$ в направлении $\alpha_1 = \pi/2$ (фиг. 3,в). Фазовые скорости квазипоперечных волн, как в предыдущих случаях, имеют максимальные значения при $\theta = \tilde{\theta}_2$ в направлении $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$, минимальные значения при $\theta = 0$ и $\theta = d^{-1/2}$ в направлениях $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \pi/2$.

Из соотношений (2.9), (2.10), (3.42) и (3.30) следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн в отличие от предыдущих случаев удовлетворяют условиям

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 < 0 \quad (3.44)$$

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн, как и в предыдущих случаях, удовлетворяют условиям (3.41).

Случай 2. При $N_1 < 0$ производные в соотношениях (3.12) удовлетворяют условиям (3.13) с противоположными знаками неравенств.

При $N_1 < 0$ возможны три комбинации значений N_4 и N_5 .

Случай 2а. Если $N_4 < 0$ и $N_5 < 0$, то выполняются условия

$$N_1 < 0, \quad N_6 < 0, \quad N_7 < 0, \quad K_2 < 0, \quad M < 0 \quad (3.45)$$

Из соотношений (3.8), (3.11) и неравенств (3.45) имеем: $F_i < 0$ ($i = 2, 4, 5$), значения F_1 и F_3 могут иметь разные знаки. При $K_2 < 0, M < 0$ согласно соотношениям (3.8) и (3.9) возможны следующие комбинации распределения значений F_i :

$$\begin{aligned} F_1 > 0, \quad F_5 < F_2 < F_4 < F_3 < 0 \\ F_1 > F_3 > 0, \quad F_5 < F_2 < F_4 < 0 \\ F_5 < F_2 < F_4 < F_3 < F_1 < 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Повторяя рассуждения, изложенные при анализе случая 1а, при выполнении первого набора условий (3.46) получим следующие условия для производных функций Q_k и M_k :

$$\begin{aligned} Q_{1\theta} > 0, \quad M_{1\theta} < 0, \quad Q_{2\theta} > 0 \quad (\theta < \theta_{12}^*), \quad Q_{2\theta} < 0 \\ (\theta > \theta_{12}^*), \quad M_{2\theta} > 0 \quad (\theta < \theta_2^*), \quad M_{2\theta} < 0 \quad (\theta > \theta_2^*) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Из соотношений (3.5) и (3.22) и неравенств (3.47) следует, что при выполнении первого набора условий (3.46) графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 4, а. Можно показать, что вид графиков функций Q_k и M_k при выполнении второго и третьего набора условий (3.46) аналогичен, за исключением имеющих минимум в точках θ_1^* и θ_{11}^* соответственно графиков функции Q_1 в случае второго набора условий и функции M_1 в случае третьего набора условий (3.46).

