

УДК 539.3

© 2003 г. Е. М. Зверьев

**АНАЛИЗ ГИПОТЕЗ,  
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ БАЛОК И ПЛИТ**

Методом простых итераций с использованием асимптотических оценок по малому параметру строится решение двумерной задачи теории упругости для полосы и трехмерной – для плиты. В литературе эти задачи решаются путем сведения двумерной и трехмерной задач к одномерной и двумерной соответственно с помощью полуобратного метода Сен-Венана [1, 2]. Считается, что полученное полуобратным методом решение имеет погрешность порядка относительного размера малой области приложения самоуравновешенной нагрузки. Трактовка вводимых в полуобратном методе гипотез как выбор соответствующего начального приближения метода простых итераций позволяет формализовать процесс решения и дает оценку погрешности. Классическая теория балок и пластин дополняется решением типа пограничного слоя. Методика иллюстрируется решением задачи для полосы при приложении концентрированной нагрузки. Для прямоугольной плиты дополнительное решение совместно с решением бигармонического уравнения позволяет выполнить три граничных условия на каждой свободной торцевой поверхности.

**1. Задача изгиба полосы.** Начнем с рассмотрения статической антисимметричной задачи для длинной прямоугольной полосы. Отнесем ее к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $-l \leq x^* \leq l, -h \leq z^* \leq h$ , ( $l$  – половина длины полосы,  $h$  – половина ее высоты). Введем безразмерные координаты  $x = x^*/l, z = z^*/h$ , безразмерные перемещения  $u = u^*/h, w = w^*/h$  вдоль осей  $x^*, z^*$  соответственно и безразмерные напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^*/E, \sigma_z = \sigma_z^*/E, \tau = \tau^*/E$  (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой).

Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние полосы единичной ширины, запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1 + \nu)\tau, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}, & \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_x &= \varepsilon_x + \nu \sigma_z, & \varepsilon_z &= (1 - \nu^2)\sigma_z - \nu \varepsilon_x, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z, & \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр.

Решение системы (1.1) будем искать следующим образом. Положив в первом и втором уравнениях

$$w = w_0(x), \quad \tau = \tau_0(x) \tag{1.2}$$

в качестве известных величин нулевого приближения, вычисляем  $u_0$  и  $\sigma_{z0}$ . Затем вычисляем  $\varepsilon_{x0}$  и через соотношения упругости находим  $\sigma_{x0}$  и  $\varepsilon_{z0}$ . Подставляя их в два последних уравнения системы (1.1), получаем  $w_1$  и  $\tau_1$  в первом приближении. Процесс вычисления следующих приближений может быть продолжен.

Система (1.1) сводится к системе двух уравнений

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \varepsilon^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (1.3)$$

которую после двукратного интегрирования по  $z$  запишем в векторном виде

$$\mathbf{b} = A\mathbf{b} + \mathbf{c}z + \mathbf{d}$$

$$A = \iint_{00}^{zz} \begin{vmatrix} \varepsilon^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -(2 + \nu) \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \nu \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -(1 + \nu)^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} dz dz$$

$$\mathbf{b} = \{\tau, w\}, \quad \mathbf{c} = \{\partial \tau / \partial z, \partial w / \partial z\}_{z=0}, \quad \mathbf{d} = \{\tau, w\}_{z=0}$$

Решение векторного уравнения будем искать методом простых итераций

$$\mathbf{b}_{n+1} = A\mathbf{b}_n + \mathbf{c}z + \mathbf{d}$$

( $n$  – номер итерации).

Если оператор  $A$  – сжимающий, последовательность приближений  $\mathbf{b}_n$  сходится к точному решению уравнения при  $n \rightarrow \infty$  независимо от выбора начального приближения  $\mathbf{b}_0$ . Имеются многочисленные примеры применения метода простых итераций [3]. Очевидно, что описанная последовательность вычисления итераций исходя из системы (1.1) и исходя из системы (1.3) с последующим вычислением всех неизвестных опять исходя из системы (1.1) идентичны.

