

УДК 539.3 : 534.1

© 2003 г. Ю. А. Демьянов, А. А. Малашин

ПОПЕРЕЧНО-ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУНЕ ЩИПКОВОГО ИНСТРУМЕНТА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МЕДИАТОРА

В рамках предложенной ранее постановки [1] получено решение задачи о распространении продольно-поперечных волн в струне щипкового инструмента под воздействием клинообразного медиатора при произвольном законе его движения. Установлено наличие дополнительного спектра поперечно-продольных колебаний в период воздействия медиатора. Для случая клинообразного медиатора, движущегося с постоянной скоростью, получено точное нелинейное решение задачи, подтверждающее возможность использования для описания игры на щипковых инструментах линеаризованных уравнений [1, 2]. Наличие поля скоростей в струне в момент окончания воздействия исполнителя приводит к новой, отличной от существующей [3, 4], постановке задачи о продольно-поперечных колебаниях струны щипкового инструмента после окончания воздействия исполнителя.

1. Воздействие полуплоскости на неограниченную струну. Рассмотрим воздействие на неограниченную струну клинообразного медиатора угла раствора 2α , движущегося с постоянной скоростью. Ось Ox совместим с первоначальным положением струны. Ось Oy направим по нормали к поверхности медиатора. Пусть V_0 – составляющая скорости медиатора по оси Oy . Вначале примем, что ось симметрии медиатора перпендикулярна оси Ox , а составляющая скорости \tilde{V}_1 в плоскости медиатора направлена вдоль нее. Струна будет взаимодействовать с правым краем медиатора в точке A , имеющей составляющую скорости $V_1 = \tilde{V}_1 \operatorname{tg} \alpha$ вдоль оси Ox (фиг. 1). До сих пор, пока нет влияния волн в струне от другого края, искомое решение совпадает с решением задачи воздействия полуплоскости (с теми же составляющими скоростей), граница которой движется под углом $\pi/2 - \alpha$ к оси Ox .

Уравнения сохранения массы и изменения количества движения для элемента гибкой струны имеют вид

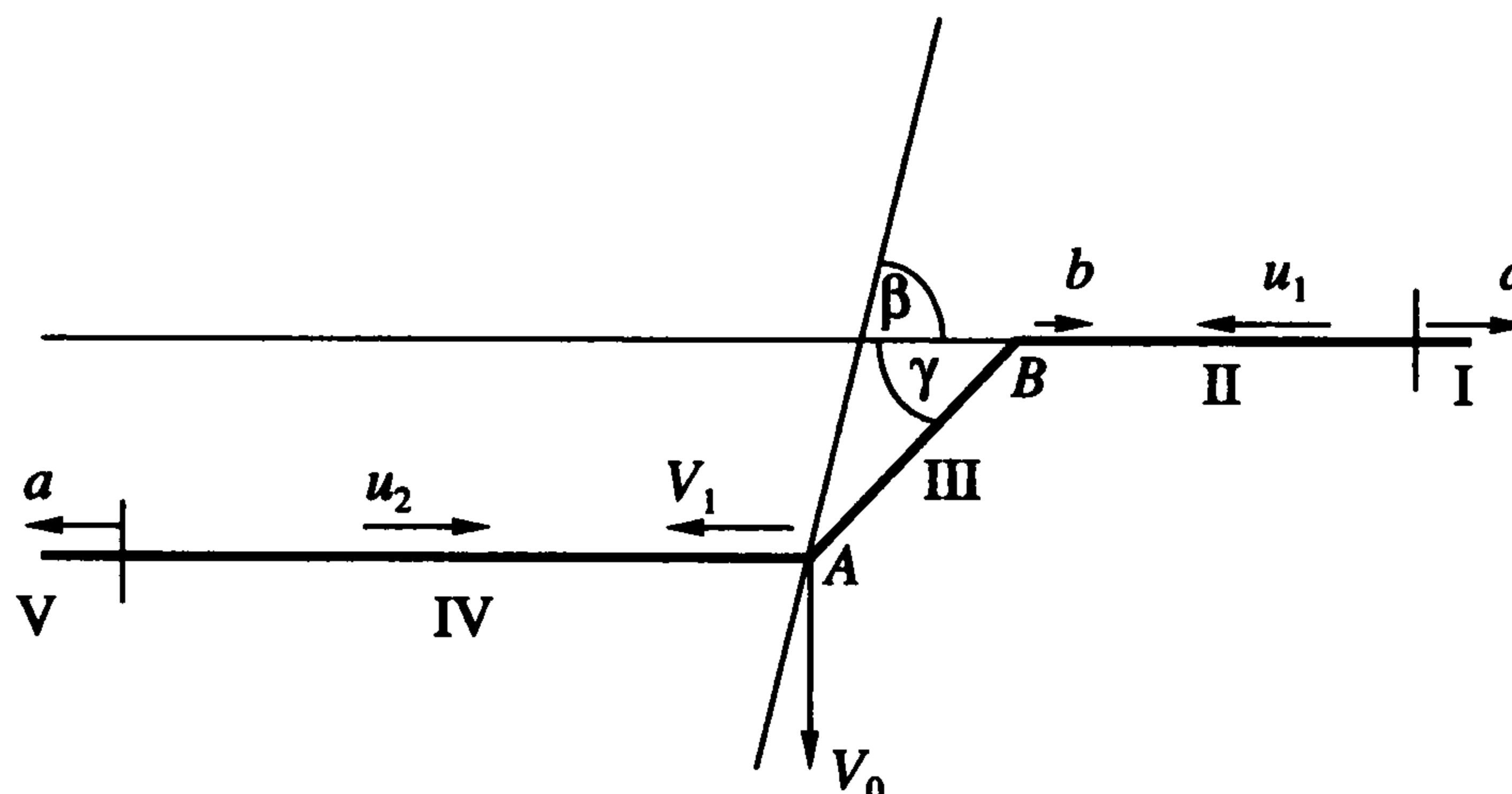
$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho(1 + e), \quad \rho_0 \mathbf{l}_{tt} = \mathbf{T}_s \\ e &= \sqrt{(1 + x_s)^2 + (y_s)^2} - 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотность струны соответственно, \mathbf{T} – вектор натяжения, s – лагранжева координата, совпадающая с декартовой координатой струны в недеформированном состоянии, \mathbf{l} – вектор смещения струны, имеющий проекции $x(s, t)$ и $y(s, t)$, e – деформация.