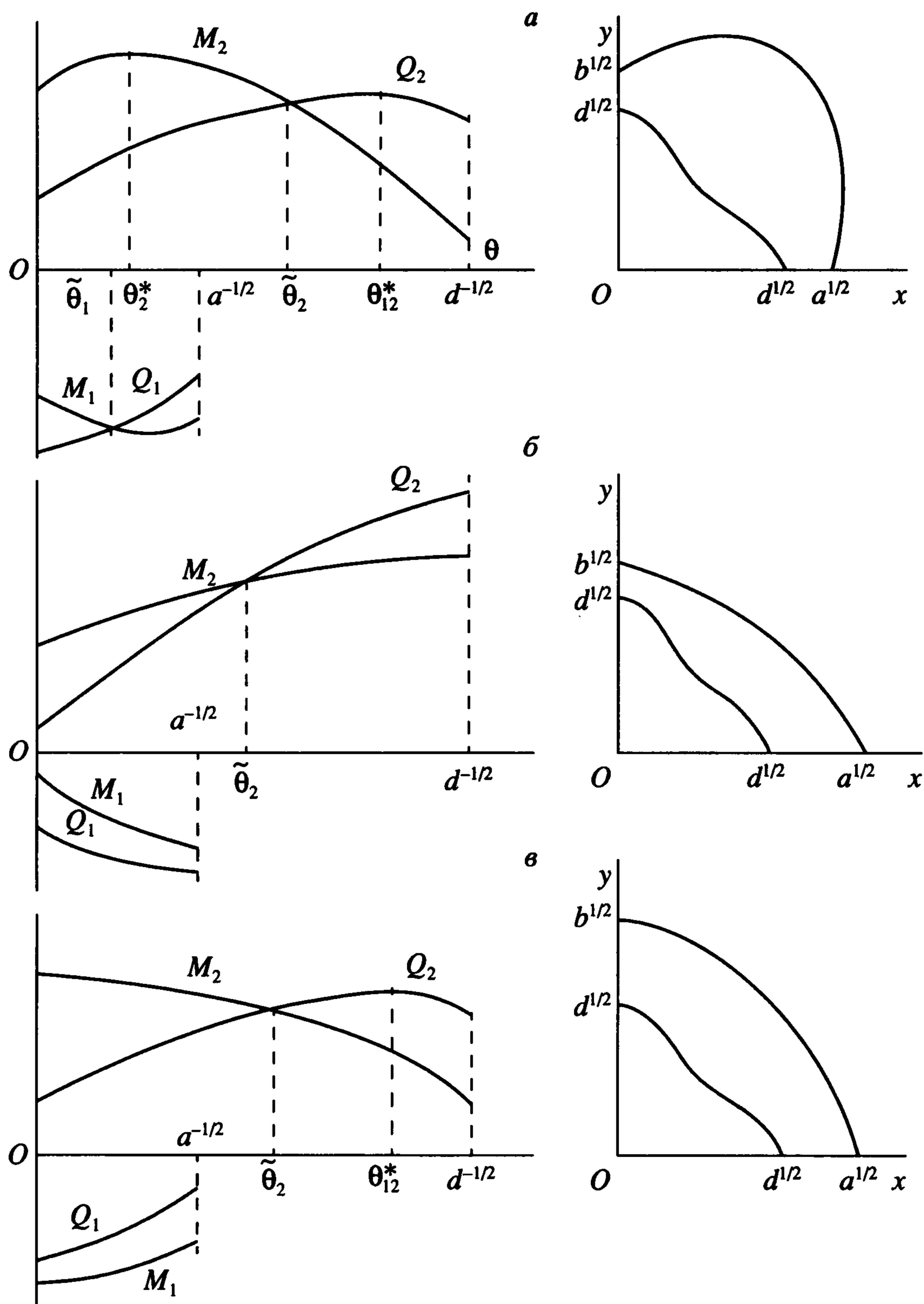
Таким образом, при $N_4 < 0$ и $N_5 < 0$ на участках (3.1) функции Q_k и M_k удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$Q_1 < M_1 < 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_1), \quad M_1 < Q_1 < 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_1) \quad (3.48)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$

$$M_2 > Q_2 > 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_2), \quad Q_2 > M_2 > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (3.49)$$



Фиг. 4

Ранее [9] установлено, что при выполнении условий $N_4 < 0$ и $N_5 < 0$ внутри участков (3.1) фазовые скорости квазипродольных волн имеют максимум при значениях $\theta = \tilde{\theta}_1$, квазипоперечных волн – минимум при значениях $\theta = \tilde{\theta}_2$, определяемых формулами (3.23). Экстремальным точкам соответствуют точки пересечения графиков функций Q_k и M_k (фиг. 4,а).

Согласно соотношениям (3.31)–(3.33) квазипродольные и квазипоперечные волны в направлениях осей упругой симметрии среды y и x и в направлениях $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ с экстремальными фазовыми скоростями при $\theta = \tilde{\theta}_k$ переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

Согласно формулам (2.9) и (2.10) и условиям (3.48) и (3.49) имеем следующие условия для направлений векторов фазовых и лучевых скоростей:
на участке $(0, a^{-1/2})$

$$0 < \alpha_1 < \beta_1, \quad \tilde{\alpha}_1 < \alpha_1, \quad \varphi_1 > 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_1), \quad \tilde{\alpha}_1 < \beta_1 < \alpha_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 < 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_1) \quad (3.50)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$

$$0 < \beta_2 < \alpha_2 < \tilde{\alpha}_2, \quad \varphi_2 < 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_2), \quad \tilde{\alpha}_2 < \alpha_2 < \beta_2 < \pi/2, \quad \varphi_2 > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (3.51)$$

Из условий (3.50) и (3.51) следует, что здесь, как и в предыдущем случае, сохраняется свойство векторов лучевых скоростей (потоков энергии) отклоняться от направлений нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей.

Случай 2б. Если $N_4 > 0, N_5 < 0$ при $N_1 < 0$, то

$$a > b, \quad N_6 > 0, \quad N_7 < 0, \quad M < 0 \quad (3.52)$$

значение K_2 может иметь разные знаки.

В этом случае графики функций Q_k и M_k при $K_2 > 0$ имеют вид, изображенный на фиг. 4,б, а при $K_2 < 0$ они имеют аналогичный вид, принципиальные отличия имеют графики функций Q_2 и M_2 , имеющих максимумы в точках θ_2^* и θ_{12}^* .

Следовательно, при $N_4 > 0, N_5 < 0$ функций Q_k и M_k на участках (3.1) удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$Q_1 < M_1 < 0 \quad (3.53)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.49).