Из соображений удобства анализа начальное приближение (1.2) разделим на два

$$w = w_0(x), \quad \tau = \tau_0 = 0 \quad (1.4)$$

$$w = w_0 = 0, \quad \tau = \tau_0(x) \quad (1.5)$$

Процесс вычисления искомого неизвестного, исходя представления из (1.4), назовем  $w$ -процессом, тогда как из (1.5) –  $\tau$ -процессом.

Вычисление компонент напряженно-деформированного состояния дает:

в  $w$ -процессе

$$w = w_0(x), \quad \tau_0 = 0, \quad u_0 = -\varepsilon w_0' z, \quad \varepsilon_{x0} = -\varepsilon^2 w_0'' z, \quad \sigma_{z0} = 0 \quad (1.6)$$

$$\sigma_{x0} = -\varepsilon^2 w_0'' z, \quad \varepsilon_{z0} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z, \quad w_1 = \nu \varepsilon^2 w_0'' z^2 / 2, \quad \tau_1 = \varepsilon^3 w_0''' z^2 / 2$$

в  $\tau$ -процессе

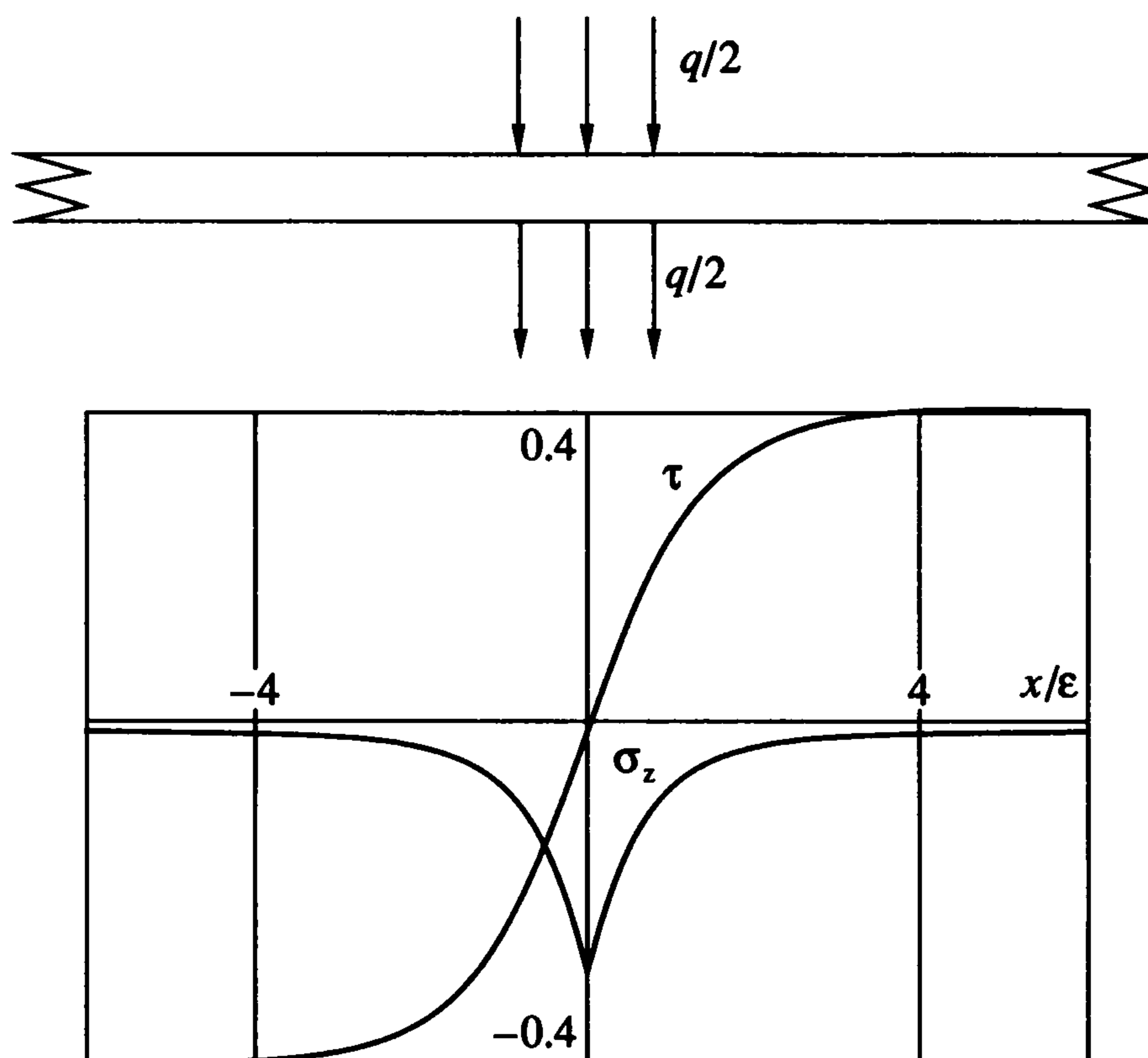
$$\tau = \tau_0(x), \quad w_0 = 0, \quad u_0 = 2(1 + \nu) \tau_0 z, \quad \sigma_{z0} = -\varepsilon \tau_0' z$$

