

УДК 551.466.81:534.1

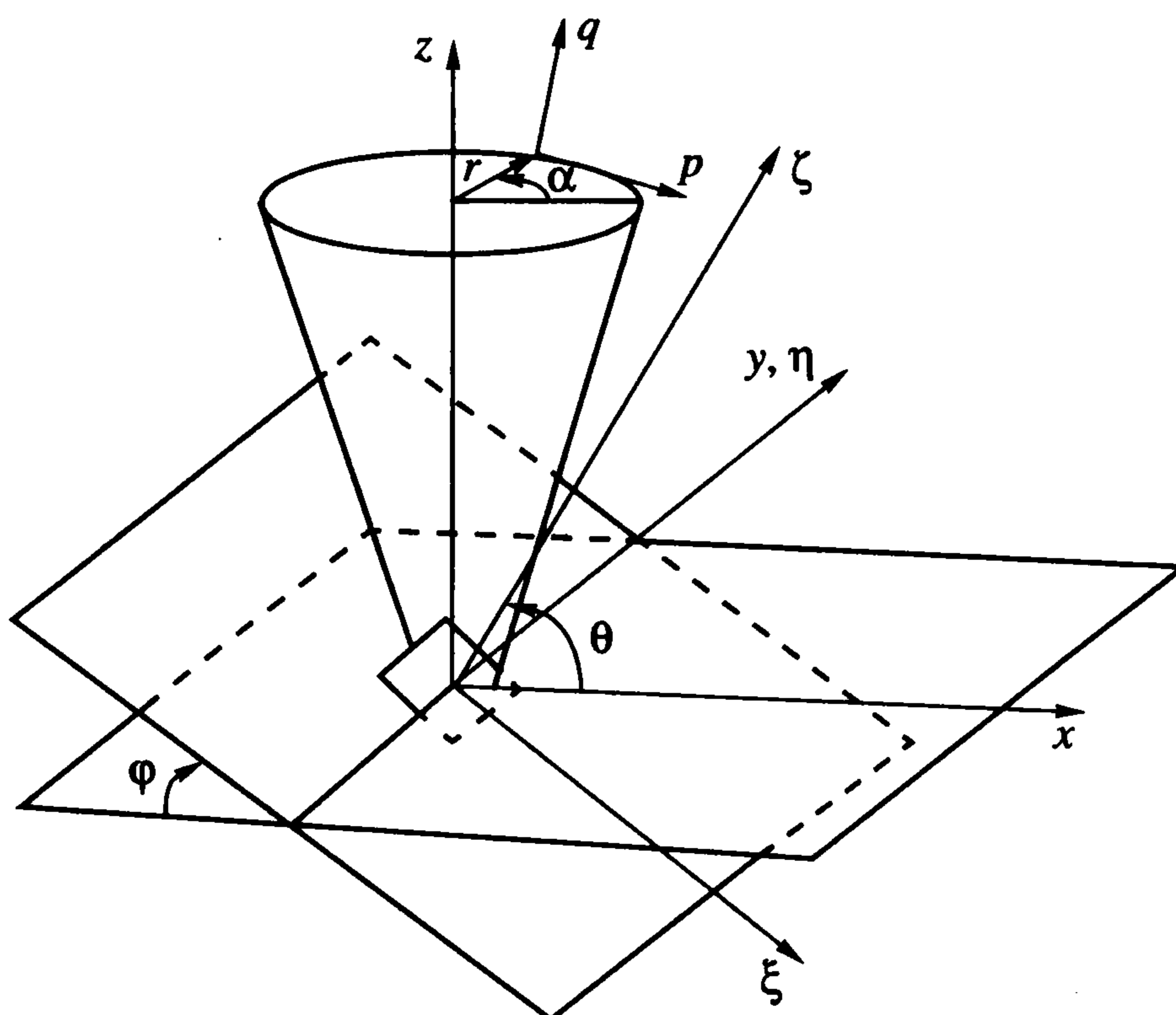
© 2003 г. А. Ю. Васильев, Ю. Д. Чашечкин

ГЕНЕРАЦИЯ ПУЧКОВ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Спектральным методом построено точное решение линеаризованной задачи о генерации возмущений компактными источниками, совершающими произвольные периодические движения в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. Полученные выражения, не содержащие подгоночных параметров, описывают конические пучки трехмерных периодических внутренних волн и два типа пограничных слоев, пространственный масштаб которых задается кинематической вязкостью и частотой плавучести среды. Толщина одного из них, являющегося аналогом периодического течения Стокса в однородной жидкости, определяется кинематической вязкостью и частотой волны, т.е. дополнительно зависит от отношения частот волны и плавучести. Толщина специфического внутреннего пограничного слоя зависит еще и от геометрии задачи. В приближении слабой стратификации и малой вязкости даны асимптотические оценки полученных выражений для двух типов генераторов: плоского наклонного прямоугольника, колеблющегося вдоль своей поверхности (фрикционный) и по нормали к ней (поршневой источник) в невырожденном случае, когда волновой конус не касается излучающей плоскости. Полученные аналитические выражения в предельных случаях согласуются с известными точными решениями задач о генерации аксиально-симметричных и двумерных периодических внутренних волн.

