

УДК 533.6

© 2003 г. В. А. Кукушкин

**ОБ ОДНОМ ПРОЦЕССЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕОГРАНИЧЕННОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

С использованием идей и аналитических методов А.Ф. Сидорова для решения задачи о безударном сжатии газа под действием поршня предлагается новый параметрический вид решения уравнения для автомодельного потенциала скорости газа. Это позволяет свести задачу о построении течения с неограниченным ростом газодинамических величин к решению задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения с ограниченным промежутком интегрирования. Полученное таким образом решение уравнений газовой динамики может представлять интерес для построения процесса неограниченного сжатия идеального газа, в начальный момент времени покоящегося внутри тела вращения типа “тарелки”, оно описывает течение газа в определенной части сжимаемого объема. Аналитически установлены асимптотические оценки газодинамических величин.

Были получены различные классы точных решений уравнений газовой динамики, которые использовались для построения процессов неограниченного безударного сжатия идеального газа, покоящегося в начальный момент времени внутри некоторого объема [1–4]. Как правило, эти решения описывают течение газа только в некоторой части сжимаемого объема, в оставшейся части решения приходится определять численно. Однако в данном случае можно провести качественный анализ свойств течений газа там, где они построены аналитически.

Форма начального объема газа, которая рассматривается в данной работе, по-видимому, ранее аналитически не исследовалась. Численное решение для подобной, даже более сложной начальной конфигурации было получено<sup>1</sup> разностным методом.

Представляет интерес задача о нахождении точного решения, описывающего течение газа хотя бы для части сжимаемого объема. Общий подход к построению решения – такой же, как предложенный А.Ф. Сидоровым [4]. Далее по аналогии с известными методами [5, 6]<sup>2</sup> аналитически исследуются асимптотические свойства построенного точного решения в случае, когда показатель адиабаты  $\gamma$  взят из диапазона (1, 3). Проверка непрерывного примыкания полученного течения к области покоящегося газа проводится путем численного интегрирования обыкновенного уравнения, приведены примеры численных расчетов для  $\gamma = 5/3$  и  $\gamma = 7/5$ .