Было установлено [10], что при выполнении условий $N_1 < 0, N_4 > 0$ и $N_5 < 0$ фазовые скорости квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ непрерывно возрастают, фазовые скорости квазипоперечных волн имеют минимум на участке $(0, d^{-1/2})$ в точке $\tilde{\theta}_2$ (фиг. 4,б).

Согласно формулам (2.9), (2.10) и условиям (3.53), (3.49) направления векторов фазовых и лучевых скоростей удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 > 0 \quad (3.54)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.51).

Случай 2в. При $N_4 < 0, N_5 > 0$ и $N_1 < 0$ выполняются условия

$$b > a, \quad N_6 < 0, \quad N_7 > 0, \quad K_2 < 0 \quad (3.55)$$

Значение M может иметь разные знаки.

При $M > 0$ графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 4,в, а при $M < 0$ их вид меняется незначительно:

график функции M_1 имеет минимум в точке θ_1^* .

Следовательно, при $N_4 < 0, N_5 > 0$ и $N_1 < 0$ функции Q_k и M_k на участках (3.1) удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$M_1 < Q_1 < 0 \quad (3.56)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.49).

В этом случае согласно изложенному ранее [10] фазовые скорости квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ непрерывно убывают, фазовые скорости квазипоперечных волн на участке $(0, d^{-1/2})$ имеют минимум в точке $\tilde{\theta}_2$ (фиг. 4,в).

Из формул (2.9), (2.10) и условий (3.56), (3.49) следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \pi/2, \quad \varphi_1 < 0 \quad (3.57)$$

на участке $(0, d^{-1/2})$ – условиям (3.51).

Таким образом, результаты анализа показывают, что при выполнении условий $N_2 > 0$ и $N_3 > 0$ во всех рассмотренных выше случаях функции Q_k и M_k на участках (3.1) удовлетворяют неравенствам

$$Q_1 < 0, \quad M_1 < 0, \quad Q_2 > 0, \quad M_2 > 0 \quad (3.58)$$

Из соотношений (2.4), (3.4) и (3.58) следует

$$S_{x1} > 0, \quad S_{y1} < 0, \quad S_{x2} > 0, \quad S_{y2} < 0 \quad (3.59)$$

Следовательно, при $N_2 > 0, N_3 > 0$ проекции векторов плотности потоков энергии (2.4) квазипродольных ($k = 1$) и квазипоперечных ($k = 2$) волн (1.3), определенных на участках (3.1), имеют направления: S_{x1} и S_{x2} – вдоль оси x , S_{y1} и S_{y2} – вдоль отрицательной полуоси y .

4. Анализ решений при $N_2 > 0, N_3 < 0$. При $N_2 > 0$ решения определены на римановой поверхности, изображенной на фиг. 1. При $N_2 > 0$ и $N_3 < 0$ выполняются условия

$$a > b, \quad N_1 < 0, \quad N_7 < 0, \quad K_2 < 0, \quad M < 0 \quad (4.1)$$

Значение N_6 может иметь разные знаки.