Продольное смещение и деформацию представим в виде [3]

$$x = \hat{x} + x_0(s), \quad x_0(s) = e_0 s, \quad e = e_0 + \hat{e}$$

где x_0 и e_0 – их значения, соответствующие начальному напряжению T_0 .



Фиг. 1

В проекциях на оси координат второе уравнение (1.1) можно переписать

$$\begin{aligned} \rho_0 x_{tt} &= (T \cos \varphi)_s, & \rho_0 y_{tt} &= (T \sin \varphi)_s \\ \cos \varphi &= (1 + x_s)(1 + e)^{-1}, & \sin \varphi &= y_s(1 + e)^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где φ – угол отклонения элемента струны от его первоначального направления.

Рассмотрим упругий случай, когда $T = Ee$ (E – модуль Юнга). Из метода размерностей и подобия следует [1-3], что решения для составляющих x и y могут быть записаны следующим образом

$$y = atf_1(z), \quad x = atf_2(z), \quad z = s/at, \quad a = \sqrt{E/\rho_0}$$

Решения для f_1 и f_2 имеют простейший вид: $f_1 = \text{const}$, $f_2 = \text{const}$, что означает наличие только областей постоянных параметров.

В результате возникает волновая картина, представленная на фиг. 1, где I – область ($s > at$), куда возмущения не дошли и где $y \equiv 0$, $x \equiv e_0s$,

II – область ($bt < s < at$) продольных движений, где $y \equiv 0$,

III – область ($-V_1t < s < bt$) продольно-поперечных движений частиц струны,

IV – область ($-at < s < -V_1t$) продольно-поперечных движений струны на поверхности медиатора, где $y_t = V_0$ (предполагается абсолютно неупругий удар медиатора по струне),

V – область ($s < -at$), где продольные движения отсутствуют, а $y_t = V_0$.