$$\varepsilon_{x0} = 2(1 + \nu) \varepsilon \tau_0' z, \quad \sigma_{x0} = (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' z, \quad \varepsilon_{z0} = -(1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' z \quad (1.7)$$

$$w_1 = -(1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' z^2 / 2, \quad \tau_1 = -(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' z^2 / 2$$

Штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ .

Предположим, что  $w_0$  – медленно меняющаяся функция, а  $\tau_0$  – быстро меняющаяся. Это означает, что применение оператора  $d/dx$  к функции  $w_0$  в асимптотическом смысле равносильно умножению этой функции на  $\varepsilon^0$ , а применение к  $\tau_0$  равносильно увеличению в  $\varepsilon^{-1}$  раз. Первую функцию назовем функцией нулевой изменчивости, вторую – функцией единичной изменчивости.



Пусть продольные края полосы свободны от касательных напряжений. Тогда из выражений (1.6) и (1.7) вытекает, что при  $z = \pm 1$  сумма касательных напряжений  $w$ -процесса и  $\tau$ -процесса дает уравнение

$$\epsilon^3 w_0''' / 2 - \epsilon^2 \tau_0'' / k^2 + \tau_0 = 0, \quad k^2 = 2 / (2 + \nu)$$

Рассматривая последнее уравнение как уравнение для  $\tau_0(x)$ , находим его медленно меняющееся частное решение

$$\tau_0^p = -\epsilon^3 w_0''' / 2 \quad (1.8)$$

и быстро меняющееся общее решение

$$\tau_0^g = C_1 e^{-kx/\epsilon} + C_2 e^{kx/\epsilon} \quad (1.9)$$

Теперь на продольных краях полосы надо выполнить граничные условия для  $\sigma_z^*$ , задаваемые условиями нагружения. Можно убедиться, что, если полоса нагружена распределенной нагрузкой  $q^* = q^*(x^*)$ , граничные условия выполняются при отсутствии сингулярного решения (1.9). Для  $w_0$  получается уравнение классической теории

$$2/3 \epsilon^4 w_0^{IV} = q, \quad q = q^* / E$$

Определенное из этого уравнения перемещение  $w_0$  позволяет выполнить четыре условия на концах полосы  $x = \pm 1$ .

Рассмотрим теперь случай нагружения свободно опертой полосы нагрузкой  $q^*$  на участке малой длины  $2c$  (фигура). Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой  $P^* = 2q^*c$ . В окрестности точки приложения силы  $P^*$  возникает быстро затухающее по мере удаления от точки  $x = 0$  решение типа (1.9). На концах полосы  $x = \pm 1$  имеем

$$\int_{-h}^h \tau^* \Big|_{x^* = \pm l} dz^* = \pm \frac{1}{2} P^*$$

С помощью выражений (1.6), (1.7) эти условия приводят к уравнению для определения  $w_0$

$$-\frac{2}{3}\varepsilon^3 w_0''' = \begin{cases} -P/2 & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ P/2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь  $P = P^*/E$  – безразмерная сила.