Случай $N_6 < 0$. При $a > b$ имеем

$$|N_6| < |N_1| < |N_7|, \quad (c^2 - d^2) > ad > bd \quad (4.2)$$

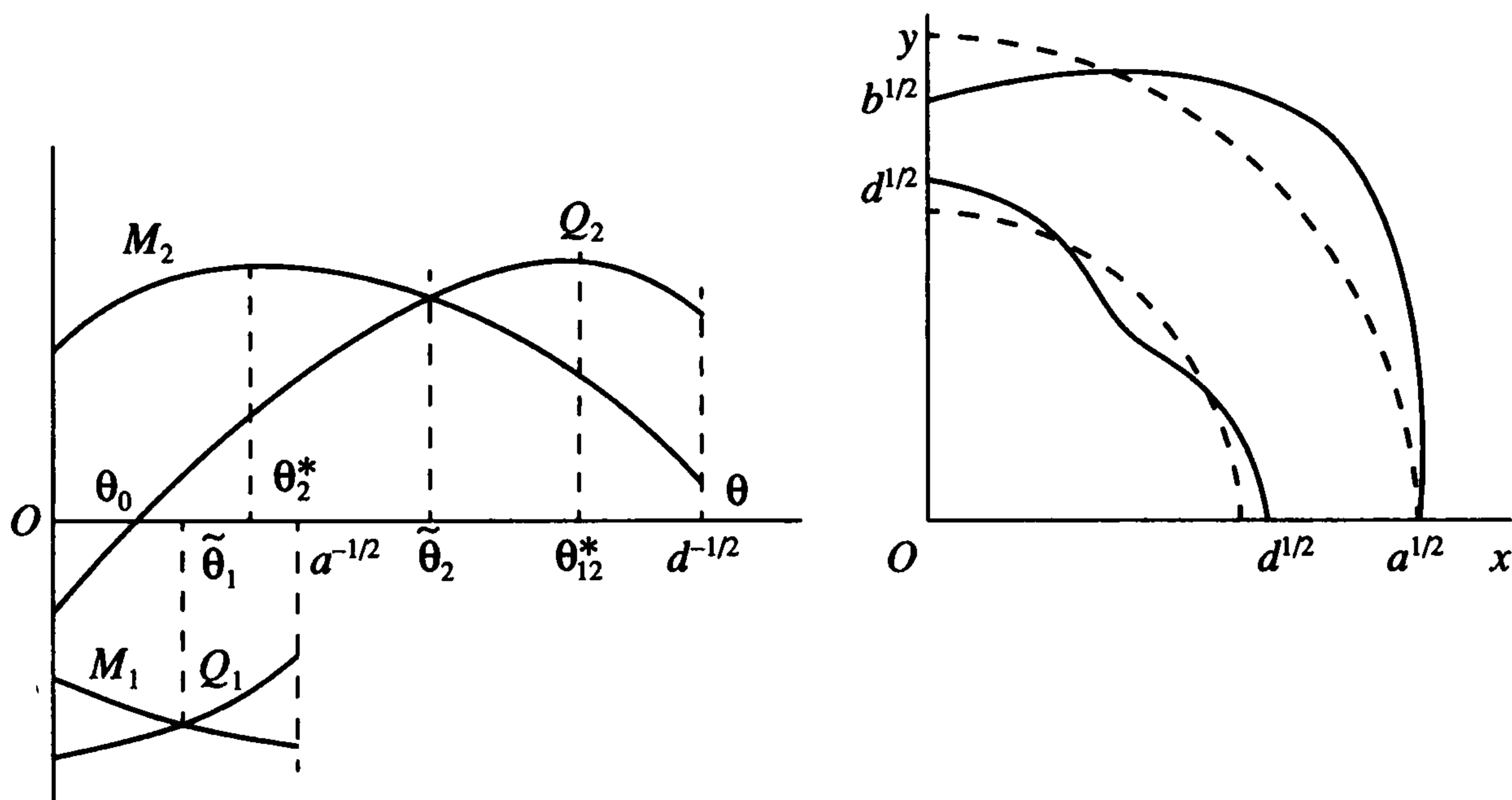
Из соотношений (3.11), (4.1) и (4.2) заключаем, что $F_1 > 0, F_i < 0$ ($i = 2, 4, 5$), F_3 может иметь разные знаки. Согласно соотношениям (3.8) и (3.9) значения F_i удовлетворяют при $F_3 < 0$ первому, а при $F_3 > 0$ – второму набору условий (3.46). При выполнении первого набора условий (3.46) производные функций Q_k и M_k удовлетворяют условиям (3.47).

Из соотношений (3.5), (3.22) и (3.47), учитывая, что $N_6 < 0, N_7 < 0$ и $N_3 < 0$, заключаем, что графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 5. Можно показать, что при выполнении второго набора условий (3.46) графики функций Q_k и M_k имеют аналогичный вид, отличается только график функции Q_1 , имеющей минимум в точке θ_{11}^* .

Следовательно, функции Q_k и M_k на участках (3.1) удовлетворяют условиям:
на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (3.48),
на участке $(0, d^{-1/2})$

$$Q_2 < 0, \quad M_2 > 0 \quad (\theta < \theta_0), \quad M_2 > Q_2 > 0 \quad (\theta_0 < \theta < \tilde{\theta}_2), \quad Q_2 > M_2 > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (4.3)$$

Из соотношений (2.9), (2.10) и (3.48), (4.3) следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн удовлетворяют условиям (3.50), квазипоперечных волн – условиям:



Фиг. 5

на участке $(0, \theta_0)$

$$\alpha_2 > 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \varphi_2 = -(\alpha_2 + |\beta_2|) < 0 \quad (4.4)$$

на участке $(\theta_0, d^{-1/2})$ – условиям (3.51).

На границах участка $(0, \theta_0)$ согласно формулам (2.9) и (2.10) при $k = 2$ углы, определяющие направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн, имеют следующие значения: $\alpha_2 = \beta_2 = \varphi_2 = 0$ при $\theta = 0$ и $\alpha_2 > 0, \beta_2 = 0, \varphi_2 = -\alpha_2$ при $\theta = \theta_0$.