Условие непрерывности потока частиц струны, проходящих через край медиатора (точку A), таково:

$$\rho_1 V_r = \rho_2 V_\tau \quad (1.3)$$

где V_r и V_τ – скорости частиц вдоль струны слева и справа относительно точки A. Так как $V_r = u_2 + V_1$, то это уравнение может быть записано в виде

$$\rho_1(u_2 + V_1) = \rho_2 V_\tau; \quad (1 + e_1)(u_2 + V_1) = (1 + e_2)V_\tau \quad (1.4)$$

где u_2 – продольная составляющая скорости частиц струны в области IV, ρ_1 и e_1 – плотность и деформация в области IV, ρ_2 и e_2 – эти же величины в области III. Проекция скорости частиц струны на участке AB имеют вид

$$V_y = V'_1 \sin \beta = V_0 - V_\tau \sin \gamma, \quad V_x = V'_1 \cos \beta = V_1 - V_\tau \cos \gamma \quad (1.5)$$

где V'_1 и β – модуль скорости и направление движения частиц струны на этом участке, γ – угол излома струны в точке B.

Рассмотрим случай, когда трение между струной и полуплоскостью в точке А отсутствует. Тогда имеет место непрерывность деформаций $e_1 = e_2$. Из условия (1.3) следует, что при этом

$$u_2 + V_1 = V_\tau$$

На поперечной волне В, которая движется со скоростью b , выполняются соотношения, аналогичные соотношениям, полученным ранее [1], выражающие закон изменения количества движения

$$\rho_0(b + u_1)(V_1' \cos \beta - u_1) = T(\cos \gamma - 1)(1 + e_1) \quad (1.6)$$

$$\rho_0(b + u_1)V_1' \cos \beta = T \sin \gamma (1 + e_1) \quad (1.7)$$

и геометрические соотношения

$$b \sin \gamma = V_1' \sin(\beta - \gamma), \quad \operatorname{tg} \gamma = V_0(b + V_1)^{-1} \quad (1.8)$$

где u_1 – скорость частиц струны в области II.

Вычитая уравнение (1.7), умноженное на $\cos \gamma$, из уравнения (1.6), умноженного на $\sin \gamma$, с учетом соотношения (1.8) можно получить, что

$$\rho_0(b + u_1)^2 = T(1 + e_1) = E(e_0 + \hat{e})(1 + e_0 + \hat{e}), \quad \hat{e} = e_1 - e_0 \quad (1.9)$$

откуда следует

$$b + u_1 = a \sqrt{(1 + e_0 + \hat{e})(e_0 + e)}$$

Так как выполняется условие $u_1 = a\hat{e}$, то

$$b = a(\sqrt{(e_0 + \hat{e})(1 + e_0 + \hat{e})} - \hat{e}) \quad (1.10)$$

Умножая уравнение (1.7) на $b + u_1$ и учитывая соотношение (1.10), получим

$$V_y = V_1' \sin \beta = (b + u_1) \sin \gamma, \quad V_y = a[\sqrt{(e_0 + \hat{e})(1 + e_0 + \hat{e})}] \sin \gamma \quad (1.11)$$

