

УДК (532.591 + 539.3):534.1

© 2003 г. И. В. Стурова

ДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГУЮ КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ, ПЛАВАЮЩЮЮ НА МЕЛКОВОДЬЕ

Строится решение нестационарной задачи о поведении плавающей на свободной поверхности жидкости упругой круглой пластины под действием внешней нагрузки. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая и ее глубина мала по сравнению с радиусом пластины. Совместное движение пластины и жидкости рассматривается в рамках линейной теории. Течение жидкости предполагается потенциальным. Исследуется поведение пластины при различных нагрузках и показано, что ограниченные размеры упругой пластины существенно влияют на ее нестационарное поведение.

Ранее [1] исследовано воздействие периодических поверхностных давлений на упругую платформу, плавающую на поверхности жидкости конечной глубины. В плоском случае рассмотрена балочная пластина конечной и полубесконечной длины, в пространственном – круглая пластина. Колебания жидкости и пластины предполагались установившимися. Эта задача является частным случаем нестационарной задачи о воздействии внешней динамической нагрузки на упругую плавающую пластину. Нестационарное поведение безграничной в плане упругой пластины изучено достаточно полно (см., например, [2–4]) применительно к исследованию влияния движущейся внешней нагрузки на ледяной покров. Были представлены примеры расчетов для прямоугольной пластины [5, 6]. Плоская задача о нестационарном поведении упругой балки конечной длины, плавающей на мелководье, была исследована [7] при различных внешних нагрузках с учетом и без учета инерционности груза.

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины H плавает упругая однородная круглая пластина радиуса r_0 . Поверхность жидкости, не покрытая пластиной, свободна. Течение жидкости полагается потенциальным. Потенциалы скоростей жидкости в области под пластиной и вне этой области обозначим соответственно $\phi^{(1)}(x, y, t)$ и $\phi^{(2)}(x, y, t)$, где x и y – горизонтальные координаты с началом координат в центре пластины.

Нормальный прогиб упругой пластины $w(x, y, t)$ описывается уравнением (точкой обозначена производная по времени t)

$$D\Delta^2 w + \rho_1 h_1 \dot{w} + g\rho w + \rho \dot{\phi}^{(1)} = -P(x, y, t), \quad r \leq r_0 \quad (1.1)$$

где

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D = Eh_1^3/[12(1 - \nu^2)]$$

E , ρ_1 , h_1 , ν – модуль нормальной упругости, плотность, толщина и коэффициент Пуассона пластины, ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. Функция $P(x, y, t)$ является заданной и описывает внешнее давление, действующее на пластину.

Согласно линейной теории мелкой воды справедливо соотношение

$$\dot{w} = -h\Delta\phi^{(1)}, \quad r \leq r_0; \quad h = H - d \quad (1.2)$$

где $d = \rho_1 h_1 / \rho$ – осадка пластины.

В области чистой воды потенциал скоростей $\phi^{(2)}(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\phi}^{(2)} = gH\Delta\phi^{(2)} \quad (r > r_0) \quad (1.3)$$

с условием затухания $\phi^{(2)} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$).

В теории удара при исследовании кратковременного внешнего воздействия на плавающее упругое тело [8] используется предположение, что жидкость при $r > r_0$ является невесомой, и тогда вместо уравнения (1.3) имеем

$$\phi^{(2)}(x, y, t) = 0, \quad r > r_0 \quad (1.4)$$

При $r = r_0$ должны выполняться следующие условия непрерывности давления и потока массы:

$$\dot{\phi}^{(1)} = \dot{\phi}^{(2)}, \quad \partial\phi^{(1)}/\partial r = (H/h)\partial\phi^{(2)}/\partial r \quad (1.5)$$

На краях пластины ставятся условия свободного края – равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы

$$\Delta w - \frac{v_1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{v_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = 0, \quad r = r_0$$

где

$$\theta = \arctg(y/x), \quad v_1 = 1 - v$$

Предположим, что в начальный момент жидкость и пластина покоятся. Тогда

$$w = \dot{w} = \phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \dot{\phi}^{(2)} = 0, \quad t = 0 \quad (1.6)$$

Далее перейдем к безразмерным переменным (отмеченным штрихами)

$$(x', y', H', h') = \frac{(x, y, H, h)}{r_0}, \quad t' = \sqrt{\frac{g}{r_0}} t, \quad w' = \frac{w}{a}, \quad \phi'_{1,2} = \frac{\phi_{1,2}}{a\sqrt{gr_0}}, \quad P' = \frac{P}{a\rho g}$$

где a – множитель, имеющий размерность длины. Ниже будут использованы следующие безразмерные коэффициенты:

$$\beta = \frac{H}{h}, \quad \gamma = \frac{d}{r_0}, \quad \delta = \frac{D}{\rho g r_0^4}$$

2. Разложение по собственным колебаниям. Предположим для простоты, что внешнее давление в уравнении (1.1) является четной функцией по y , и следовательно, прогибы пластины симметричны относительно оси x . В безразмерных переменных (штрихи далее опущены) прогиб пластины будем искать в виде разложения по собственным колебаниям круглой пластины со свободными краями в вакууме

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}(t) W_{jn}(r) \quad (2.1)$$

где $a_{jn}(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению, а $W_{jn}(r)$ – решение спектральной задачи

$$L_n W_{jn} = \lambda_{jn}^4 W_{jn}, \quad r \leq 1; \quad L_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$$

$$W_{jn}'' + v W_{jn}' - n^2 v W_{jn} = (L_n W_{jn})' + n^2 v_1 (W_{jn} - W_{jn}') = 0, \quad r = 1$$