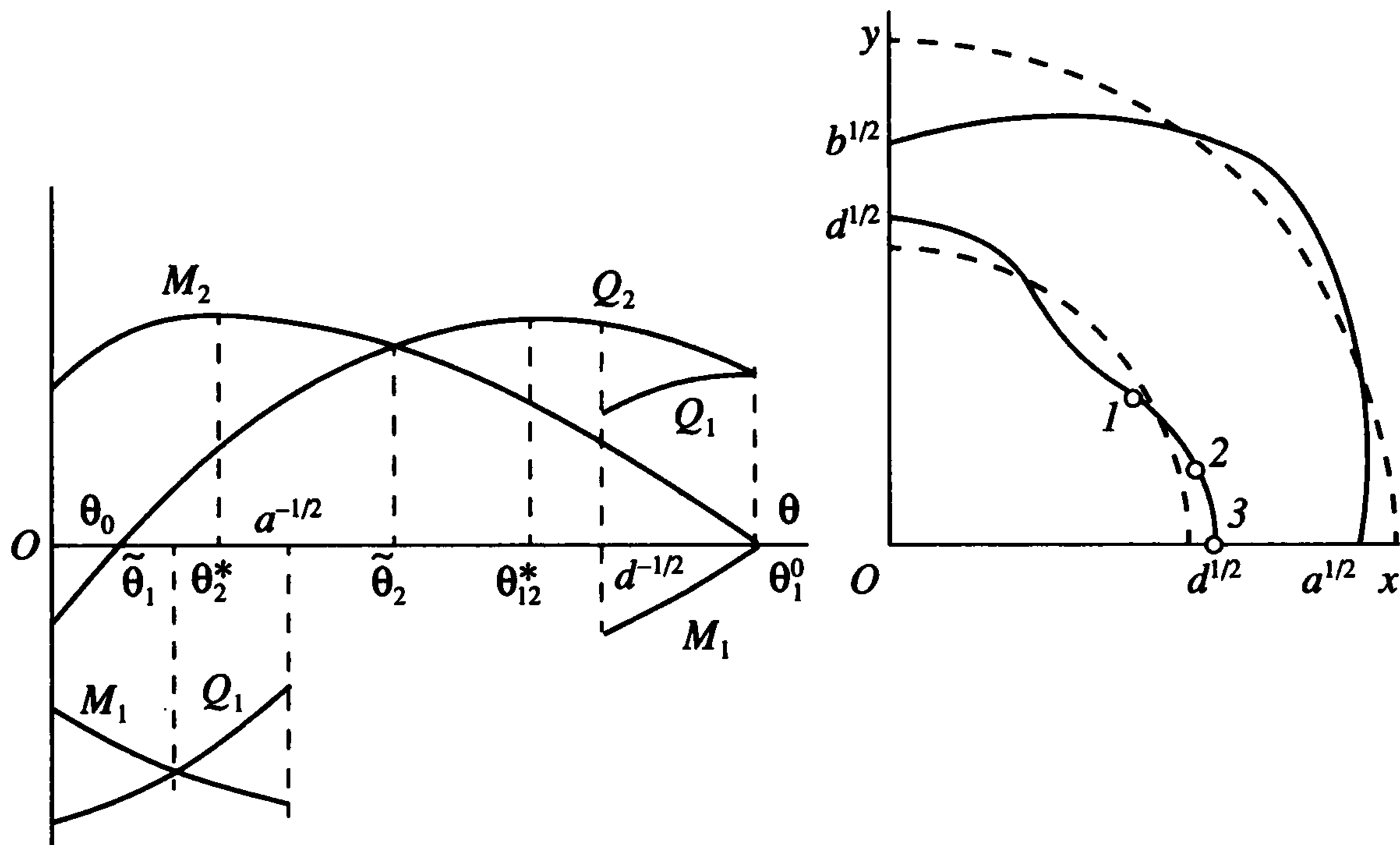
Следовательно, при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ векторы лучевой скорости квазипоперечных волн направлены по отрицательной полуоси y .

Из условий (4.4) следует, что квазипоперечные волны, определенные на участке $(0, \theta_0)$, в отличие от предыдущих случаев распространяются при положительных углах α_2 векторов фазовых скоростей с отрицательными значениями углов β_2 векторов лучевых скоростей. Эта особенность имеет прямую связь с существованием на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников остроугольных кромок, распространяющихся в направлении оси y при выполнении для упругих постоянных условий $N_3 < 0$ [7, 8], и является причиной образования остроугольных кромок.

Случай $N_6 > 0$. Повторяя рассуждения, изложенные при анализе случая 2б, и учитывая неравенство $N_3 < 0$, убеждаемся, что графики функций Q_1 и M_1 имеют вид, изображенный на фиг. 4,б, графики функций Q_2 и M_2 – вид, изображенный на фиг. 5. Следовательно, на участках (3.1) функции Q_1 и M_1 удовлетворяют условиям (3.53), функции Q_2 и M_2 – условиям (4.3). Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн удовлетворяют условиям (3.54), квазипоперечных волн на участке $(0, \theta_0)$ – условиям (4.4), на участке $(\theta_0, \tilde{\theta}_2)$ – первому набору условий (3.51), на участке $(\tilde{\theta}_2, d^{-1/2})$ – второму набору условий (3.51).