Известно приближенное решение задачи о генерации двумерных инфинитезимальных периодических волн в вязкой стратифицированной жидкости горизонтальным эллиптическим цилиндром [1]. Точное решение задачи возбуждения внутренних волн осциллирующей наклонной полосой учитывает возникающий пограничный слой [2]. В реальных условиях источники волн в большинстве случаев являются компактными, а внутренние волны – трехмерными [3]. Такие периодические волны, распространяющиеся вдоль образующих волновых конусов, играют фундаментальную роль в теории волновых процессов в стратифицированных средах. Расчет трехмерных гармонических внутренних волн был выполнен только в одном частном случае, когда генератором является часть поверхности вертикального цилиндра [4], и вычисления существенно упрощаются в силу согласованности симметрий излучателя и геометрии волнового поля.

Цель данной работы – построение решения линеаризованной трехмерной задачи генерации совокупности возмущений, производимых частью наклонной плоскости, совершающей произвольные периодические движения в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. Полное решение, удовлетворяющее системе уравнений движения и точным граничным условиям, находится по представленной ранее методике [2, 4].



1. Уравнения движения и граничные условия. Рассматривается стратифицированная жидкость, плотность которой экспоненциально убывает с высотой z : $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda)$; Λ – масштаб плавучести, ось z направлена против ускорения силы тяжести g . В приближении Буссинеска линеаризованная система уравнений движений вязкой несжимаемой жидкости в отсутствие диффузии соли имеет вид [5]

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v} - \rho g \mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_z \frac{\rho_0}{\Lambda} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, ρ , P , – переменные скорость, плотность и давление соответственно, \mathbf{e}_z – единичный орт оси z . В естественных и лабораторных условиях стратификация обычно слабая ($\Lambda \gg H$, H – максимальный линейный масштаб задачи), а вязкость – малая ($N\lambda_c^2 \gg \nu$, λ_c – характерная длина волны, ν – кинематическая вязкость). Эти свойства широко используются в теории внутренних волн [1–4].

Граничными условиями на ограничивающей поверхности Σ для системы уравнений (1.1) являются условия прилипания. На бесконечности в вязкой среде все возмущения затухают. Первоначально жидкость покоится. При установившемся режиме колебаний, который и рассматривается дальше, зависимость всех величин от времени носит гармонический характер. Общий множитель $\exp(-i\omega t)$ далее везде опускается.

Источником волн служит часть бесконечной плоскости, расположенной под произвольным углом φ к горизонту, которая совершает периодические движения с частотой ω и амплитудой скорости u_0 . Смещения происходят в произвольном направлении, в том числе параллельно поверхности (аналогично двумерному случаю [2]), или перпендикулярно к ней.

С целью упрощения записи одновременно используются несколько ортогональных систем координат, которые показаны на фигуре. Линия действия силы тяжести определяет естественную лабораторную систему координат (x, y, z) .

С излучающей поверхностью, лежащей в плоскости $O\xi\eta$, которая без ограничения общности может быть получена путем поворота исходной системы координат (x, y, z) на угол φ вокруг оси y , связана локальная система координат (ξ, η, ζ) . При таком выборе оси ξ, η находятся в плоскости источника, а ось ζ – нормальна к ней.

С волновым конусом связана сопутствующая система (q, p, α) , ось q направлена вдоль волнового конуса, ось p – поперек, α – угловая переменная. Связи между указанными системами и вспомогательной цилиндрической системой (r, α, z) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + z \sin \varphi, & \eta &= y, & \zeta &= -x \sin \varphi + z \cos \varphi \\ x &= r \cos \alpha, & y &= r \sin \alpha & z &= z \\ p &= r \sin \theta - z \cos \theta, & q &= r \cos \theta + z \sin \theta\end{aligned}\quad (1.2)$$

Вид условия несжимаемости в системе (1.1) позволяет использовать тороидально-полоидальное разложение [6], которое двумя вспомогательными скалярными функциями Φ, Ψ определяет трехмерную скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{e}_z \Psi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z \Phi) \quad (1.3)$$

Введение потенциала, хотя и приводит к повышению порядка системы уравнений (1.1), существенно облегчает вычисления, поскольку позволяет исключить смешанные производные по координатам.

Исключая из системы (1.1) давление и используя выражение (1.3), получаем два уравнения для определения функции Φ и Ψ

$$(\omega^2 \Delta - N^2 \Delta_{\perp} - i\omega\nu\Delta^2)\Delta_{\perp}\Phi = 0 \quad (\omega - i\nu\Delta)\Delta_{\perp}\Psi = 0 \quad (1.4)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta_{\perp} = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$, $N = \sqrt{g/\Lambda}$ – частота плавучести. В силу выражения (1.3) решение уравнения $\Delta_{\perp}\Phi = 0$ отвечает изопикническому движению жидкости с нулевой вертикальной компонентой скорости. Поскольку такое движение также задается полоидальной частью потенциала Ψ , при анализе волновых возмущений, обусловленных смещениями частиц с горизонта нейтральной плавучести, решение уравнения $\Delta_{\perp}\Phi = 0$ можно не учитывать.

Кроме того, решение $\Delta_{\perp}\Psi = 0$ второго уравнения (1.4) описывает недиссипативное движение жидкости. Однако в уравнениях системы (1.1) имеется горизонтальная компонента силы трения $\rho_0\nu(\partial^2\mathbf{v}/\partial z^2)$, которая равна нулю только для движений вида $\mathbf{v} = \mathbf{a}(x, y) + z\mathbf{b}(x, y)$. Поскольку такие движения не могут возбуждаться ограниченными источниками, далее они рассматриваться не будут.