Из уравнения (1.6) с учетом выражения (1.9) заключаем, что

$$u_1(1 + \cos \gamma) = V_1(1 - \cos \gamma) + (b + u_1)(1 - \cos \gamma)$$

Таким образом, можно получить соотношение

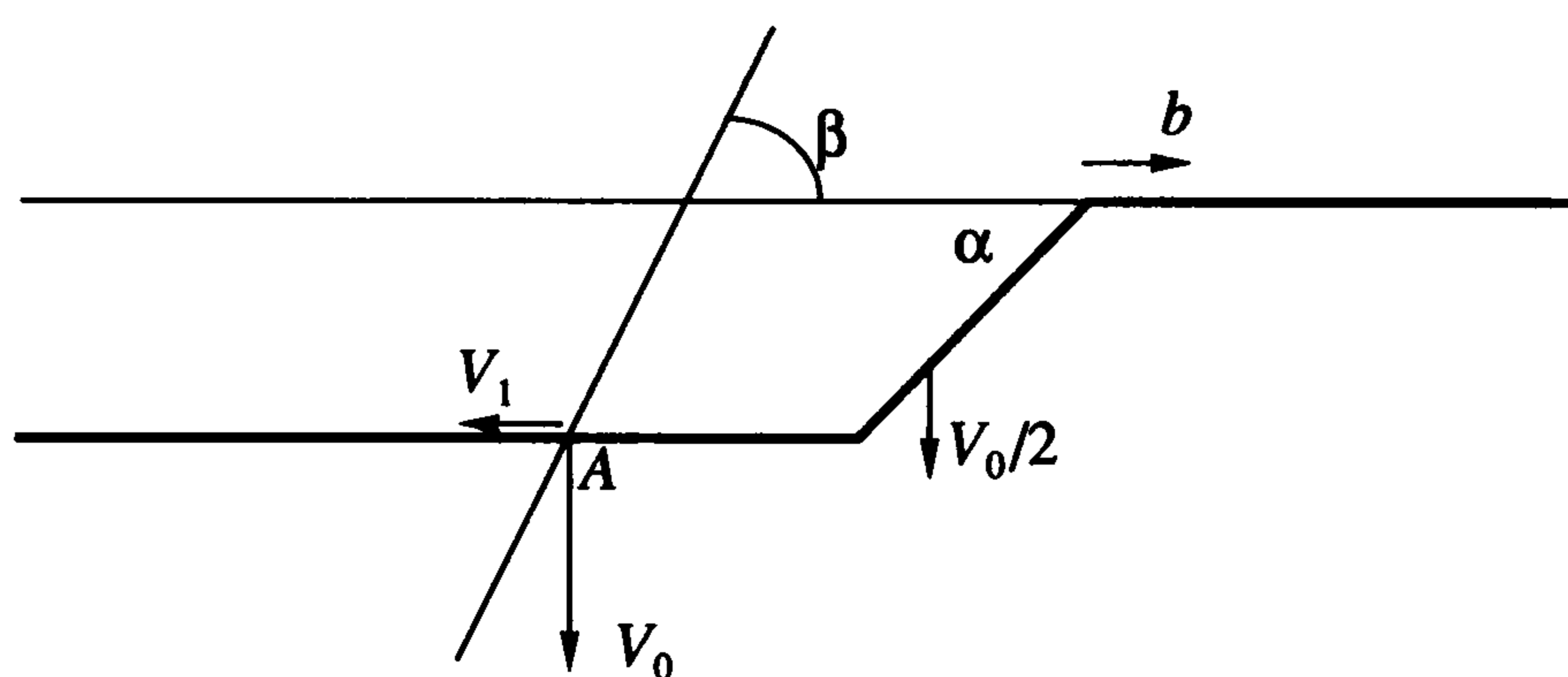
$$u_1 = (b + u_1 + V_1) \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \quad (1.12)$$

а также

$$\hat{e} = (\sqrt{(e_0 + \hat{e})(1 + e_0 + \hat{e})} + V_1/a) \operatorname{tg}^2(\gamma/2) \quad (1.13)$$

Итак, из уравнений (1.5), (1.10), (1.11), (1.13) величины γ , \hat{e} , V_x , V_y , $u_1 = a\hat{e}$ определяются через скорости движения медиатора V_0 , $V_1 = \tilde{V}_1 \operatorname{tg} \alpha$ и начальное натяжение e_0 . При $\alpha = 0$ результаты совпадают с результатами, полученными ранее [2].

Данные результаты позволяют решить задачу об ударе клинообразным медиатором с углом раствора 2α по струне конечных размеров. В этой задаче будут возникать лишь области постоянных параметров: 1) при отражении продольных волн от середины медиатора с возникновением за ними областей покоя; 2) при переходе про-



Фиг. 2

дольной волны, отраженной от середины медиатора, через точку A , что приводит к появлению двух продольных волн, одна из которых начинает двигаться назад, к середине медиатора, вторая распространяется по участку AB ; за этой второй волной возникает область постоянных параметров, изменившееся натяжение в которой вызывает появление новой поперечной волны, распространяющейся от точки A и приводящей к изменению угла наклона струны на этом участке.

При достижении новой продольной волной точки B возникает конфигурация [1], состоящая из двух поперечных волн, движущихся в разных направлениях по областям, уже испытавшим воздействие вновь возникших продольных волн. Подобные ситуации будут и при встрече продольной волны, отраженной от опоры, с движущейся к опоре поперечной волной.

Решение может быть распространено на случай, когда ось симметрии медиатора не перпендикулярна оси Ox , если использовать разные значения V_1 для составляющих скоростей точек излома струны по разные стороны медиатора.