Кроме того, надо выполнить условия  $\sigma_x = 0$  на концах полосы. Окончательные выражения для напряжений в левой половине полосы (при  $-1 \leq x \leq 0$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \tau &= -3/8P(1-z^2)(1-e^{kx/\varepsilon}), & \sigma_z &= 1/8P(z^2-3)kze^{kx/\varepsilon} \\ \sigma_x &= 3/8P[-4\varepsilon^{-1}(1+x) + (2+\nu)e^{kx/\varepsilon}]z \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для правой половины полосы можно записать аналогичные выражения.

Напряжение  $\sigma_z$  имеет малую поправку по сравнению с известным из сопротивления материалов решением в виде второго экспоненциального слагаемого в квадратных скобках. Графики  $\tau$  и  $\sigma_z$  изображены на фигуре при  $P = 1$ . Напряжение  $\tau$  дано в сечении  $z = 0$ , а  $\sigma_z$  – в сечении  $z = 1$ .

**2. Сходимость метода.** Решение (1.6) в предположении, что дифференцирование по  $x$  не меняет асимптотического порядка искомых величин по  $\varepsilon$ , дает

$$u \sim \varepsilon w, \quad (\varepsilon_x, \sigma_x, \varepsilon_z) \sim \varepsilon^2 w, \quad \tau \sim \varepsilon^3 w, \quad \sigma_z \sim \varepsilon^4 w \quad (2.1)$$

Решение (1.7) при учете того, что дифференцирование увеличивает искомую величину в  $\varepsilon^{-1}$  раз, дает нулевые порядки для всех искомых величин относительно  $\tau$ . Величины  $w$  и  $\tau$  представимы рядами вида

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' z^2/2 + \dots = w_0 + O(\varepsilon^2) \\ \tau &= \tau_0 - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' z^2/2 + \dots = \tau_0 + O(\varepsilon^0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первый ряд является асимптотическим, второй нет. Ограничившись первым членом ряда для вычисления  $w$ , получаем погрешность порядка  $\varepsilon^2$  по сравнению с единицей. Вполне возможно, что из-за неасимптотического характера ряда для  $\tau$  при вычислении величины  $\tau$  придется учитывать несколько членов ряда. В связи с этим несколько изменим процедуру вычислений искомых величин. Перепишем систему (1.3) так:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \varepsilon^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2+\nu) \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (1+\nu) \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \quad (2.3)$$

введя новую переменную  $\xi = x/\varepsilon$ , для того чтобы операция дифференцирования  $\tau$  по  $\xi$  имела асимптотический порядок  $\varepsilon^0$ . Неизвестные  $w$  и  $\tau$  будем искать в виде разложений в асимптотические ряды по малому параметру  $\varepsilon$ , т.е.

$$w = \sum_{s=0} w_s \varepsilon^s, \quad \tau = \varepsilon^3 \sum_{s=0} \tau_s \varepsilon^s \quad (2.4)$$

где  $w_s, \tau_s$  – величины порядка  $\varepsilon^0$ . Здесь учтено, что из выражений (1.8), (1.9) и (1.11) следует соотношение

$$(\tau^p, \tau^s) \sim \varepsilon^3 w$$

Подставив разложения (2.4) в уравнения (2.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ , получим уравнения для последовательного определения коэффициентов рядов (2.4) в порядке возрастания  $s$

$$\frac{\partial^2 \tau_s}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (2 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_{s-2}}{\partial x^2} - (1 + \nu) \frac{\partial \tau_{s-3}}{\partial \xi} \quad (2.5)$$

Величины с отрицательными индексами следует считать равными нулю.

Покажем разрешимость системы (2.5) в нулевом приближении. Уравнения (2.5) при  $s = 0$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial z^2} - (2 + \nu) \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} = \epsilon^3 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6)$$

Здесь произведена обратная замена  $\xi$  на  $x/\epsilon$ .