С учетом изложенного выше систему (1.1) запишем в виде

$$(\omega^2 \Delta - N^2 \Delta_{\perp} - i\omega\nu\Delta^2)\Phi = 0 \quad (\omega - i\nu\Delta)\Psi = 0 \quad (1.5)$$

Возмущения давления и плотности определяются выражениями

$$P = \rho_0(i\omega + \nu\Delta)\partial\Phi/\partial z, \quad \rho = -i\rho_0\Delta_{\perp}\Phi/\omega\Lambda$$

Для упрощения записи система (1.5) и граничные условия приводятся в локальной системе координат (ξ, η, ζ) , связанной с излучающей поверхностью (см. фигуру),

$$\begin{aligned}\omega^2 \Delta\Phi - N^2 \left[(\cos\varphi\partial_{\xi} - \sin\varphi\partial_{\zeta})^2 + \partial_{\eta}^2 \right] \Phi - i\omega\nu\Delta^2\Phi &= 0 \\ (\omega - i\nu\Delta)\Psi &= 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

На движущей части плоскости $\mathbf{v}|_{\zeta=0} = \mathbf{u}(\xi, \eta)$, и граничные условия для потенциалов принимают вид

$$\begin{aligned}\cos\varphi\partial_{\eta}\Psi + \left[-\sin\varphi(\partial_{\eta}^2 + \partial_{\xi}^2) + \cos\varphi\partial_{\xi\zeta}^2 \right] \Phi|_{\zeta=0} &= u_{\xi}(\xi, \eta) \\ -(\cos\varphi\partial_{\xi} - \sin\varphi\partial_{\eta})\Psi + \partial_{\eta}(\sin\varphi\partial_{\xi} + \cos\varphi\partial_{\zeta})\Phi|_{\zeta=0} &= u_{\eta}(\xi, \eta)\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$-\sin\varphi\partial_{\eta}\Psi + \left[-\cos\varphi(\partial_{\eta}^2 + \partial_{\xi}^2) + \sin\varphi\partial_{\xi\zeta}^2 \right] \Phi|_{\zeta=0} = u_{\zeta}(\xi, \eta)$$

при $\xi, \eta, \zeta \rightarrow \infty$ функции $\Phi, \Psi \rightarrow 0$.

Решения системы (1.6) находятся в виде разложения в интегралы Фурье по всему пространству. В связи с наличием симметрии волнового поля рассмотрение проводится только для верхнего полупространства ($\zeta > 0$).

2. Построение решения. Волновые векторы $\mathbf{k} = (k_\xi, k_\eta, k_\zeta)$ в разложениях для потенциалов

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} [A(k_\xi, k_\eta) \exp(ik_1(k_\xi, k_\eta)\zeta) + B(k_\xi, k_\eta) \exp(ik_2(k_\xi, k_\eta)\zeta)] \times \\ &\times \exp(ik_\xi \xi + ik_\eta \eta) dk_\xi dk_\eta \\ \Psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_\xi, k_\eta) \exp(ik_3(k_\xi, k_\eta)\zeta + ik_\xi \xi + ik_\eta \eta) dk_\xi dk_\eta \end{aligned} \quad (2.1)$$

в теории периодических внутренних волн ($\omega = \text{const}$) определяются решениями дисперсионного уравнения, соответствующего системе (1.1), и выражаются через две компоненты волнового вектора $k_i = k_i(k_\xi, k_\eta)$ ($i = 1, 2, 3$). Прямая подстановка выражений для потенциалов (2.1) в систему (1.6) дает следующие уравнения для нахождения всех компонент вектора \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} \omega^2(k_{1,2}^2 + k_\xi^2 + k_\eta^2) - N^2[(k_\xi \cos \varphi - k_{1,2} \sin \varphi)^2 + k_\eta^2] + i\omega v(k_{1,2}^2 + k_\xi^2 + k_\eta^2)^2 &= 0 \\ k_3^2 &= -\frac{\omega}{i v} - k_\xi^2 - k_\eta^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условия затухания возмущений на бесконечности выполняются, когда мнимые части корней дисперсионных уравнений больше нуля: $\text{Im} k_1 > 0$, $\text{Im} k_2 > 0$, $\text{Im} k_3 > 0$.

Коэффициенты A , B , C определяются из решений системы линейных уравнений, которая образуется при подстановке выражений (2.1) в граничные условия (1.8),

$$\begin{cases} A(k_\eta^2 \sin \varphi + k_1 \beta_1) + B(k_\eta^2 \sin \varphi + k_2 \beta_2) + iCk_\eta \cos \varphi = U_\xi \\ -Ak_\eta \gamma_1 - Bk_\eta \gamma_2 + iC\gamma_3 = U_\eta \\ A(k_\eta^2 \cos \varphi - k_\xi \beta_1) + B(k_\eta^2 \cos \varphi - k_\xi \beta_2) - iCk_\eta \sin \varphi = U_\zeta \end{cases} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\xi, \eta) \exp(-ik_\xi \xi - ik_\eta \eta) d\xi d\eta \\ \beta_i &= k_i \sin \varphi - k_\xi \cos \varphi, \quad \gamma_i = k_i \cos \varphi + k_\xi \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

($\mathbf{U}(k_\xi, k_\eta)$ – Фурье-образ скорости источника $\mathbf{u}(\xi, \eta)$).