Из соотношений (2.4), (3.4), (3.48), (3.53) и (4.3) следует, что при $N_2 > 0, N_3 < 0$ на участках (3.1) проекции векторов плотности потоков энергии на координатные оси удовлетворяют условиям

$$S_{x1} > 0, \quad S_{y1} < 0, \quad S_{x2} < 0 \quad (\theta < \theta_0), \quad S_{x2} > 0 \quad (\theta > \theta_0), \quad S_{y2} < 0 \quad (4.5)$$



Фиг. 6

Отсюда следует, что в отличие от условий (3.59) при $N_2 > 0$, $N_3 > 0$ проекции S_{x2} векторов плотности потоков энергии квазипоперечных волн, определенных на участке $(0, \theta_0)$, направлены по отрицательной полуоси x . При $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ проекции $S_{x2} = 0$ вектора плотности потоков энергии направлены по отрицательной полуоси y .

5. Анализ решений при $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$. При $N_2 < 0$ решения определены на римановой поверхности, изображенной на фиг. 2. Волны (1.3), распространяющиеся в направлениях $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$, определены на следующих участках римановой поверхности [6]: квазипродольные ($k = 1$) – на участке $(0, a^{-1/2})$ верхнего берега разреза $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 , квазипоперечные при ($k = 2$) – на участке $(0, \theta_1^0)$ верхнего берега разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 , при ($k = 1$) – на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 .

Так как при $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$ выполняются условия $N_4 < 0$ и $N_5 < 0$, согласно полученным ранее результатам [10, 11] графики фазовых скоростей имеют вид, изображенный на фиг. 6. На графике фазовых скоростей квазипоперечных волн точками отмечены значения скоростей, соответствующие границам участков $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 2): 1 – точке $\theta = d^{-1/2}$ на плоскости θ_2 , 2 – точке разветвления θ_1^0 , 3 – точке $\theta = d^{-1/2}$ на плоскости θ_1 .

Согласно соотношениям (1.5) и (3.45) положительная вещественная точка разветвления внутреннего радикала функций (1.4) соответствует значению

$$\theta_1^0 = \{ [M - (-4bdc^2 N_1)^{1/2}] (K_1 K_2)^{-1} \}^{1/2} \quad (5.1)$$

На верхнем берегу разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 (фиг. 2) функции A_2 и B_2 определяются выражениями (3.6) при $k = 2$. При обходе по ходу часовой стрелки точки разветвления θ_1^0 с верхнего берега разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 на нижний берег

разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 функции A_2 и B_2 принимают значения A_1 и B_1 , определяемые выражениями (3.6) при $k = 1$. Аналогично функции Q_2 и M_2 , определяемые выражениями (2.5) при $k = 2$, при переходе с верхнего берега $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 на нижний берег разреза $(d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 принимают значения Q_1 и M_1 , определяемые выражениями (2.5) при $k = 1$.

Повторяя рассуждения, изложенные при анализе случая 1, и учитывая, что при $N_2 < 0, N_3 < 0$ выполняются условия (3.45), убеждаемся, что графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 6.

Следовательно, функции Q_k и M_k на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, \theta_1^0)$ верхних берегов разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и θ_2 и на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (3.48),

на участке $(0, \theta_1^0)$ – условиям (4.3),

на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$

$$Q_1 > 0, \quad M_1 < 0 \tag{5.2}$$

В точке $\tilde{\theta}_2$ имеем $Q_2 = M_2$, в точке разветвления θ_1^0 имеем $Q_2 = Q_1, M_2 = M_1 = 0$.

Согласно формулам (2.9) и (2.10) и соотношениям (3.48), (4.3) и (5.2) направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн ($k = 1$), определенных на участке $(0, a^{-1/2})$ плоскости θ_1 , и квазипоперечных волн, определенных при $k = 2$ на участке $(0, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 , при $k = 1$ на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 , удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (3.50),

на участке $(0, \theta_0)$ – условиям (4.4),

на участке (θ_0, θ_1^0) – условиям (3.51),

на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$

$$\beta_1 > \pi/2, \quad \pi/2 > \alpha_1 > \alpha_1(\theta_1^0) = \alpha_2(\theta_1^0), \quad \varphi_1 > 0 \tag{5.3}$$

Согласно соотношениям (4.4) квазипоперечные волны ($k = 2$), определенные на участке $(0, \theta_0)$, распространяются с положительными углами α_2 векторов фазовых скоростей при отрицательных значениях углов β_2 векторов лучевых скоростей, причем на границах участка $(0, \theta_0)$ углы $\beta_2 = 0$, т.е. направления векторов лучевых скоростей совпадают с направлением отрицательной полуоси y . Этим объясняется причина образования на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников остроугольных кромок, распространяющихся в направлении оси симметрии y при $N_3 < 0$ [7, 8].