Следует иметь в виду, что формулы разд. 1 справедливы при $V_1 < b$. Если $V_1 > b$, то возникает конфигурация, изображенная на фиг. 2. Край медиатора обгоняет поперечную волну. При этом легко показать, что в области III справедливы соотношения

$$V_y = V_0/2, \quad u_1 = u_2 = 0$$

2. Взаимодействие медиатора со струной. Линейное приближение. Из формул (1.6), (1.8), (1.11) и (1.13), учитывая малость величин γ , \hat{e} , $\bar{V}_0 = V_0/a$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \gamma &= 2(\sqrt{e_0(1+e_0)} + V_1/a)^{-1/2} \hat{e}^{1/2} + O(\hat{e}^{3/2}), \\ \bar{V}_0 &= 2(e_0(1+e_0) + V_1/a)^{1/2} \hat{e}^{1/2} + O(\hat{e}^{3/2}) \\ \bar{V}_y &= 2\sqrt{e_0(1+e_0)}(\sqrt{e_0(1+e_0)} + V_1/a)^{-1/2} \hat{e}^{1/2} + O(\hat{e}^{3/2}), \quad \bar{V}_x = \hat{e} + O(\hat{e}^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как $\tilde{V}_1 \sim V_0$, то $V_1 \sim V_0$ за исключением случаев $\alpha \rightarrow \pi/2$, когда скорость V_1 может быть порядка скорости поперечной волны b . Если исключить случай $\alpha \rightarrow \pi/2$, то формулы (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma &= 2[e_0(1+e_0)]^{-1/4} \hat{e}^{1/2} + O(\hat{e}^{3/2}), \quad \bar{V}_0 = 2[e_0(1+e_0)]^{1/4} \hat{e}^{1/4} + O(\hat{e}^{3/2}), \\ \bar{V}_y &= 2[e_0(1+e_0)]^{1/4} \hat{e}^{1/2} + O(\hat{e}^{3/2}), \quad \bar{V}_x = \hat{e} + O(\hat{e}^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичные разложения

$$Y = \hat{e}^{1/2} Y_1 + \hat{e}^{3/2} Y_2 \dots, \quad \bar{X} = X - e_0 s = \hat{e} X_1 + \hat{e}^2 X_2 \dots$$

были использованы [3] при получении из уравнения (1.1) линеаризованных уравнений первого приближения

$$Y_{1tt} = b^2 Y_{1ss} \quad (2.3)$$

$$X_{1tt} = a^2 \left[X_{1s} + \frac{1}{2(1+e_0)^2} (Y_{1s})^2 \right]_s \quad (2.4)$$

и второго приближения

$$Y_{2tt} = b^2 Y_{2ss} + a^2 \left[\frac{1}{(1+e_0)^2} X_{1s} Y_{1s} + \frac{1}{2(1+e_0)^3} (Y_{1s})^3 \right]_s$$

$$X_{2tt} = a^2 \left[X_{2s} + \frac{1}{(1+e_0)^2} Y_{1s} Y_{2s} - \frac{1}{(1+e_0)^3} X_{1s} (Y_{1s})^2 - \frac{3}{8(1+e_0)^4} (Y_{1s})^4 \right]_s$$

Решим уравнения (2.3) и (2.4) для случая воздействия полуплоскости, движущейся с переменной скоростью $V_0(t)$, на струну. Затем обобщим этот результат на взаимодействие треугольного медиатора с ограниченной струной (с жесткой заделкой на концах), а далее на медиатор произвольной формы, движущийся с произвольной скоростью.

Решением уравнения (2.3) в данном случае будет

$$Y_1(s, t) = \begin{cases} \widehat{e}^{-1/2} y_0(t), & s < s^*(t) \\ \widehat{e}^{-1/2} y_0[\tilde{t}(t-s/b)], & s^*(t) < s < bt, \quad y_0(t) = \int_0^t V_0(t') dt' \\ 0, & s > bt \end{cases}$$

где $s^*(t)$ – координата точки А, $\tilde{t}(z)$ – решение уравнения $\tilde{t} - s^*(t)/b = z$. Для движения с постоянной скоростью получаем

$$Y_1(s, t) = \begin{cases} \widehat{e}^{-1/2} V_0 t, & s < V_1 t \\ \widehat{e}^{-1/2} \frac{V_0 b}{b+V_1} \left(t - \frac{s}{b} \right), & -V_1 t < s < bt, \\ 0, & s > bt \end{cases}$$

Данные решения совпадают с полученными ранее в нелинейной постановке при $\widehat{e} \rightarrow 0$.