Решения системы (2.4) могут быть представлены в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{31} \\ D_{21} & D_{22} & D_{32} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\xi \\ U_\eta \\ U_\zeta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

отражающей характер дисперсии трехмерных внутренних волн. Коэффициенты матрицы D_{ij} определяются выражениями

$$D_{11} = -ik_{\eta}^2 \left[k_{\xi} + \frac{1}{2}(k_2 - k_3) \sin 2\varphi \right] - ik_{\xi} \beta_2 \beta_3, \quad D_{12} = -ik_{\eta} (k_{\eta}^2 + \beta_2^2)$$

$$D_{13} = -ik_{\eta}^2 [(k_2 - k_3) \cos^2 \varphi + k_3] - ik_2 \beta_2 \beta_3$$

$$D_{21} = -ik_{\eta}^2 \left[k_{\xi} + \frac{1}{2}(k_1 - k_3) \sin 2\varphi \right] - ik_{\xi} \beta_1 \beta_3, \quad D_{22} = -ik_{\eta} (k_{\eta}^2 + \beta_1^2)$$

$$D_{23} = -ik_{\eta}^2 [(k_1 - k_3) \cos^2 \varphi + k_3] - ik_1 \beta_1 \beta_3$$

$$D_{31} = (k_{\eta}^2 \cos^2 \varphi + k_{\xi}^2) (k_1 - k_2) k_{\eta}$$

$$D_{32} = (k_1 - k_2) \left[-k_{\xi} \beta_1 \beta_2 + k_{\eta}^2 \left(\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \sin 2\varphi + k_{\xi} \cos 2\varphi \right) \right]$$

$$D_{33} = (k_1 - k_2) k_{\eta} \sin \varphi \left[-k_{\eta}^2 \cos \varphi + k_{\eta} (k_1 \gamma_2 + k_{\xi} \beta_2) \right]$$

$$\Delta = (k_1 - k_2) \left\{ -k_{\xi} \beta_1 \beta_2 \beta_3 + ik_{\eta}^4 \cos \varphi + ik_{\eta}^2 \left[\beta_3 (\gamma_1 \sin \varphi + \beta_2 \cos \varphi) + \gamma_1 \beta_1^2 - \gamma_2 \beta_2^2 \right] \right\}$$

Выражения (2.1), в которых коэффициенты $A(k_{\xi}, k_{\eta})$, $B(k_{\xi}, k_{\eta})$ и $C(k_{\xi}, k_{\eta})$ определяются формулами (2.5) и являются общим решением системы (1.1), точно удовлетворяющим граничным условиям (1.7). Семейство решений (2.1) включает не только волны, но и сопутствующие периодические движения, свойства которых определяются соотношениями между действительными и мнимыми частями корней дисперсионных уравнений (2.2).

3. Решение дисперсионных уравнений. Решения дисперсионных уравнений (2.2) при учете малости вязкости находятся стандартными методами [7]

$$k_1 = k_1^{(0)} + i\nu k_1^{(1)}$$

$$k_1^{(0)} = \frac{k_{\xi} \sin 2\varphi + 2\kappa \cos \theta}{2\mu}, \quad k_1^{(1)} = \frac{\sin \theta (k_{\xi} \sin \varphi \cos \theta + \kappa \cos \varphi)^4}{2N\mu^4 \kappa \cos \theta}$$

$$k_2 = \frac{i + \text{sign} \mu}{\delta_{\varphi}} - \frac{k_{\xi} \sin 2\varphi}{2\mu} + k_2^{(1)} \delta_{\varphi}$$

$$k_2^{(1)} = \frac{i + \text{sign} \mu k_{\xi}^2 (\mu (\cos^2 \varphi - \sin^2 \theta) + 2 \sin \varphi \cos \varphi) + k_{\eta}^2 \mu \cos^2 \theta}{6\sqrt{2} \mu^2} \quad (3.1)$$

$$k_3 = \frac{i+1}{\delta_{\nu}} + \frac{i+1}{4} \delta_{\nu} (k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2)$$

$$\kappa = \sqrt{k_{\xi}^2 \sin^2 \theta - \mu k_{\eta}^2}, \quad \mu = \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta, \quad \theta = \arcsin(\omega/N)$$

$$\delta_{\varphi} = \sqrt{\frac{2\nu \sin \theta}{N|\mu|}}, \quad \delta_{\nu} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

где θ – угол, который волновой конус составляет с горизонтом, δ_{φ} – толщина внутреннего пограничного слоя, впервые рассчитанная для задач в двумерной постановке [2], δ_{ν} – толщина периодического (стоксова) пограничного слоя, существующего и в однородной вязкой жидкости [5].

Формулы (3.1) описывают два типа движения: крупномасштабное с характерным размером $\lambda_c = 2\pi/k$ ($\text{Re}k_1 \gg \text{Im}k_1$) и мелкомасштабное с характерной толщиной $O(\sqrt{\nu/\omega})$ ($\text{Re}k_{2,3} \sim \text{Im}k_{2,3}$).