Из соотношений (5.3) следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн (1.3), определенных при $k = 1$ на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 римановой поверхности, удовлетворяют условиям $\alpha_1 < \pi/2, \beta_1 > \pi/2$. На границах участка $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ углы β_1 имеют одинаковые значения $\pi/2$, сле-

довательно, в этих точках направления векторов лучевых скоростей квазипоперечных волн совпадают с направлением положительной полуоси x . Этим объясняется причина образования на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников остроугольных кромок, распространяющихся в направлении оси симметрии x при $N_2 < 0$ [7, 8].

При $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$, как и в предыдущих случаях, в направлениях осей упругой симметрии среды и в направлениях $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ с экстремальными фазовыми скоростями квазипродольные и квазипоперечные волны переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

Так как на участках $(0, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 выполняются соответственно условия $p_2 > 0$ и $p_1 > 0$, то согласно соотношениям (2.4), (4.3) и (5.2) проекции на координатные оси векторов плотности потоков энергии квазипоперечных волн (1.3) при $k = 2$ и $k = 1$ удовлетворяют условиям:

на участке $(0, \theta_1^0)$

$$S_{x2} < 0, \quad S_{y2} < 0 \quad (\theta < \theta_0), \quad S_{x2} > 0, \quad S_{y2} < 0 \quad (\theta > \theta_0) \quad (5.4)$$

на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$

$$S_{x1} > 0, \quad S_{y1} > 0 \quad (5.5)$$

Следовательно, при $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$, как и в предыдущем случае ($N_2 > 0, N_3 < 0$), направления проекций S_{x2} и S_{y2} векторов плотности потоков энергии квазипоперечных волн ($k = 2$), определенных на участке $(0, \theta_0)$ плоскости θ_2 , совпадают с направлениями отрицательных полуосей x и y . Направления проекций S_{x1} и S_{y1} векторов плотности потоков энергии квазипоперечных волн ($k = 1$), определенных на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 , в отличие от всех ранее рассмотренных случаев совпадают с направлениями положительных полуосей x и y .

6. Анализ решений при $N_2 < 0$ и $N_3 > 0$. В этом случае в отличие от предыдущего случая выполняются условия

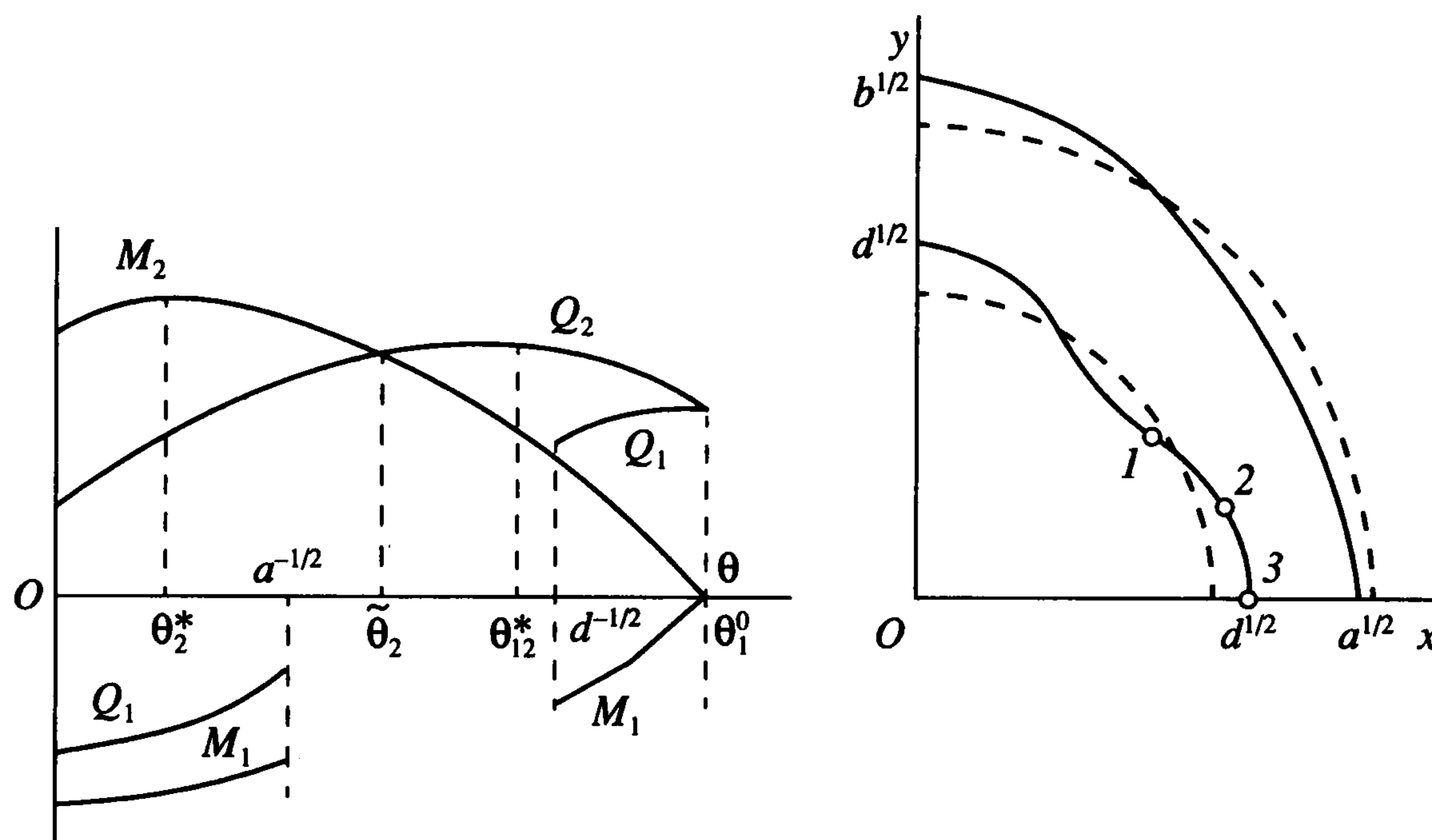
$$b > a, \quad N_1 < 0, \quad N_6 < 0, \quad M < 0, \quad K_2 < 0 \quad (6.1)$$