Из второго уравнения следует, что  $w_0$  — функция только  $x$ . Учитывая это, будем искать частное решение первого уравнения (2.6) как функцию нулевой изменчивости от  $x$ . В этом случае вторым слагаемым в левой части можно пренебречь как малой величиной порядка  $\epsilon^2$ . Тогда частное решение  $\tau_0^p$  при учете нулевых граничных условий на продольных краях полосы определится выражением

$$\tau_0^p = w_0'''(z^2 - 1)/2 \quad (2.7)$$

Общее решение, удовлетворяющее условию отсутствия касательных напряжений на продольных краях, имеет тип пограничного слоя

$$\tau_0^g = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_{1n} \exp\left(-\kappa_n \frac{x}{\epsilon}\right) + C_{2n} \exp\left(\kappa_n \frac{x}{\epsilon}\right) \right] \cos \frac{n\pi}{2} z, \quad \kappa_n = \frac{n\pi}{2(2 + \nu)^{1/2}} \quad (2.8)$$

где  $C_{1n}, C_{2n}$  — постоянные интегрирования.

Теперь имеем полученные двумя путями выражения для  $\tau$  и  $w$ . Одно из них (2.2), получено простыми итерациями, исходя из начальных приближений (1.4), (1.5), второе — асимптотическим интегрированием, основанным на знании асимптотических оценок (2.1), опять-таки полученных методом простых итераций из начальных приближений (1.4), (1.5). Однако зная оценки, оказалось возможным отказаться от приближения (1.5) и получить решение другим путем без разложения  $\tau$  в ряды по степеням  $z$ . Представление (2.4) равносильно тому, что начальное приближение было выбрано следующим образом:

$$w = w_0(x), \quad \tau = \tau_0(x, z) \quad (2.9)$$

т.е. считается, что только  $w_0$  не зависит от поперечной координаты.

В теории балок и пластин независимость  $w$  от поперечной координаты понимается как гипотеза о недеформируемости нормали. Форма (2.9) для  $\tau$  указывает на то, что относительно  $\tau$  в исходном приближении никаких предположений не делалось, хотя в решении существенно использовалось соотношение порядков (2.1) между  $\tau$  и  $w$ .

С помощью соотношений (2.7), (2.8), (2.1) запишем решение для функции  $\tau$  рассмотренной в предыдущем разделе задачи о действии сосредоточенной силы

$$\tau = \epsilon^3 w_0''' \frac{z^2 - 1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \exp\left(\kappa_n \frac{x}{\epsilon}\right) \cos \frac{n\pi z}{2}, \quad x < 0$$

Воспользуемся известным разложением [4]

$$\zeta^2 - 1 = -\frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi\zeta}{2}, \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

(здесь и далее  $n$  принимает только нечетные значения) и сгладим разрыв в точке  $x = 0$ . Решение запишем следующим образом:

$$\tau = -\frac{12}{\pi^3} \left[ 1 - \exp\left(\kappa_n \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \cos \frac{\pi z}{2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ 1 - \exp\left(\kappa_n \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \cos \frac{n\pi z}{2} \quad (2.10)$$

Первый член ряда выделен для того, чтобы сравнить его с выражением (1.11), согласно которому, приняв  $\nu = 0.3$ , получим

$$\tau = -0.375P(1 - e^{0.94x/\varepsilon})(1 - z^2)$$

Оставим в правой части выражения (2.10) только первое слагаемое, разложим косинус в степенной ряд и удержим два первых члена разложения. Это дает следующее приближенное выражение для  $\tau$ , полученное из решения уравнения пограничного слоя

$$\tau = -0.387P(1 - e^{1.04x/\varepsilon})(1 - 1.1z^2)$$

Два последних выражения достаточно близки и оценка остаточного члена в выражении (2.10) как величины порядка 0.1 позволяет заключить, что исходное приближение (1.5) дает удовлетворительный результат.

Заметим, что уравнения (2.6) записаны для  $s = 0$ . При  $s = 1$  получим такие же уравнения. Следовательно, уравнение (2.6) имеет точность  $\varepsilon^2$ .

**3. Изгиб плиты.** Применим разработанный выше подход к задаче изгиба плиты. Совместим срединную плоскость прямоугольной плиты с плоскостью  $x^*y^*$  декартовой системы координат  $x^*y^*z^*$ . Пусть  $a$  и  $b$  – размеры плиты вдоль осей  $x^*$  и  $y^*$  соответственно,  $2h$  – толщина плиты.