где штрих означает дифференцирование по r . Эта спектральная задача хорошо изучена [9, 10]. Все собственные функции, кроме $W_{00} = \sqrt{2}$ и $W_{01} = 2r$, которые являют-

ся модами твердотельного движения и соответствуют собственным числам $\lambda_{00} = \lambda_{01} = 0$, имеют вид

$$W_{jn} = A_{jn}[J_n(\lambda_{jn}r) + C_{jn}I_n(\lambda_{jn}r)]$$

где

$$C_{jn} = \frac{\lambda_{jn}^2 J_n(\lambda_{jn}) + v_1[\lambda_{jn} J_n'(\lambda_{jn}) - n^2 J_n(\lambda_{jn})]}{\lambda_{jn}^2 I_n(\lambda_{jn}) - v_1[\lambda_{jn} I_n'(\lambda_{jn}) - n^2 I_n(\lambda_{jn})]} =$$

$$= \frac{\lambda_{jn}^3 J_n'(\lambda_{jn}) + n^2 v_1[\lambda_{jn} J_n'(\lambda_{jn}) - J_n(\lambda_{jn})]}{\lambda_{jn}^3 I_n'(\lambda_{jn}) - n^2 v_1[\lambda_{jn} I_n'(\lambda_{jn}) - I_n(\lambda_{jn})]}$$

$$A_{j0}^{-2} = \frac{1}{2} \left\{ J_0^2(\lambda_{j0}) + J_1^2(\lambda_{j0}) + \frac{2C_{j0}}{\lambda_{j0}} [I_1(\lambda_{j0})J_0(\lambda_{j0}) + I_0(\lambda_{j0})J_1(\lambda_{j0})] + \right.$$

$$\left. + C_{j0}^2 [I_0^2(\lambda_{j0}) - I_1^2(\lambda_{j0})] \right\}, \quad j \geq 1 \tag{2.2}$$

$$A_{jn}^{-2} = \frac{1}{2} \left\{ J_n^2(\lambda_{jn}) - J_{n-1}(\lambda_{jn})J_{n+1}(\lambda_{jn}) + \frac{2C_{jn}}{\lambda_{jn}} [I_{n+1}(\lambda_{jn})J_n(\lambda_{jn}) + I_n(\lambda_{jn})J_{n+1}(\lambda_{jn})] + \right.$$

$$\left. + C_{jn}^2 [I_n^2(\lambda_{jn}) - I_{n-1}(\lambda_{jn})I_{n+1}(\lambda_{jn})] \right\}, \quad j, n \geq 1$$

J_n и I_n – обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода. Собственные числа λ_{jn} ($\lambda_{jn} > \lambda_{j+1n}$) определяются из дисперсионного соотношения, вытекающего из (2.2). Совокупность функций W_{jn} образует полную ортогональную систему с условием нормировки

$$\int_0^1 r W_{jn}(r) W_{kn}(r) dr = \delta_{jk}$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Были представлены [10] числовые значения λ_{jn} , C_{jn} и A_{jn} для первых 701 мод при $v = 0.33$.

Потенциалы $\phi^{(1,2)}(r, \theta, t)$ с использованием условия симметрии по угловой координате θ представим в виде

$$\phi^{(1,2)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(1,2)}(r, t) \cos n\theta \tag{2.3}$$

Используя разложения (2.1) и (2.3), решение для $\Phi_n^{(1)}(r, t)$, удовлетворяющее уравнению (1.2), ищем в виде

$$\Phi_n^{(1)}(r, t) = -\frac{1}{h} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \dot{a}_{jn}(t) [\Psi_{jn}(r) - r^n \Psi_{jn}(1)] + r^n q_n(t) \right\} \tag{2.4}$$

Функции $\Psi_{jn}(r)$ определяются из уравнения

$$L_n \Psi_{jn}(r) = W_{jn}(r)$$

Для твердотельных мод

$$\Psi_{00}(r) = \frac{r^2}{2\sqrt{2}}, \quad \Psi_{01}(r) = \frac{r^3}{4}$$

а для остальных мод

$$\Psi_{jn} = \frac{A_{jn}}{\lambda_{jn}^2} [C_{jn} I_n(\lambda_{jn} r) - J_n(\lambda_{jn} r)]$$

Функции $q_n(t)$ в выражении (2.4) являются неизвестными. В предположении невязкости жидкости при $r > 1$ согласно равенству (1.4) имеем $q_n \equiv 0$, а для весомой жидкости эти функции определяются из вытекающих из соотношений (1.5) условий согласования по периметру пластины потенциалов $\Phi_n^{(1)}(r, t)$, $\Phi_n^{(2)}(r, t)$ и их производных по r

$$\Phi_n^{(1)} = \Phi_n^{(2)}, \quad \partial \Phi_n^{(1)} / \partial r = \beta \partial \Phi_n^{(2)} / \partial r, \quad r = 1$$

Согласно уравнению (1.3) уравнение для $\Phi_n^{(2)}(r, t)$ имеет вид

$$\ddot{\Phi}_n^{(2)} = H L_n \Phi_n^{(2)}, \quad r > 1; \quad \Phi_n^{(2)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Свойства решения этого уравнения были подробно описаны [11] при исследовании задачи о дифракции акустических волн на жестком круговом цилиндре.