Учет отражений от середины и от точек крепления L_+ и L_- приводит к следующим результатам:

$$\widehat{e}^{1/2} Y_1^\pm(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_0 b}{b+V_1} \left(t \mp \frac{s-s_n^\pm \pm 2nL_\pm}{b} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0 b}{b+V_1} \left(t \pm \frac{s-s_n^\pm \mp 2nL_\pm}{b} \right)$$

где s_n^+ и s_n^- – координаты точек излома в моменты прихода отраженных волн, индексы плюс и минус относятся соответственно к областям справа и слева от медиатора.

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$x_{II} = f_1(\xi), \quad x_{IV} = f_2(\eta), \quad x_{III} = f_3(\xi) + f_4(\eta) + F(s, t)$$

$$(x_I = x_V = 0) \quad (2.5)$$

$$\xi = t - s/a, \quad \eta = t + s/a$$

где $F(s, t)$ – частное решение уравнения (2.3). При подстановке его в уравнение (2.3) имеем

$$F''(s, t) = \frac{a^2}{b(1 + e_0)^2(b^2 - a^2)} Y'(t - s/b) Y''(t - s/b) \quad (2.6)$$

т.е. данное частное решение может быть представлено как

$$F(s, t) = F(t - s/b)$$

Различие постановок задач для определения продольных смещений X_1, X_2 и поперечных смещений Y_1, Y_2 состоит в том, что на поперечных волнах и в точках касания с медиатором

$$s = bt, \quad s^* = -\int_0^t V_1 dt'$$

первые производные функций X_1, X_2 терпят разрыв [2]:

$$[X_{1t}] = \frac{b}{2(1 + e_0)} (Y_{1s})^2 = \frac{1}{2b(1 + e_0)} Y_0'^2 \left(t - \frac{s}{b} \right) \quad \text{при } s = bt \quad (2.7)$$

$$[X_{1s}] = -\frac{1}{2(1 + e_0)} (Y_{1s})^2 = -\frac{1}{2b^2(1 + e_0)} Y_0'^2 \left(t - \frac{s}{b} \right)$$

$$[X_{1t}] = 0, \quad \left[X_{1s} + \frac{1}{2(1 + e_0)} (Y_{1s})^2 \right] = 0 \quad \text{при } s^* = -\int_0^t V_1 dt' \quad (2.8)$$

(квадратные скобки означают разрыв составляющих соответствующих величин за и перед волной, а также справа и слева от точки контакта края медиатора со струной).

Используя данные условия и подставляя в соотношения (2.7) и (2.8) решения для X_1 в виде (2.5), для случая постоянной скорости в различных областях имеем

$$x_{II} = f_1(\xi) = A\xi, \quad x_{IV} = f_2(\eta) = A\eta$$

$$x_{III} = f_3(\xi) + f_4(\eta) + F(t - s/b) = A(a - b)s/b$$

$$A = \frac{bV_0^2}{4(1 + e_0)^2(b + V_1)^2}$$

Для рассмотрения продольного движения частиц струны при движении медиатора с переменной скоростью необходимо найти координаты s^* точки, в которой струна взаимодействует с краем медиатора

$$(1 + e_0)s^*(t) + X(s^*(t), t) = -\int_0^t V_0(t') dt'$$

В общем случае решение данной задачи очень громоздкое и здесь не приводится.

Ввиду малости размеров медиатора влияние поправок, связанных с определением s^* , проявляется только во втором приближении, поэтому решение для $X_1(s, t)$ в области III может быть представлено соотношением

$$X_1(s, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) [F'(\xi) - F'(\eta)] + \frac{a}{4b^2(1 + e_0)^2} \left[\int_0^t Y_0'^2(\xi) d\xi + \int_0^t Y_0'^2(\eta) d\eta \right]$$

3. Анализ результатов. Из полученных результатов следуют два заключения. Первое связано с тем, что в период воздействия исполнителя возникают частоты поперечно-продольных колебаний, отличные от частот основного тона и обертонов струны. Время этого воздействия, как правило, колеблется в пределах 0.01–0.05 с. (Это время было, в частности, определено вторым автором совместно с А.В. Брюквинным путем измерения с помощью электронного хронографа периода замыкания сети, состоящей из находящихся под напряжением металлической струны и металлического медиатора.) За это время на участках струны от медиатора до опор поперечные и продольные волны успеют пробежать и отразиться многократно. Таким образом, на указанных участках возникнут колебания, основной тон которых будет выше, чем основной тон всей струны, и которые будут восприниматься опорой и деккой, давая дополнительный спектр звучания. Разлагая в ряды Фурье представленные в разд. 2 решения для продольных и поперечных волн, можно найти амплитуду этих колебаний, а также учесть сдвиг частоты в процессе перемещения медиатора и увеличения расстояния от опоры до точек касания струны с краем медиатора.