Размерные перемещения, напряжения и нагрузку, как и в разд. 1, отметим звездочками. В качестве единицы измерения длины, перемещений и напряжений выберем  $a$ ,  $h$  и  $E$  соответственно. Тогда область, занятая плитой, в безразмерных координатах задается выражениями

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq b/a, \quad -1 \leq z \leq 1$$

Уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние плиты, запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1 + \nu)\tau_{xz} \quad (u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y), & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \quad (u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y), & 2(1 + \nu)\tau_{xy} &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \\ \sigma_x &= \frac{\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z \quad (x \leftrightarrow y) & & (3.1) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \sigma_z, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \quad (x \leftrightarrow y) & & \end{aligned}$$

Здесь введен малый параметр  $\varepsilon = h/a$ . Символы ( $u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y$ ) или ( $x \leftrightarrow y$ ), стоящие после определенных уравнений, указывают, что уравнений подобного вида должно быть два: второе получается круговой заменой указанных символов.

Путем несложных преобразований система (3.1) сводится к трем уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} &= \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \varepsilon^2 L_{xy} \quad (x \leftrightarrow y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta w - \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$L_{xy} = -\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \tau_{yz0}}{\partial x \partial y} \quad (x \leftrightarrow y)$$

решение которых будем строить методом простых итераций, выбрав величины начального приближения так

$$w = w_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0}(x, y) \quad (x \leftrightarrow y) \quad (3.3)$$

Учитывая это и проинтегрировав первые два уравнения (3.2) дважды по  $z$ , запишем выражения для  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  в первом приближении

$$\tau_{xz} = \left( \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{xy} \right) \frac{z^2}{2} + \tau_{xz0} \quad (x \leftrightarrow y) \quad (3.4)$$

Зная  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , запишем вычисленное с помощью третьего уравнения системы (3.1) выражение для  $\sigma_z$ . Имеем

$$\sigma_z = \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 - \varepsilon^3 \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} - \varepsilon^3 \frac{\partial L_{yz}}{\partial y} \right] \frac{z^3}{6} - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z \quad (3.5)$$

На лицевых поверхностях плиты должны выполняться обычные для задачи изгиба плиты поперечной поверхностной нагрузкой  $q^*$  граничные условия  $\tau_{xz}^* = \tau_{yz}^* = 0$  при  $z^* = \pm h$ ,  $\sigma_z^* = \mp q^*/2$  при  $z^* = \pm h$

Подставив в них напряжения (3.4) и (3.5), получим на лицевых поверхностях плиты соответствующие граничным условиям уравнения для определения  $w_0$  и  $\tau_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left( -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{xy} \right) + \tau_{xz0} &= 0 \quad (x \leftrightarrow y) \\ \frac{1}{6} \left( -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 - \varepsilon^3 \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} - \varepsilon^3 \frac{\partial L_{yz}}{\partial y} \right) - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) &= -\frac{q}{2}, \quad q = \frac{q^*}{E} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Умножим первое уравнение системы (3.6) на  $1/3$  и продифференцируем по  $x$ , второе – на  $1/3$  и продифференцируем по  $y$  и сложим с третьим. Получим

$$\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} = \frac{3q}{4} \quad (3.7)$$

Учитывая это равенство, первые два уравнения системы (3.6) запишем так

$$\frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz0}}{\partial y^2} - \tau_{xz0} = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 - \frac{1}{4(1-\nu)} \varepsilon \frac{\partial q}{\partial x} \quad (x \leftrightarrow y) \quad (3.8)$$

Рассматривая эту систему как систему относительно неизвестных  $\tau_{xz0}$  и  $\tau_{yz0}$ , замечаем, что она распадается на два независимых уравнения.