Введем обозначения

$$\Phi_n^{(2)}|_{r=1} = S_n(t), \quad \partial \Phi_n^{(2)} / \partial r|_{r=1} = T_n(t)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа, получим следующее соотношение, связывающее эти функции:

$$S_n(t) = \sqrt{H} \int_0^t T_n(\tau) G_n(\sqrt{H}(t-\tau)) d\tau \quad (2.5)$$

где так называемая переходная функция имеет вид:

$$G_n(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K_n(s)}{sK_n'(s)} \exp(s\xi) ds \quad (2.6)$$

Здесь K_n – модифицированные функции Бесселя второго рода, величина σ выбирается так, что путь интегрирования в правой части равенства (2.6) лежит правее всех особых точек подынтегрального выражения. До $n = 10$ переходные функции $G_n(\xi)$ были табулированы [12] и предложены их простые аппроксимации [13], а также дано графическое сопоставление точных и приближенных решений [13].

Подставим разложения (2.1), (2.3), (2.4) в безразмерный аналог уравнения (1.1) и начальные условия (1.6), умножим полученные соотношения на $r \cos(n\theta) W_{kn}(r)$ и проинтегрируем их по r в пределах от 0 до 1 и по θ в пределах от 0 до 2π . Пользуясь свойствами функций $W_{kn}(r)$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{jn} \left[\gamma \delta_{kj} - \frac{1}{h} D_{kj}^{(n)} \right] + (1 + \delta \lambda_{kj}^4) a_{kn} - \frac{1}{h} S_{kn} \dot{q}_n = -P_{kn} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

(точка сверху означает теперь полную производную по времени) с граничными условиями

$$a_{kn}(0) = \dot{a}_{kn}(0) = q_n(0) = 0$$

Здесь

$$D_{kj}^{(n)} = \int_0^1 r W_{kn}(r) [\Psi_{jn}(r) - r^n \Psi_{jn}(1)] dr, \quad D_{kj}^{(n)} = D_{jk}^{(n)} \quad (2.8)$$

$$S_{kn} = \int_0^1 r^{n+1} W_{kn}(r) dr \quad (2.9)$$

$$P_{kn}(t) = \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta \int_0^1 r P(r, \theta, t) W_{kn}(r) dr, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) \quad (2.10)$$

Эту систему ОДУ замыкает интегродифференциальное уравнение, являющееся следствием соотношения (2.5),

$$q_n(t) = \frac{h}{\sqrt{H}} \int_0^t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \dot{a}_{jn}(\tau) b_{jn} + n q_n(\tau) \right] G_n(\sqrt{H}(t-\tau)) d\tau \quad (2.11)$$

где

$$b_{jn} = \partial \Psi_{jn} / \partial r |_{r=1} - n \Psi_{jn}(1)$$

Можно показать, что $S_{kn} = b_{kn}$. Система интегродифференциальных уравнений (2.7), (2.11) несколько упрощается при $n = 0, 1$, когда все значения S_{kn} равны нулю, кроме $S_{00} = 1/\sqrt{2}$ и $S_{01} = 1/2$.

3. Метод численного решения. Используя метод редукции, бесконечные ряды в соотношениях (2.1), (2.3), (2.4) заменяются конечными суммами с числом членов N в разложении по угловым гармоникам и с учетом первых M собственных функций. Интегрирование в (2.8) и (2.9) выполняется аналитически, а в (2.10) при произвольном распределении внешнего давления $P(r, \theta, t)$ двойной интеграл считается численно.

Решение уравнений (2.7), (2.11) выполняется методом конечных разностей с постоянным шагом по времени. Для вычисления интеграла типа свертки в (2.11) используется метод, описанный ранее [6].

Кратко изложим его на примере вычисления интеграла

$$F(t) = \int_0^t V(\tau) Z(t-\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Для момента времени $t = K\zeta$, где ζ – шаг по времени, интеграл (3.1) можно записать в виде

$$F(K\zeta) = \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} V(\tau) Z(t-\tau) d\tau, \quad t_k = k\zeta \quad (3.2)$$

Значения функций $V(t)$ и $Z(t)$ в моменты времени t_k обозначим соответственно V_k и Z_k ($k = 0, 1, 2, \dots, K$). Предполагается, что при $k < K$ эти значения известны. При $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ используется линейная аппроксимация

$$\begin{aligned} V(\tau) &= V_k + \frac{V_{k+1} - V_k}{\zeta}(\tau - t_k) \\ Z(t - \tau) &= Z_{K-k} + \frac{Z_{K-(k+1)} - Z_{K-k}}{\zeta}(\tau - t_k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя выражения (3.3) в равенство (3.2) и выполняя интегрирование по τ , получим

$$F(K\zeta) = \sum_{n=0}^{K-1} \zeta \left\{ \frac{1}{2} [V_k Z_{K-(k+1)} + V_{k+1} Z_{K-k}] + \frac{1}{3} (V_{k+1} - V_k) [Z_{K-(k+1)} - Z_{K-k}] \right\}$$

Используя это представление, можно из уравнения (2.11), продифференцировав его предварительно по t , получить соотношения, связывающие неизвестные величины $\dot{q}_n(K\zeta)$ и $\ddot{a}_{jn}(K\zeta)$. Подставив эти соотношения в (2.7), окончательно получим систему ОДУ, которую можно записать в матричной форме

$$\mathbf{B}_1^{(n)} \ddot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{B}_2^{(n)} \dot{\mathbf{A}}_n = \mathbf{C}_n$$

где вектор $\mathbf{A}_n = \{a_{0n}(K\zeta), a_{1n}(K\zeta), \dots, a_{M,n}(K\zeta)\}^T$, $\mathbf{B}_1^{(n)}$ и $\mathbf{B}_2^{(n)}$ – квадратные матрицы, из которых $\mathbf{B}_1^{(n)}$ – полностью заполненная матрица, а $\mathbf{B}_2^{(n)}$ – диагональная матрица, верхний индекс T означает транспонирование. В вектор \mathbf{C}_n , кроме правой части уравнения (2.7), входят слагаемые, учитывающие значения \dot{q}_n и \ddot{a}_{jn} на предыдущих шагах.