В рассматриваемом приближении корень k_1 отличается от волнового числа для идеальной жидкости только малой мнимой поправкой. Действительная часть k_1 определяет длину излучаемой волны, мнимая часть – пространственную структуру пучка волн и величину вязкого затухания. Учитывая соотношения (2.1), (3.1), замечаем, что внутренние волны характеризуются спектральной плотностью $A(k_\xi, k_\eta)$.

Корни k_2 и k_3 описывают периодические пограничные течения. Выражение с коэффициентом $B(k_\xi, k_\eta)$ определяет внутренний волновой пограничный слой толщиной δ_φ . Этот тип периодического движения является специфическим для стратифицированной жидкости и не имеет аналогов в однородной среде.

Коэффициент $C(k_\xi, k_\eta)$ задает вязкий периодический пограничный слой толщиной δ_ν , существующий как в стратифицированной, так и в однородной жидкости [5], где в трехмерном случае он является вырожденным (кратный корень в соответствующем решении дисперсионного уравнения).

При переходе к однородной жидкости ($N \rightarrow 0$, а ν – конечная величина) корни дисперсионных уравнений имеют вид

$$k_1 = i\sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}, \quad k_2 = k_3 = \sqrt{i\omega/\nu - k_\xi^2 - k_\eta^2}$$

Слияние корней k_2 и k_3 в точном решении при переходе к однородной жидкости свидетельствует о вырождении задачи. Обратный переход от однородной жидкости к стратифицированной произвести равномерным образом не удастся, поскольку при этом происходит расщепление вырожденного периодического волнового пограничного слоя на два других с различной зависимостью своих характеристик от параметров задачи.

При переходе к однородной жидкости приближенные решения дисперсионных уравнений (3.1) принимают вид $k_2 = -k_\xi \sin 2\varphi / (2\mu)$, $k_3 = 0$. Различия в структуре приводимых выражений – следствие применения регулярных и асимптотических методов решения дисперсионных уравнений. С последними связан парадокс “критических углов” в теории внутренних волн, который исчезает при использовании регулярных методов во всем диапазоне угловых параметров задачи (θ, φ) [8].

4. Анализ общего решения в приближении малой вязкости. Выражения для коэффициентов A, B, C в (2.6) значительно упрощаются в случае малой вязкости и принимают вид

$$A(k_\xi, k_\eta) \approx \frac{1 - i \text{sign} \mu k_\xi}{2} \frac{\delta_\varphi^2 U_\xi}{\chi} + \frac{1 - i k_\eta}{2} \frac{\delta_\nu^2 U_\eta}{\chi} - \frac{1}{\chi} U_\zeta \quad (4.1)$$

$$B(k_\xi, k_\eta) \approx \frac{i \sin \theta}{|\mu| \sin \varphi} \delta_N^2 U_\xi + \frac{1 + i \sqrt{\sin \theta} k_\eta (k_\eta^2 + \sigma_1^2)}{\sqrt{2} |\mu| \sin^2 \varphi} \frac{\delta_N^3 U_\eta}{\chi} + \frac{i \sin \theta}{|\mu| \sin \varphi} \frac{k_\eta^2 \sin \varphi + k_1^{(0)} \sigma_1}{\chi} \delta_N^2 U_\zeta \quad (4.2)$$

$$C(k_\xi, k_\eta) \approx - \frac{i + \text{sign} \mu}{1 + i} \frac{|\mu|^{3/2} k_\eta (k_\eta^2 \cos^2 \varphi + k_\xi^2)}{\sin^2 \varphi} \frac{\delta_N^2 U_\xi}{\chi} - \frac{i + 1}{\sqrt{2}} \frac{\text{sign} \mu}{\sin \varphi} \delta_N U_\eta - \frac{i + 1}{\sqrt{2}} \frac{\text{sign} \mu k_\eta (k_1^{(0)} \cos \varphi + k_\xi \sin \varphi)}{\sin \varphi} \frac{\delta_N U_\zeta}{\chi} \quad (4.3)$$

где

$$\chi = k_{\eta}^2 \cos \varphi - k_{\xi} \sigma_1$$

$$\sigma_1 = k_1^{(0)} \sin \varphi - k_{\xi} \cos \varphi = (k_{\xi} \cos \varphi \sin^2 \theta + k \cos \theta \sin \varphi) / \mu$$

Коэффициенты A , B , C в явном виде задаются спектральными представлениями U_{ξ} , U_{η} , U_{ζ} , т.е. формой источника и характером его движения.

В приводимых выше выражениях единственным параметром длины является универсальный микромасштаб периодических движений $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$, характерный внутренний масштаб задачи, который определяется только свойствами исследуемой среды – кинематической вязкостью и частотой плавучести. Поскольку данный параметр присутствует во всех выражениях (4.1)–(4.3), он является фундаментальным в теории внутренних волн в вязкой жидкости. На практике этот масштаб должен быть выделенным в структуре пространственных спектров всех типов движений в устойчиво стратифицированных средах, в которых всегда присутствует волновая компонента.

Для получения выражений, допускающих прямое сравнение с лабораторным экспериментом, в качестве излучателя внутренних волн рассматривается прямоугольник с размерами сторон a , b , причем, по аналогии с предложенным ранее подходом [4], рассчитываются два вида генераторов внутренних волн: *фрикционный*, когда пластина колеблется вдоль своей поверхности в плоскости (ξ, η) , и *поршневой*, когда вектор смещений ортогонален к плоскости источника.