Значение N_7 может иметь разные знаки.

Если $N_7 > 0$, то при $N_2 < 0$ и $N_3 > 0$ согласно условиям (6.1) выполняются условия $N_1 < 0, N_4 < 0, N_5 > 0$. В этом случае графики фазовых скоростей и функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 7.

Согласно формулам (2.9) и (2.10) и графикам функций Q_k и M_k направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн удовлетворяют на участке $(0, a^{-1/2})$ условиям (3.57), на участке $(0, \theta_1^0)$ – условиям (3.51), на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условиям (5.3).

При $N_7 < 0$ выполняются условия $N_4 < 0, N_5 < 0$. В этом случае графики функций Q_1 и M_1 и фазовых скоростей квазипродольных волн, определенных на участке $(0, a^{-1/2})$, имеют вид, изображенный на фиг. 6. Графики функций Q_2 и M_2 , определенных на участке $(0, \theta_1^0)$, и функций Q_1 и M_1 , определенных на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$, и фазовых скоростей квазипоперечных волн имеют вид, изображенный на фиг. 7.



Фиг. 7

Следовательно, при $N_7 < 0$ направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн, определенных на участке $(0, a^{-1/2})$, и квазипоперечных волн, определенных на участках $(0, \theta_1^0)$ и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$, удовлетворяют на участке $(0, a^{-1/2})$ условиям (3.50), на участке $(0, \theta_1^0)$ – условиям (3.51), на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условиям (5.3).

При $N_2 < 0, N_3 > 0$ проекции на координатные оси векторов плотности потоков энергии квазипродольных волн удовлетворяют условиям (4.8); квазипоперечных волн на участке $(0, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 – условиям $S_{x2} > 0, S_{y2} < 0$, на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 – условиям (5.5).

Таким образом, задача изучения закономерностей движения энергии упругих волн в зависимости от направлений движения волн и соотношений упругих постоянных сред получила полное решение для всех реальных анизотропных сред рассматриваемого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипов И.О. Движение сейсмической энергии в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 2. С. 181–185.
2. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
3. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
4. Петрашень Г.И., Каштан Б.М. Элементарная теория распространения объемных волн в анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. С. 15–107.
5. Каштан Б.М., Ковтун А.А., Петрашень Г.И. Алгоритмы и методики вычисления полей объемных волн в произвольных анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. С. 108–247.

6. Осипов И.О. Обобщение метода функционально-инвариантных решений для динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1004–1019.
7. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
8. Осипов И.О. О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
9. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927 = Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ. 1935. 674 с.
10. Осипов И.О. Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
11. Осипов И.О. Отражение и преломление плоских продольных волн на границе жидкости и аномальной анизотропной среды // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 210–221.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
20.VII.2001