4. Численные результаты. Для тестирования вычислительного алгоритма были использованы результаты решения задачи о воздействии периодического поверхностного давления на круглую пластину, плавающую на мелководье [1]. Распределение внешнего давления задавалось в виде (возвращаемся к размерным переменным)

$$P(x, y, t) = \text{arg}f(R) \sin \omega t$$

где

$$f(R) = \begin{cases} 1 - (R/l)^2, & R < l \\ 0, & R > l \end{cases}, \quad R = \sqrt{(x-L)^2 + y^2}, \quad l + L < r_0 \quad (4.1)$$

Расчеты, выполненные при $L = 0$, $r_0/2$, показали, что колебания пластины примерно через 2–3 периода $2\pi/\omega$ выходят на установившийся периодический режим. Амплитуды прогибов пластины в установившемся режиме совпали с полученными ранее результатами [1].

Для исследования импульсного воздействия на пластину выбрана внешняя нагрузка вида

$$P(x, y, t) = \text{arg}f(R)T(t) \quad (4.2)$$

Функция $f(R)$ задана выражением (4.1), а зависимость от времени имеет вид:

$$T(t) = \begin{cases} t/b, & t \leq b \\ 2 - t/b, & b \leq t \leq 2b \\ 0, & t > 2b \end{cases}$$

Расчеты проведены при следующих значениях исходных параметров:

$$D = 4.476 \times 10^{10} \text{ кг м}^2/\text{с}^2, \quad H = 20 \text{ м}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad d = 1 \text{ м}, \\ r_0 = 200 \text{ м}, \quad l = 40 \text{ м}, \quad \nu = 0.3$$

При этих значениях параметров имеем $\gamma = 5 \times 10^{-3}$, $\delta = 2.852 \times 10^{-3}$.

Расчеты для круглой пластины сопоставлены с известным решением для безграничной пластины (см., например, [2, 3]). Для нагрузки в форме (4.2) это решение имеет вид

$$w(R, t) = \frac{a\rho g}{2\pi b} \int_0^\infty \frac{kY(k, t)\tilde{f}(k)J_0(kR)}{Dk^4 + \rho g} dk$$

где

$$Y(k, t) = \begin{cases} \Omega^{-1} \sin \Omega t - t, & 0 \leq t \leq b \\ \Omega^{-1} [2 \sin \Omega (b - t) + \sin \Omega t] - 2b + t, & b \leq t \leq 2b \\ \Omega^{-1} [2 \sin \Omega (b - t) - \sin \Omega (2b - t) + \sin \Omega t], & t > 2b \end{cases}$$

$$\Omega^2(k) = \frac{hk^2(Dk^4 + \rho g)}{\rho + \rho_1 h_1 h k^2}, \quad f(k) = \frac{4\pi J_2(kl)}{k^2}$$

($\tilde{f}(k)$ – фурье-преобразование функции $f(R)$ (4.1)). В приведенных ниже расчетах принято $b = 0.5 \text{ с}$.

При расположении пятна давления в центре пластины ($L = 0$) рассматриваемая задача становится осесимметричной и отличными от нуля являются только коэффициенты при $n = 0$. Переходная функция $G_0(\xi)$ (2.6) имеет вид [11]:

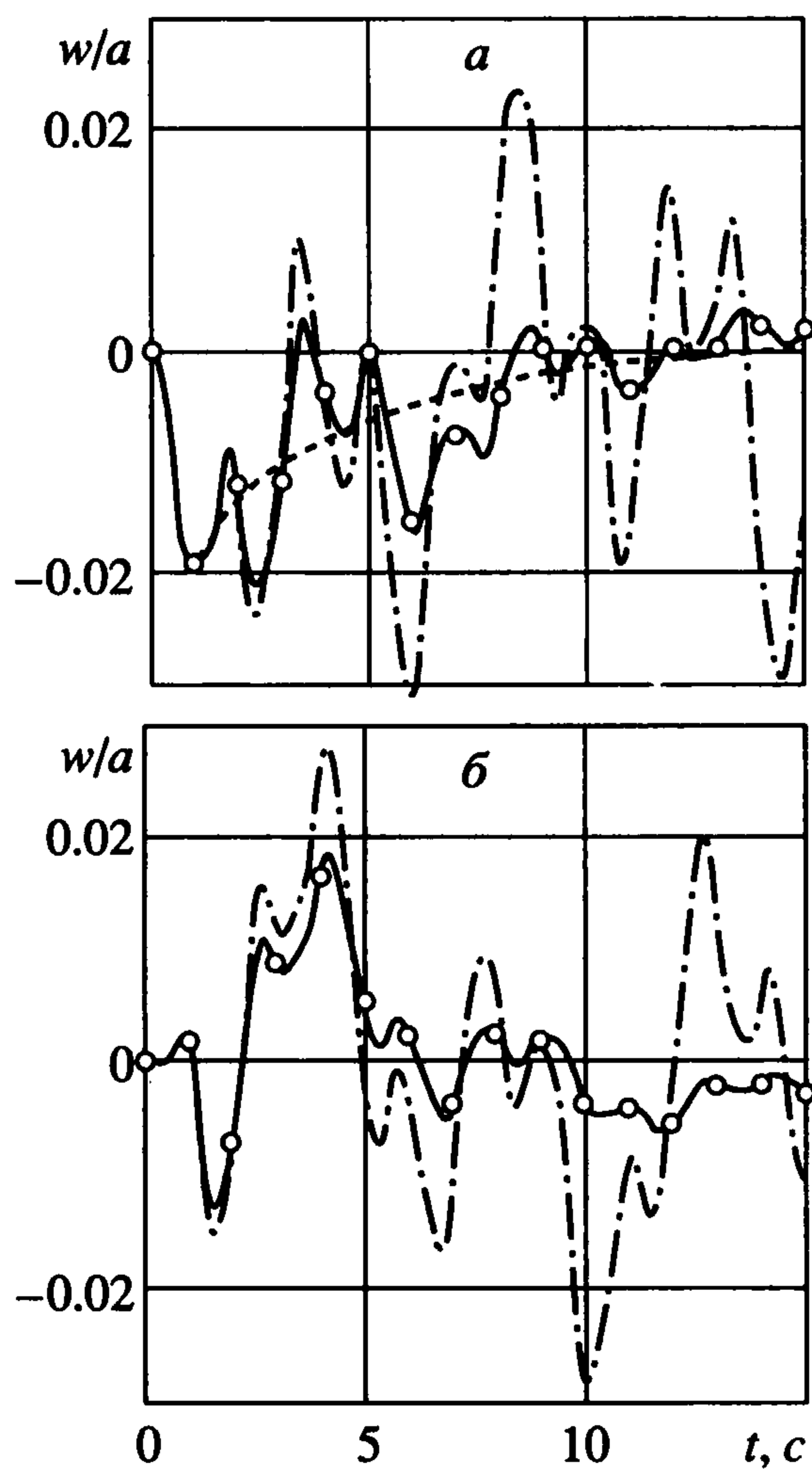
$$G_0(\xi) = -\int_0^\infty \frac{\exp(-\xi\tau)d\tau}{\tau^2 [K_1^2(\tau) + \pi^2 I_1^2(\tau)]} \quad (4.3)$$

а ее приближенное выражение [13]

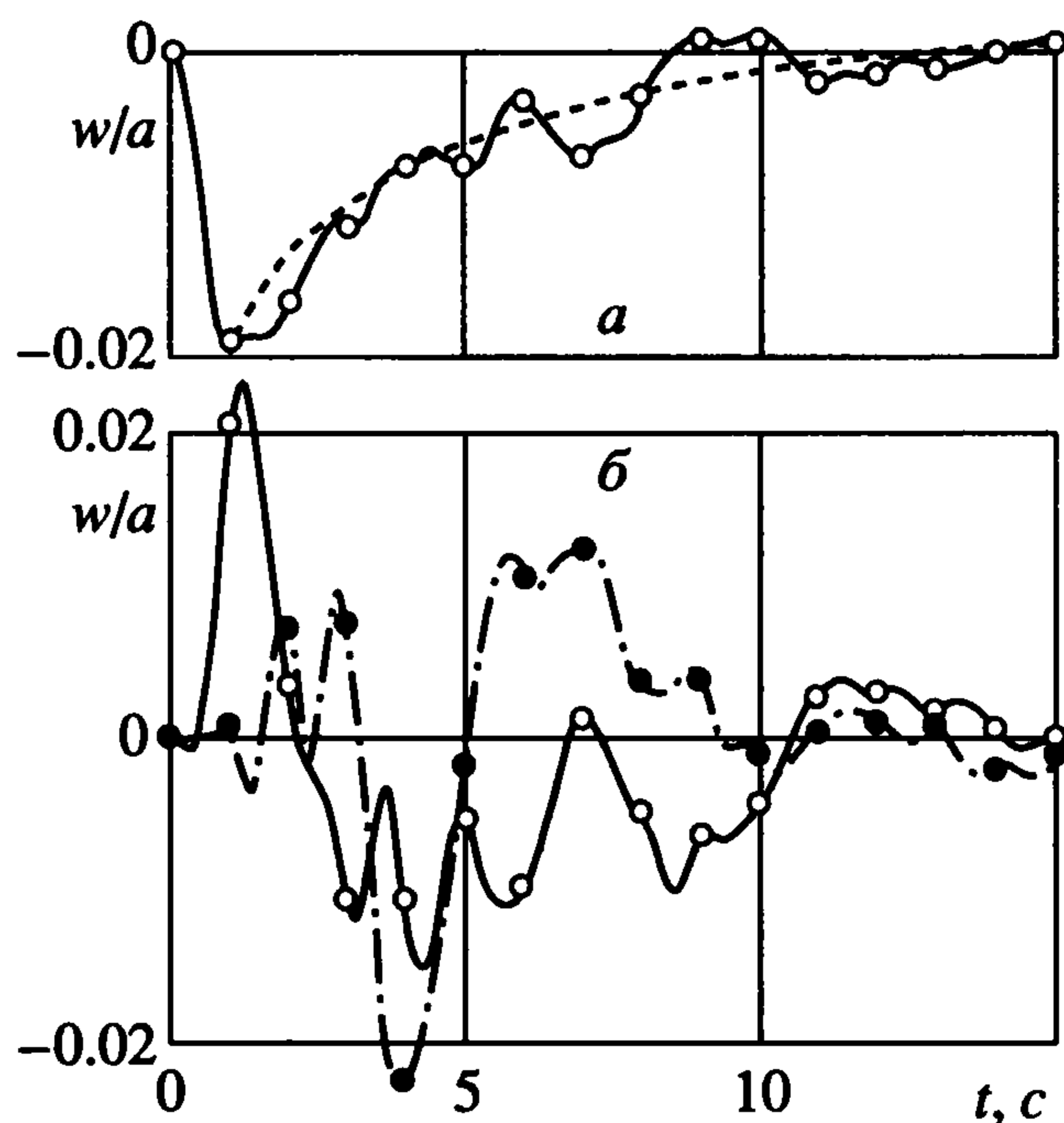
$$G_0(\xi) \approx -[0.6 \exp(-0.75\xi) + 0.4 \exp(-0.132\xi)] \quad (4.4)$$