5. Поля волн от различных источников. Принимая без ограничения общности, что прямоугольник смещается только вдоль продольной оси ξ (см. фигуру), т.е.

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_{\xi}, \quad u = u_0 \vartheta(a/2 - |\xi|) \vartheta(b/2 - |\eta|) \quad (5.1)$$

и подставляя выражение (5.1) в соотношения (4.1) – (4.3), получаем значения скоростей движения жидкости в уходящей волне и пограничных слоях на фрикционном источнике. Для удобства дальнейшего анализа скорость представлена в виде суперпозиции волновой и погранслойной компонент $\mathbf{v} = \mathbf{v}^w + \mathbf{v}^b$. Приближенные выражения для компонент \mathbf{v}^w записаны на больших расстояниях от источника ($q \gg a, b$), с учетом малости вязкости ($\delta_N \ll \lambda_c$) и размеров источника ($a, b \ll L_v$), где $L_v = (\nu \Lambda / N)^{1/3}$ – вязкий волновой масштаб. При расчете пограничных слоев \mathbf{v}^b используется только приближение малой вязкости. Дополнительно предполагается, что $\theta > \varphi$, т.е. волновой конус не пересекается излучающей поверхностью (см. фигуру). В противном случае, когда часть волны отражается от излучающей поверхности, решение теряет аксиальную симметрию, и выражения существенно усложняются.

Асимптотические выражения для скоростей волновой компоненты движений (интегралов (2.1) при учете решений дисперсионных уравнений (3.1) с функцией источника (5.1)) в сопутствующей системе координат запишем в виде

$$(v_x^w, v_y^w, v_z^w) \approx A_1^w (\sin 2\theta \cos \alpha, 2 \cos^2 \theta \cos \alpha, 2 \sin^2 \theta) F_1(p, q) \quad (5.2)$$

$$A_1^w = \frac{(i + \text{sign} \mu)(i + 1) u_0 a b \delta_N}{4 \sqrt{|\mu|} (2\pi)^{3/2}}$$

Общий множитель A_1^w определяется только параметрами излучателя (его размерами и амплитудой скорости) и предельным масштабом δ_N . Волновая функция

$$F_1(p, q) = \frac{\cos \varphi \sin \theta - \sin(\pi/4 - \alpha) \sin \varphi \cos \theta}{\sqrt{p \sin \theta + q \cos \theta}} \int_0^{+\infty} k_p^{3/2} \exp\left(ik_p p - \frac{\nu k_p^3 q}{2N \cos \theta}\right) dk_p$$

является сверткой решения для точечного излучателя [3] с функцией источника.

Анализ вида волновой функции показывает, что, как и в двумерном случае, источник малого размера ($a, b, \ll L_v$) порождает одномодальный пучок. Распределение скоростей в (5.2) определяется тригонометрическими функциями. При этом аксиальная симметрия фазовых характеристик движений (форма волнового конуса) сохраняется при любых наклонах излучающей поверхности при $\theta > \varphi$. Однако амплитуда волны изменяется не только вдоль образующей, но и по направляющей волнового конуса (множитель $\sin(\pi/4 - \alpha)$). Максимальное значение модуля вертикальных смещений $h_z(0, q)$ в центре одномодального пучка достигается при $\alpha = 3\pi/4$ и составляет

$$h_z(0, q) = \frac{u_0 G a b}{6} \sqrt{\frac{v \cos \theta (2N \cos \theta)^{5/6}}{2\pi q N}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right), \quad G = \frac{\operatorname{tg} \theta \sin(\varphi + \theta)}{4\pi^2 N \sqrt{|\mu|}} \quad (5.3)$$

(Γ – гамма-функция).

Таким образом, скорость смещения частиц, пропорциональная скорости и площади источника, также в явном виде зависит от вязкости жидкости, частоты волны и частоты плавучести. Угловая зависимость $\sin(\varphi + \theta)$ отражает геометрию задачи. Формула (5.3) с точностью до геометрического фактора G и выражения для площади излучателя совпадает с одним из решений, приведенных в полученной ранее таблице результатов [4].

Значения скоростей в пограничных слоях принимают наиболее простой вид в локальной системе координат, связанной с излучающей поверхностью ($\zeta = 0$):

$$\begin{aligned} v_x^b &\approx u_0 \operatorname{sign} \mu \cos \varphi \exp\left(\frac{i\zeta \operatorname{sign} \mu}{\delta_\varphi} - \frac{\zeta}{\delta_\varphi}\right) - u_0 \frac{(i + \operatorname{sign} \mu)|\mu|^{3/2}}{(i + 1)\pi^2 \sin^2 \varphi} \delta_N \exp\left(\frac{i\zeta}{\delta_v} - \frac{\zeta}{\delta_v}\right) W_1 \\ v_y^b &\approx -u_0 \frac{i + \operatorname{sign} \mu}{i + 1} \frac{\mu^2 \delta_\varphi^2}{\pi^2} \exp\left(\frac{i\zeta}{\delta_v} - \frac{\zeta}{\delta_v}\right) W_2 \\ v_z^b &\approx -u_0 \operatorname{sign} \mu \sin \theta \sin \varphi \exp\left(\frac{i\zeta \operatorname{sign} \mu}{\delta_\varphi} - \frac{\zeta}{\delta_\varphi}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} i k_\eta (k_\eta^2 \cos \varphi + k_\xi^2) W_v(k_\xi, k_\eta) dk_\xi dk_\eta \\ W_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (k_\eta^2 \cos \varphi + k_\xi^2) W_v(k_\xi, k_\eta) dk_\xi dk_\eta \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$W_v(k_\xi, k_\eta) = \frac{1}{\chi} \sin \frac{k_\xi a}{2} \sin \frac{k_\eta b}{2} \exp\left\{ i k_\xi \xi + i k_\eta \eta + \frac{i-1}{4} \delta_v \zeta (k_\xi^2 + k_\eta^2) \right\}$$