Заметим, что выражение (3.5) сводится к виду

$$\sigma_z = \left[ -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^3}{6} - \varepsilon \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z$$

и это позволяет, учитывая (3.7), записать третье уравнение системы (3.6) так:

$$-\frac{2}{3(1-\nu^2)} \varepsilon^4 \Delta^2 w_0 = q - \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon^2 \Delta q \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) является разрешающим для величин  $w$ -процесса. Все остальные искомые неизвестные могут быть выражены с помощью (3.1) через  $w_0$ . Если поверхностная нагрузка  $q$  имеет нулевую изменчивость, второе слагаемое в правой части может быть отброшено, и получается уравнение для прогиба, совпадающее с уравнением классической теории изгиба пластин. Оно после перехода к размерным переменным имеет вид:

$$D \Delta^{*2} = -q^*, \quad D = 2Eh^3/[3(1-\nu^2)]$$

где  $\Delta^*$  – оператор Лапласа в размерных координатах  $x^*$  и  $y^*$ ,  $D$  – жесткость пластины при изгибе [5].

Если  $w_0$  и  $q$  имеют нулевую изменчивость, из системы (3.9) вытекает оценка

$$w_0 \sim \varepsilon^{-4} q \quad (3.10)$$

Тогда частные решения уравнений (3.8) с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  легко находятся

$$\tau_{xz0}^p = -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 \quad (x \leftrightarrow y) \quad (3.11)$$

Для возможности проведения дальнейшего анализа примем, что компоненты решения системы (3.1) могут быть разложены в ряды Фурье по координате  $y$ , оставаясь при этом функциями нулевой изменчивости. Это позволяет в первом уравнении системы (3.8) пренебречь второй производной по  $y$  как величиной порядка  $\varepsilon^2$ . Общее решение этого уравнения запишем так

$$\tau_{xz0}^g = C_0 e^{-kx/\varepsilon} + C_1 e^{-k(1-x)/\varepsilon}, \quad k^2 = 2(1-\nu)/(1+\nu) \quad (3.12)$$

где  $C_0, C_1$  – постоянные интегрирования. Первый член описывает решение, быстро затухающее от края  $x = 0$ , второй – от края  $x = 1$ .

**4. Выполнение условий на торцевых краях плиты.** Процедуру выполнения граничных условий с помощью решений  $w$  и  $\tau$ -процессов рассмотрим на примере плиты, изогнутой нагрузкой  $q = q_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi a y/b)$ , где  $m$  и  $n$  – числа порядка  $\varepsilon^0$ . На краях  $y = 0$  и  $y = a/b$  выберем условия  $\sigma_y = w = u = 0$ , соответствующие условиям свободного опирания в теории пластин [5]. Эти условия будут выполнены, если принять, что  $v$  и  $\tau_{xy}$  изменяются пропорционально  $\cos(m\pi a y/b)$ , тогда как остальные неизвестные – пропорционально  $\sin(m\pi a y/b)$ . Края плиты  $x = 0$  и  $x = 1$  будем считать свободными и потребуем, чтобы на них напряжения обращались в нуль

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad \text{при } x = 0, 1 \quad (4.1)$$

Эти напряжения в плите, порожденные начальным приближением (3.3), легко вычисляются по соотношениям (3.1) и имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x(w_0) &= -\frac{\varepsilon^2}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z, & \tau_{xy}(w_0) &= -\frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \\ \tau_{xz}(w_0) &= \frac{\varepsilon^3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 \frac{z^2}{2}, & \tau_{xz} &= \tau_{xz0}, & \tau_{xy}(\tau_{xz0}, \tau_{yz0}) &= \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} \\ \sigma_x(\tau_{xz0}, \tau_{yz0}) &= \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\end{aligned}$$

Находящиеся в скобках символы  $w_0$ ,  $\tau_{xz0}$ ,  $\tau_{yz0}$  указывают на величины, через которые вычислено напряжение.