На фиг. 1 представлены зависимости от времени нормальных прогибов пластины w/a при $r = 0$ и $r = r_0$ (сплошные кривые на фиг. 1, а и б соответственно). Шкала времени дана в размерном виде (безразмерное время получается нормированием на величину $\sqrt{r_0/g} \approx 4.52 \text{ с}$). Для сравнения на фиг. 1, а, б приведены соответствующие решения для невесомой жидкости (штрихпунктирные кривые). Нормальный прогиб бесконечной пластины в центре приложения давления показан на фиг. 1, а штриховой кривой. Расчеты выполнены при $M = 10$ с использованием выражения (4.3), светлыми точками показаны результаты для аппроксимации (4.4).

Интересно отметить, что в центре давления на отрезке времени, соответствующем действию давления ($t \leq 2b = 1 \text{ с}$), все решения совпадают, но после прекращения внешнего воздействия прогибы различных пластин существенно различаются. Для бесконечной пластины наблюдается монотонное восстановление исходного нулевого состояния. Для круглой пластины в весоной жидкости со временем также устанавливается исходное состояние, но немонотонным образом. Максимальный прогиб

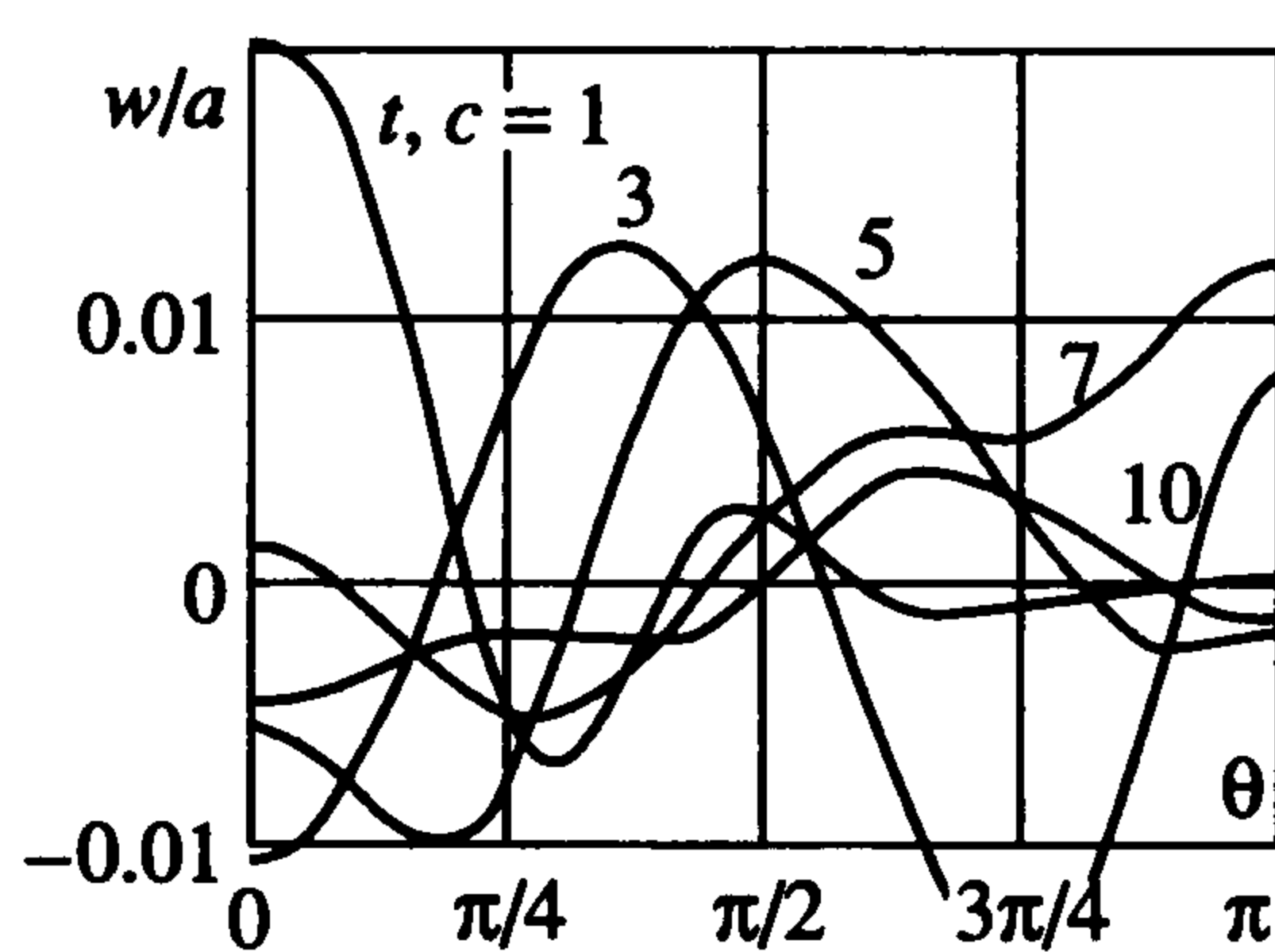


Фиг. 1



Фиг. 2

края пластины примерно равен максимальному прогибу в центре давления и достигается при $t \approx 4.2$ с. Решения с точной (4.3) и приближенной (4.4) переходными функциями практически совпали и представленные далее расчеты выполнены с использованием приближенных