Окончательные выражения для множителей W_1, W_2 , описывающих зависимость свойств пограничных слоев от параметров a, b, δ_v , вычисленные асимптотическими методами, здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Пространственная структура пограничных слоев описывается экспоненциальными множителями, фигурирующими в выражениях (5.4), и определяется двумя поперечными масштабами, характеризующими периодическое течение Стокса (δ_v [5]) и внутреннее пограничное течение (δ_φ , как и приведенные ранее решения [4]), содержащими общий множитель δ_N .

Полное периодическое пограничное течение на источнике существенно анизотропное, причем наиболее сложный вид имеет компонента скорости в направлении оси x . Здесь движение характеризуется всей совокупностью микромасштабов, включая универсальный микромасштаб δ_N . Тогда $\delta_v = f_v(\theta)\delta_N$, $\delta_\varphi = f_\varphi(\varphi, \theta)\delta_N$, а функции

$f_v(\theta), f_\varphi(\varphi, \theta)$ зависят только от геометрии источника и нормированной частоты волны. В рассматриваемом трехмерном случае

$$f_\varphi(\theta, \varphi) = \sqrt{2 \sin \theta / |\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|}, \quad f_v(\theta) = \sqrt{2 / \sin \theta} \quad (5.6)$$

а для изотропного излучателя – вертикального цилиндра – выражение для функции $f_\varphi(\varphi, \theta)$ существенно упрощается: $f_\varphi(\varphi, \theta) = \operatorname{tg} \theta$ [4].

Все приведенные выражения расходятся в критическом случае ($\theta = \pm \varphi$), когда волновой конус касается одной стороной излучающей поверхности, что является следствием использования приближенных решений дисперсионных уравнений (3.1). Из структуры точных выражений следует отсутствие особенностей во всем диапазоне угловых параметров, включая критический случай, как и в задаче отражения волновых пучков [8].

Когда излучающая поверхность совершает колебания вдоль оси ζ , по нормали к границе, т.е.

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_\zeta \quad (5.7)$$

реализуется излучатель, возбуждающий волны как в вязкой, так и в идеальной стратифицированной жидкости (источник поршневого типа или переменного расхода). Значения волновых компонент скорости находятся при подстановке выражения (5.7) в соотношение (4.1). Получаем

$$(v_x^w, v_y^w, v_z^w) \approx A_2^w (\sin 2\theta \cos \alpha, 2 \cos^2 \theta \cos \alpha, 2 \sin^2 \theta) F_2(p, q) \quad (5.8)$$

$$A_2^w = -\frac{(1-i) u_0 ab}{8\pi^{3/2} \sqrt{\sin \theta}}$$

Множитель A_2^w зависит только от параметров источника (размеров, скорости и нормированной частоты), а волновая функция имеет вид

$$F_2(p, q) = \frac{1}{\sqrt{p \sin \theta + q \cos \theta}} \int_0^{+\infty} k_p^{1/2} \exp\left(ik_p p - \frac{vk_p^3 q}{2N \cos \theta}\right) dk_p$$

В этом случае вертикальные смещения, как и фаза волны, аксиально-симметричны при произвольном наклоне излучающей поверхности ($\theta > \varphi$). Максимальное значение модуля вертикальных смещений в центре пучка

$$h_z(0, q) \approx \frac{u_0 ab}{12\pi} \sqrt{\frac{\sin \theta}{vN}} \frac{1}{q} \quad (5.9)$$

растет с увеличением площади и скорости источника и убывает обратно пропорционально расстоянию.

Аналогичным образом вычисляются выражения для экспоненциально убывающих пограничных слоев, пространственная структура которых в произвольном случае характеризуется двумя масштабами δ_v, δ_φ (как и для фрикционного источника). Получим

$$v_x^b \approx -\frac{u_0}{\pi^2} \operatorname{sign} \mu \cos \varphi \exp\left(\frac{i\zeta \operatorname{sign} \mu}{\delta_\varphi} - \frac{\zeta}{\delta_\varphi}\right) W_6 - \frac{(1+i) u_0 \operatorname{sign} \mu}{\sqrt{2} \pi^2 \sin \varphi} \exp\left(\frac{i-1}{\delta_v} \zeta\right) W_7$$

$$v_y^b \approx -\frac{u_0}{\pi^2} \operatorname{sign} \mu \sqrt{\sin \theta} \exp\left(\frac{i-1}{\delta_v} \zeta\right) W_8 - \frac{(1+\operatorname{sign} \mu) u_0 \delta_\varphi \operatorname{ctg} \varphi}{2\pi^2} \exp\left(\frac{i \operatorname{sign} \mu - 1}{\delta_\varphi} \zeta\right) W_9 \quad (5.10)$$

$$v_z^b \approx \frac{u_0}{\pi^2} \operatorname{sign} \mu \sin \varphi \exp\left(\frac{i\zeta \operatorname{sign} \mu}{\delta_\varphi} - \frac{\zeta}{\delta_\varphi}\right) W_{10}$$

Выражения для эталонных функций W_6, \dots, W_{10} типа (5.5) не приводятся в силу их громоздкости.