Вместе с тем в соответствии с предложенным ранее подходом [2], в связи с малостью ширины медиатора определение спектра колебаний можно провести в предположении неизменности расстояния от опоры до фиксированной точки медиатора (например, его середины), а сдвиг в частоте и поправку на величины амплитуды колебаний найти методом возмущений.

Оценку в изменении частот нетрудно провести в предположении постоянства скорости медиатора по формуле

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi b \Delta l}{L^2 \Delta t} = \frac{\pi b \Delta l \tilde{V}_1}{L^2 \Delta h}$$

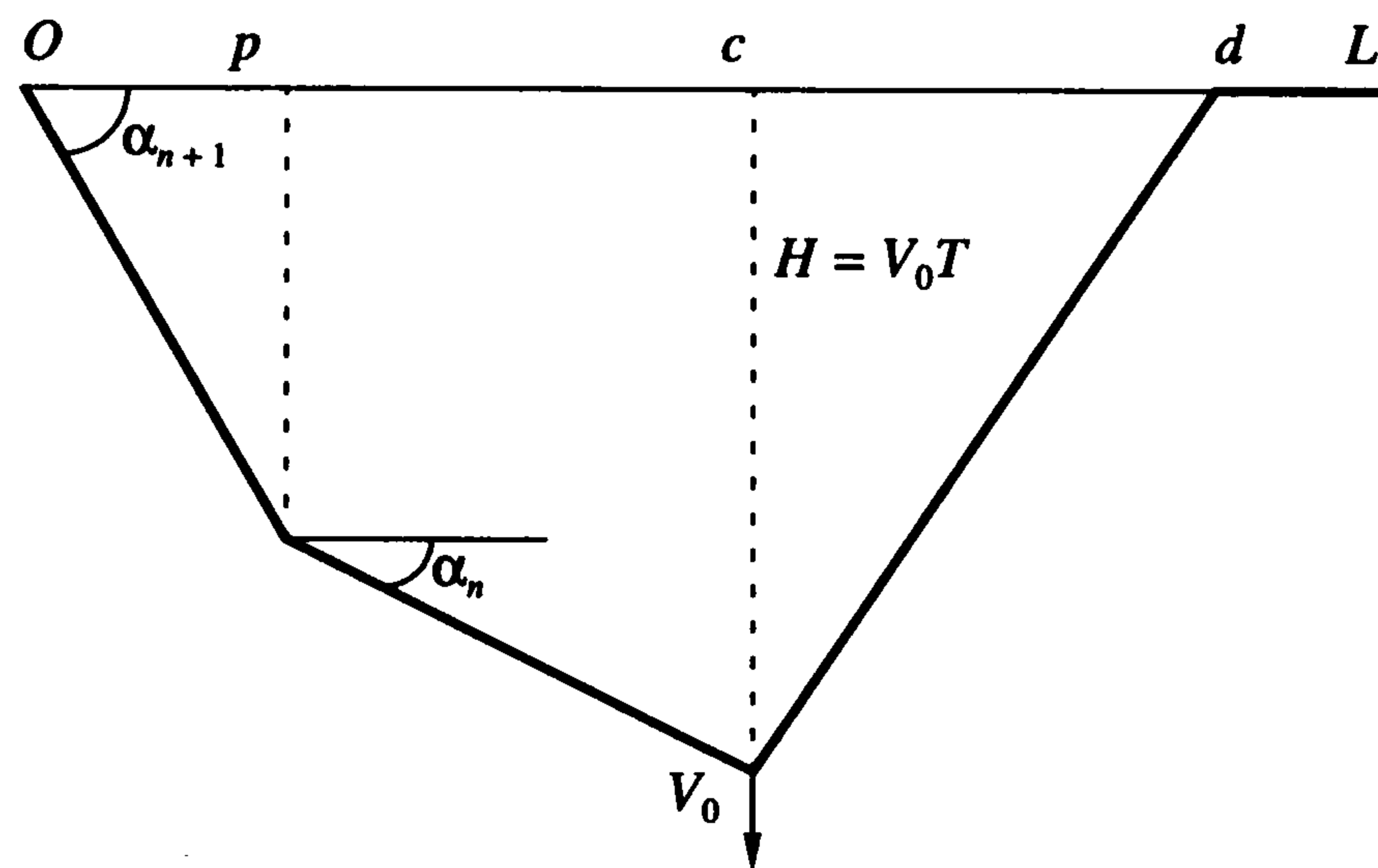
где Δl – начальная полуширина медиатора в месте его охвата струны, Δh – длина захвата, L – расстояние от середины медиатора до опоры.