зависимостей [13] для переходных функций $G_n(\xi)$. Для пластины в невесомой жидкости убывание прогибов со временем как в центре давления, так и на краях не наблюдается, так как в этом случае отсутствует генера-



Фиг. 3

ция поверхностных волн и рассеяние энергии. Это более простое решение можно использовать для оценки сверху максимальных прогибов пластины при различных внешних воздействиях.

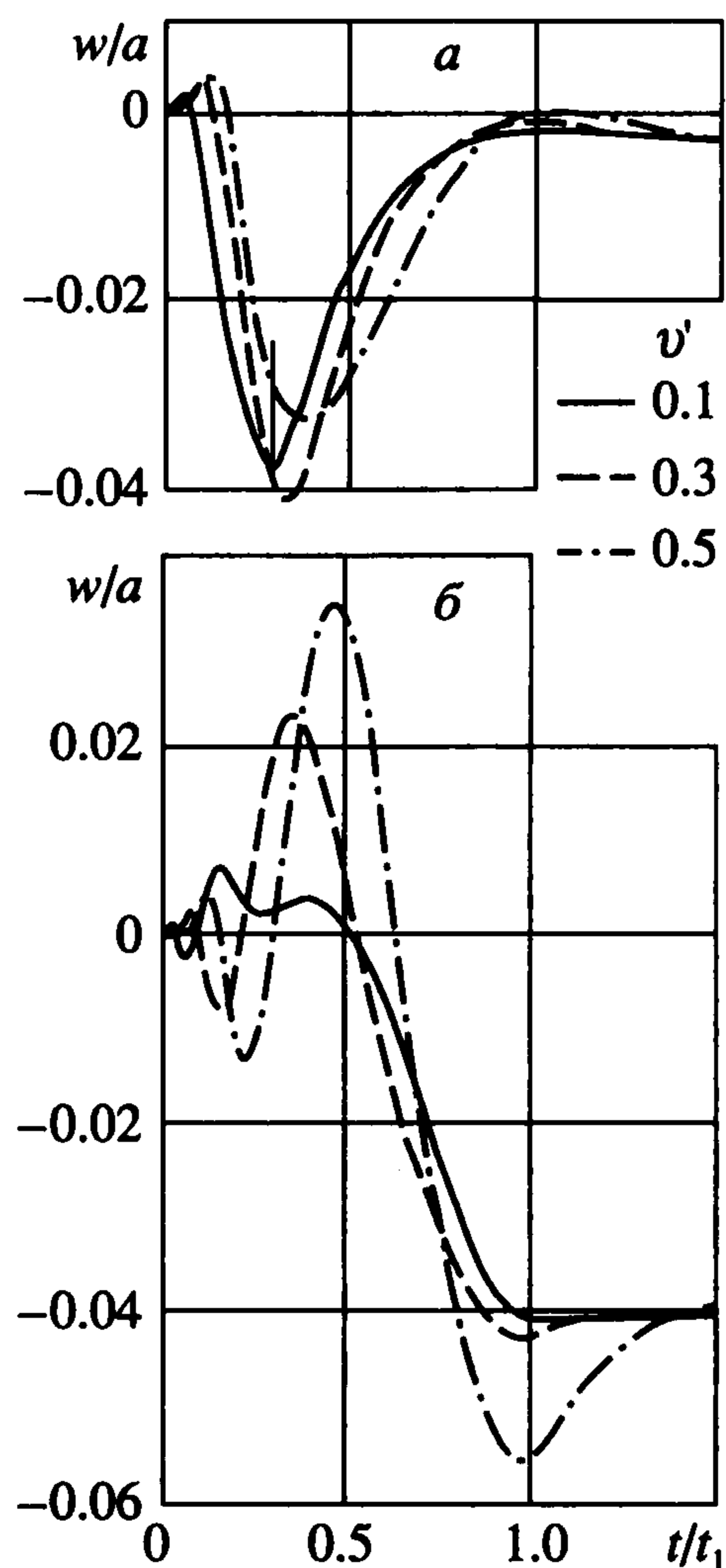
Случай несимметричного приложения давления ($L = r_0/2$) представлен на фиг. 2. На фиг. 2,а показаны нормальные прогибы в центре давления ($x = L, y = 0$) в зависимости от времени для круглой (сплошная кривая) и бесконечной (штриховая кривая) пластин. Как и на фиг. 1,а, эти решения совпадают в моменты времени, соответствующие действию давления ($t \leq 1$ с), а затем постепенно стремятся к нулю. Колебания краев пластины при $r = r_0$ показаны на фиг. 2,б сплошной кривой при $\theta = 0$ и штрихпунктирной кривой при $\theta = \pi$ в случае $N = M = 10$. Сопоставление с результатами расчетов при $N = M = 7$ представлено светлыми точками на фиг. 2,а для нормального прогиба в центре давления и на фиг. 2,б для колебания края пластины при $\theta = 0$, а также темными точками на фиг. 2,б для колебания края пластины при $\theta = \pi$. Видно, что изменение числа учитываемых волновых гармоник N и собственных функций M в указанных пределах практически не сказывается на результатах.