Исходя из этих напряжений и соотношений (3.10), (3.11), условия (4.1) запишем символически так:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2} \sigma_x(w_0) + \varepsilon^{-1} \sigma_x(\tau_{xz0}^p, \tau_{yz0}^p) + \varepsilon^\alpha \sigma_x(\tau_{xz0}^g) &= 0 \\ \varepsilon^{-2} \tau_{xy}(w_0) + \varepsilon^{-1} \tau_{xy}(\tau_{xz0}^p, \tau_{yz0}^p) + \varepsilon^\alpha \tau_{xy}(\tau_{xz0}^g) &= 0 \\ \varepsilon^{-2} \tau_{xz}(w_0) + \varepsilon^{-2} \tau_{xz0}^p + \varepsilon^{\alpha-1} \tau_{xz0}^g &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

Стоящие при разных степенях  $\varepsilon$  коэффициенты имеют порядок  $\varepsilon^0$ . Заметим, что в (4.2) отсутствует быстро затухающая от краев  $y = 0$  и  $y = a/b$  составляющая напряжений, соответствующая решению  $\tau_{yz0}^g$ . Перед последними слагаемыми в каждом уравнении написан множитель  $\varepsilon^\alpha$ , где  $\alpha$  – некоторый произвольный показатель, введенный в силу того, что  $\tau_{xz0}^g$  – общее решение.

Примем в условиях (4.2)  $\alpha = -1$ . Тогда, оставив в них только главные слагаемые, получим условия следующего вида

$$\sigma_x(w_0) = 0, \quad \tau_{xy}(w_0) = 0, \quad \tau_{xz}(w_0) + \tau_{xz0}^p + \tau_{xz0}^g = 0\tag{4.3}$$

Известно [5], что решение бигармонического уравнения для прямоугольной пластины, два противоположных края которой свободно оперты, а два других свободны, содержит четыре произвольных постоянных. Они определяются из первых двух условий (4.3). Последнее условие (4.3), в котором теперь первые два члена известны, служат для определения постоянной при затухающей компоненте общего решения (3.12).

**5. Заключение.** Сравним полученные результаты с известными в литературе [6, 7]. В работах Пуассона, Кирхгоффа, Томсона и Тэта построена классическая теория пластин. Предполагается, что нормальный элемент пластины остается в процессе деформирования нормальным к срединной плоскости и недеформируемым, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

В терминах настоящей работы эти гипотезы можно записать так:

$$\tau_{xz0} = 0 \quad (x \leftrightarrow y), \quad w_0 = w_0(x, y)$$

т.е. априорные гипотезы теории пластин [6] являются в настоящей работе априорными или начальными приближениями метода простых итераций. Более того, они

являются частью начального приближения (3.3), приводящей к построению  $w$ -процесса. Другие теории, называемые теориями типа Тимошенко, Рейсснера или Рейсснера–Миндлина, могут быть получены в результате введения одной гипотезы – неизменности толщины пластины при деформации. В принятых здесь терминах это записывается так:

$$w = w_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0}(x, y, z) \quad (x \leftrightarrow y) \quad (5.1)$$

Разница между выбором величин начального приближения (5.1) и (3.3) заключается, как это показано на примере полосы, в уравнениях пограничного слоя. Например, на краю  $y = \text{const}$  выбору (5.1) будет отвечать уравнение пограничного слоя в частных производных по  $x$  и  $z$ , тогда как выбору (3.3) – уравнение (3.8), в котором следует отбросить производные по  $y$ . Наиболее прямым путем получения решения с помощью  $w$  и  $\tau$ -процессов является асимптотический. Асимптотический процесс легко строится при установлении соотношений типа (2.1). Их удастся установить, просматривая последовательность вычислений методом простых итераций. Асимптотический процесс дает, как это показано в разд. 2 на примере полосы, уравнение пограничного слоя в частных производных по  $x$  и  $z$ . Та же ситуация имеет место для начальных приближений (3.3) и (5.1). В случае (5.1) решение уравнений пограничного слоя может быть представлено в виде разложения в ряд Фурье по толщине плиты. Ограничившись первым членом ряда, получим решение, практически совпадающее с решением, соответствующим начальному приближению (3.3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Love A.A.* Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927 = *Лав А.* Математическая теория упругости. М.- Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. *Kamke E.* Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: Akademie Verlag, 1959 = *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
4. *Dwight H.B.* Tables of Integrals and other Mathematical Data. N.Y.: Macmillan, 1957 = *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964. 228с.
5. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1959 = *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
6. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 26–47.
7. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразованиях Кельвина-Тэта // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С.133–139.