Второе заключение связано с использованием решений из разд. 2 для определения спектра поперечно-продольных колебаний струны после окончания воздействия исполнителя.

Полученные выше решения позволяют найти распределение продольных и поперечных составляющих векторов смещений и скоростей в момент окончания воздействия медиатора (или пальца исполнителя). Считая полученные распределения за начальные условия для уравнений (2.3) и (2.4) и учитывая граничные условия в местах заделки, можно решить задачу определения спектра поперечных и продольных колебаний струны после воздействия исполнителя.

До настоящего времени при определении спектров как поперечных так и поперечно-продольных колебаний в струнах щипковых инструментов в соответствии с известной постановкой [4] задавалось начальное распределение смещений (в связи с тем, что струна на участке от точек опор до места воздействия исполнителя имеет прямолинейную форму), а начальные скорости нулевые. В случае условий жесткой заделки концов струны были приведены спектры поперечных [4, 5] и продольных колебаний [6]. Известно, что выражение для поперечных смещений представляет собой суперпозицию членов вида $f_n \sin \omega_n t$, причем коэффициенты f_n определяются разложением в ряд Фурье начального треугольного распределения.

В действительности, спектр колебаний (после окончания воздействия исполнителя) будет представлять суперпозиции членов вида $f_n \sin \omega_n t$ и $\varphi_n \cos \omega_n t$, где коэффициенты f_n и φ_n определяются соответствующим разложением в ряд Фурье начального (не треугольного) распределения поперечных составляющих смещений и скоростей. Поэтому спектр поперечно-продольных колебаний имеет те же частоты, что при прежней постановке, количественно и качественно отличаясь от него величиной амплитуды колебаний (а следовательно, и энергией мод), а также наличием сдвига фаз при этом.



Фиг. 3

В общем случае вычисления приводят к громоздким выражениям.

Рассмотрим спектр поперечных колебаний. Представим медиатор в виде точки, движущейся со скоростью $V_0 = \text{const}$, и для наглядности рассмотрим случаи (соответствующие реальным условиям игры), когда волны многократно отражаются от ближайшей к точке воздействия медиатора заделки. Такие случаи приводят к следующему возможному виду струны и распределению поперечных составляющих скоростей, изображенных на фиг. 3. (На участках $0 \leq s \leq a$ и $d \leq s \leq L$ поперечные составляющие скорости отсутствуют). Спектр поперечных колебаний определяется выражением

$$e^{1/2} Y_1(s, t) = \frac{2V_0 H}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n s}{L} \left[A_n \sin \frac{\pi n}{L} b t + B_n \cos \frac{\pi n}{L} b t \right]$$

$$A_n = \frac{2LV_0}{\pi^2 n^2 b} \left(\cos \frac{\pi n p}{L} - \cos \frac{\pi n d}{L} \right) \tag{3.1}$$

$$B_n = \frac{2V_0}{b} \left[\frac{L}{\pi^2 n^2} \left(k \sin \frac{\pi n c}{L} - \sin \frac{\pi n d}{L} + \sin \frac{\pi n p}{L} \right) + \frac{d - b t}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{L} \right]$$

k – количество отражений от заделки, $H = V_0 t$

Спектр поперечных колебаний (3.1) отличается от известного в литературе [4, 5] амплитудой и сдвигом частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. Демьянов Ю.А. Постановка задач взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний // Докл. РАН, 2000. Т. 372. № 6. С. 743–748.
3. Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебания музыкальных струн // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 4. С. 461–465.
4. Rayleigh, Lord. The Theory of Sound. L.: Mc Millan, 1929 = Рэлей Д.В. Теория звука. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1940. 504 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977 г. 735 с.
6. Демьянов Ю.А., Дементьева Д.В., Малашин А.А. Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах // ПММ, 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 272–282.