Максимальные значения прогибов на левом и правом концах диаметральной линии, проходящей через центр давления, примерно одинаковые и близки к значениям в симметричном случае (ср. фиг. 1,б и фиг. 2,б), однако время появления максимальных прогибов различно. Быстрее всего (при $t \approx 1.2$ с) максимальный прогиб достигается на правом краю, ближайшем к области давления, а затем при $t \approx 3.9$ с – на противоположном конце.

Представленные результаты подтверждают выводы [1, 7] о том, что в некоторых случаях нормальные прогибы пластины на ее краю превышают соответствующие значения во внутренней части. В связи с этим интересно подробнее изучить поведение края пластины. На фиг. 3 представлены зависимости $w(r_0, \theta, t)$ от угловой координаты θ для разных моментов времени t . Видно, что сначала максимальный прогиб достигается в точке, ближайшей к центру давления, а затем колебания распространяются по периметру пластины с последующим их затуханием. Сопоставление максимальных прогибов на краю и в точке $x = L, y = 0$ в представленные моменты времени (см. фиг. 2,а) показывает, что прогибы края более значительны.

Влияние движущейся нагрузки рассмотрено на примере, имитирующем посадку самолета. Предполагается, что в начальный момент времени нагрузка имеет скорость v и плавно касается пластины в точке $x = x_0, y = 0$, а затем прямолинейно и равномерно движется влево вдоль диаметральной линии вплоть до полной остановки в точке $x = x_1, y = 0$ в момент времени $t = t_1 \equiv 2(x_0 - x_1)/v$. Функция в правой части уравнения (1.1) задается в виде

$$P(x, y, t) = \text{arg}[1 - \exp(-bt)]f(x, y, t)$$



Фиг. 4

причем функция f определена выражением (4.1) с учетом следующей зависимости от времени движения центра давления :

$$L(t) = \begin{cases} x_0 - vt + \frac{v^2 t^2}{4(x_0 - x_1)}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ x_1, & t > t_1 \end{cases}$$

Использованы прежние исходные параметры, однако теперь $l = 0.1r_0$, $x_0 = 0.7r_0$, $x_1 = -0.7r_0$, $b = 20/t_1$.

На фиг. 4 показаны нормальные прогибы пластины на оси $y = 0$ в точках $x = 0$ (а) и $x = -r_0$ (б) в зависимости от времени для разных начальных скоростей движения нагрузки $v' = v/\sqrt{gr_0}$. В точке $x = r_0$, $y = 0$ максимальные значения $|w/a|$ не превышают 0.007. Отметим, что для заданной глубины жидкости безразмерная критическая скорость распространения гравитационных волн равна $\sqrt{H/r_0} \approx 0.33$. На фиг. 4,а вертикальным отрезком показан момент пересечения пиком нагрузки начала координат. Видно, что только при относительно медленном движении максимальный прогиб пластины достигается в момент прохождения центра нагрузки. С увеличением v' время появления максимального прогиба в начале координат наблюдается после прохождения нагрузки через эту точку. При $t > t_1$ колебания пластины успокаиваются и постепенно принимают значения, соответствующие распределенной статической нагрузке с центром в точке $x = x_1$, $y = 0$. Решение такой стационарной задачи легко построить описанным выше методом, при этом система ОДУ (2.7) сведется к простой системе линейных алгебраических уравнений. Безразмерные значения ста-

тического прогиба на оси $y = 0$ при $x = 0$ и $x = -r_0$ равны соответственно -0.002 и -0.041 . Представленные на фиг. 4 результаты получены при значениях $N = M = 7$.

Отметим, что предложенный способ может быть распространен на исследование нестационарного гидроупругого поведения круглой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной и бесконечной глубины.

Автор благодарит А.А.Коробкина за обсуждение и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00739), программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96162) и Интеграционного проекта №1 СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И.В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С.75–86.
2. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
3. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247с.
4. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Kluwer, 1996. 244 p.
5. Ohmatsu S. Numerical calculation of hydroelastic behavior of VLFS in time domain// Hydroelasticity in Marine Technology: Proc. 2nd Intern. Conf. Fukuoka: Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., 1998. P. 89–97.
6. Kashiwagi M. A time-domain mode-expansion method for calculating transient elastic responses of a pontoon-type VLFS// J.Mar.Sci.Technol. 2000. V. 5. № 2. P. 89–100.
7. Стурова И.В. Нестационарное поведение плавающей на мелководье упругой балки под действием внешней нагрузки // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 3. С. 88–98.
8. Korobkin A. Unsteady hydroelasticity of floating plates// J. Fluids and Structures. 2000. V. 14. № 7. P. 971–991.
9. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. Справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
10. Ito K., Crandall S.H. Natural modes and natural frequencies of uniform, circular, free-edge plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. № 2. P. 448–453.
11. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
12. Randall D.C. Supersonic flow past quasi-cylindrical bodies of almost circular cross-section // Aeronaut. Res. Council, Rep. and Mem. 1958. № 3067. 17 p.
13. Leclerc J. Étude du flottement des coques cylindriques minces dans le cadre de la théorie du potentiel linéarisé, 1. Détermination des forces aérodynamiques// J. méca. 1970. V. 9. № 1. P. 111–154.