На линии максимальных смещений ($\alpha = 3\pi/4$) на волновом конусе с углом при вершине $\theta = \arccos(\omega/N)$ амплитуды волн для рассматриваемых источников (5.3) и (5.9) становятся равными на расстоянии

$$q_0 = \frac{\sin^3(\varphi + \theta) \sqrt{\sin\theta \operatorname{tg}\theta}}{(2\pi)^{9/2} |\mu|} \delta_\varphi \Gamma^3\left(\frac{5}{6}\right) \quad (5.11)$$

На малых расстояниях, фактически в погранслойной или переходной области ($q < q_0$), где преобладает вклад множителя, характеризующего геометрию излучателя, более эффективным является фрикционный излучатель. На больших расстояниях от источника, в волновой области ($q > q_0$), картина возмущений определяется геометрическим ослаблением, и источник поршневого типа оказывается более эффективным, что согласуется с энергетическими оценками [9].

6. Заключение. Построенное по предложенной ранее методике [4] полное решение трехмерной задачи о генерации возмущений вязкой непрерывно стратифицированной жидкости частью наклонной плоскости, совершающей периодические движения в произвольном направлении, описывает разномасштабные движения – трехмерные пучки внутренних волн и два типа пограничных слоев. Толщина одного из них, аналога периодического течения Стокса однородной жидкости, определяется кинематической вязкостью и частотой волны: $\delta_v = f_v(\theta)\delta_N$. Толщина другого – внутреннего пограничного слоя, не имеющего аналога в однородной жидкости, дополнительно зависит от геометрии задачи: $\delta_\varphi = f_\varphi(\varphi, \theta)\delta_N$. Входящий в эти выражения универсальный микромасштаб $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$ определяется кинематической вязкостью и частотой плавучести среды. Тригонометрическая функция $f_\varphi(\varphi, \theta)$ рассчитана для наклонной плоскости (первое выражение в (5.6)) и для вертикального цилиндра [4] ($f_\varphi(\varphi, \theta) = \operatorname{tg}\theta$). При переходе к вязкой однородной жидкости вязкий и внутренний пограничные слои сливаются в единый вырожденный пограничный слой.

В силу взаимосвязанности всех элементов семейства периодических движений в непрерывно стратифицированной жидкости время распада сингулярных компонент (пограничных слоев на твердых поверхностях и внутренних пограничных течений на поверхностях разрыва плотности и ее производных в толще жидкости) определяется продолжительностью существования всего набора движений, т.е. периодом затухания крупномасштабных волн.

В практически важном случае экспоненциальной стратификации и в приближении малой вязкости проведена асимптотическая оценка точного решения для двух типов источников – фрикционного и поршневого. Выражения (5.2), (5.4), (5.8), (5.10), описывающие волновые пучки и два семейства пограничных слоев, точно удовлетворяют граничным условиям задачи, не содержат дополнительных подгоночных параметров и могут непосредственно использоваться для сравнения с лабораторными экспериментами и натурными наблюдениями. В предельных случаях полученные решения непрерывно переходят в ранее построенные решения двумерной задачи [4]. При полном учете молекулярных эффектов структура пограничных слоев усложняется как за счет формирования течений, индуцированных диффузией [10], так и вследствие расщепления диффузионных и скоростных пограничных слоев при несовпадающих значениях кинетических коэффициентов – кинематической вязкости и диффузии стратифицирующей компоненты. При решении нелинейных уравнений необходимо учитывать взаимодействие всех элементов периодических движений, как внутренних волн, так и всех типов пограничных течений.

Авторы посвящают статью памяти Ю. В. Кистовича, скончавшегося после непродолжительной тяжелой болезни 27 декабря 2001 г.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-05-65383) и Министерства образования Российской Федерации (Федеральная целевая программа "Интеграция", Я00-58).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurley D.G., Keady G. J. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 351. P. 119–138.
2. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Точное решение одной линеаризованной задачи излучения монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // *ПММ.* 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 611–619.
3. Lighthill J. *Waves in Fluid.* Cambridge: Univ. Press, 1978 = Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // *ПМТФ.* 2001. № 1. С. 52–61.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 736.
6. Holm D.D., Kimura Y. Zero-helicity Lagrangian kinematics of three-dimensional advection // *Phys. Fluids.* 1991. V. A3. № 5. P. 1033–1038.
7. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques.* N. Y., etc.: Wiley, 1981 = Найфэ, А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
8. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // *ПММ.* 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 607–613.
9. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Излучение внутренних волн при периодическом движении источников // *ПМТФ.* 1983. № 4. С. 81–88.
10. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // *ПММ.* 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 50–56.