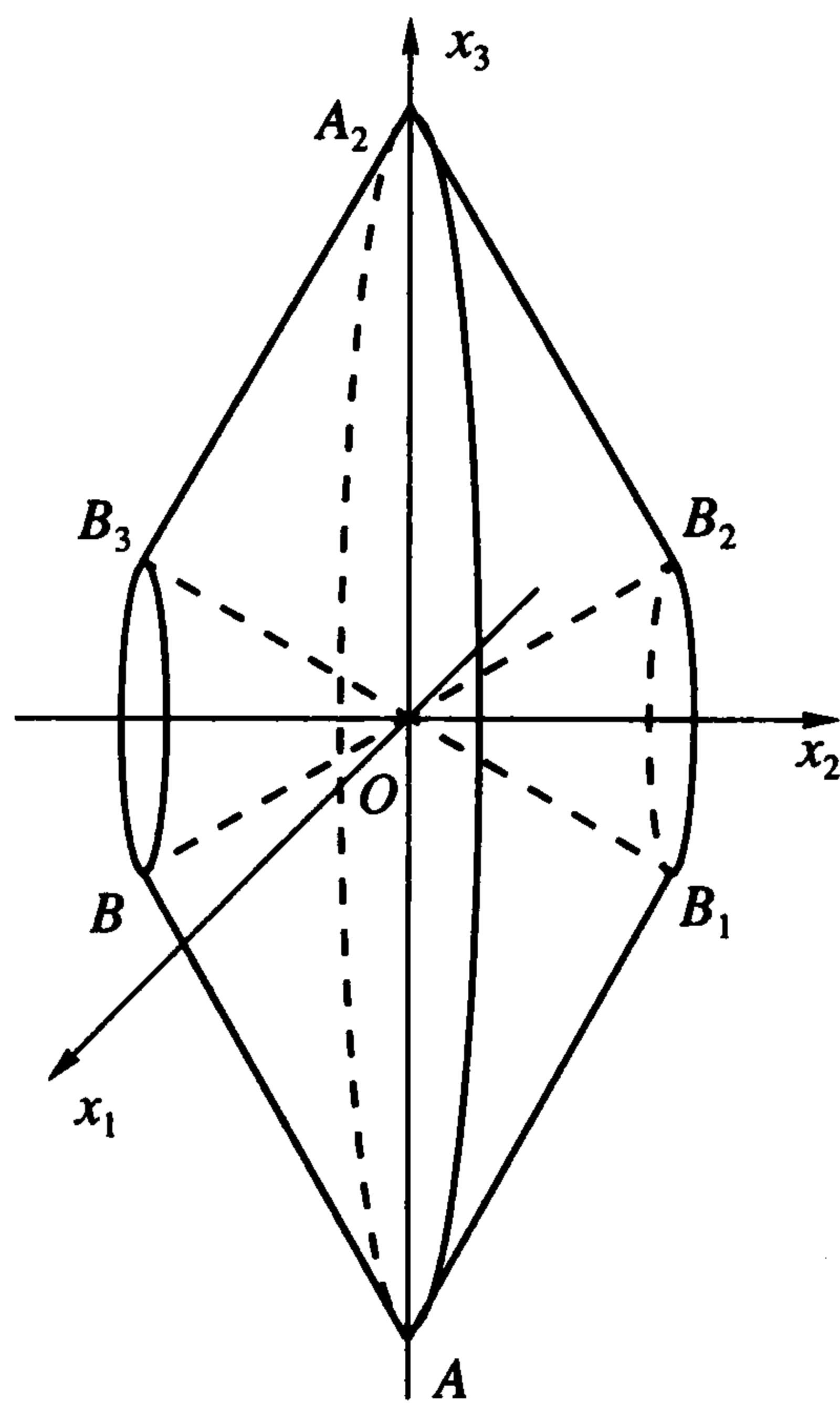
**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать потенциальные течения однородного совершенного невязкого и нетеплопроводного газа. Таким течениям соответствует уравнение состояния

$$p = A\rho^\gamma, \quad A = \text{const} > 0, \quad \gamma = \text{const} > 1$$

Пусть в начальный момент времени газ покоится внутри тела вращения, качественный вид которого изображен на фиг. 1. Ось  $Ox_2$  – ось симметрии, плоскость  $Ox_1x_3$  – плоскость симметрии. Данный начальный объем получен из тела вращения с образующей  $ABB_3A_2B_2B_1A$  удалением конуса  $BB_3OB_1B_2$ .

<sup>1</sup> Гао Я.М. Расчетная реализация безударного сжатия и термоядерного горения двумерных (цилиндрических и осесимметричных) конфигураций DT-газа: Препринт № 21. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2000.

<sup>2</sup> См. также: Кукушкин В.А. Неавтомодельное сжатие тетраэдра: Екатеринбург: 2001. 20 с. ИММ УрО РАН. – Деп. в ВИНТИ 20.02.2001, № 422–В2001.



Фиг. 1

Введем обозначения

$$r = -\sqrt{x_1^2 + x_3^2}, \quad z = x_2$$

Будем рассматривать осесимметричные течения, тогда все газодинамические величины зависят только от переменных  $r, z$ , причем достаточно рассмотреть часть плоскости  $Ozr$  (фиг. 2), ограниченную условиями  $r < 0, z < 0$ . В начальный момент времени  $t = -1$  газ покоился в треугольнике  $ABO$ , угол  $B = \pi/2$ , отрезок  $AO$  – неподвижная непроницаемая стенка, линия  $ABO$  – начальное положение сжимающего поршня, который в некоторый момент времени  $t \in (-1, 0)$  принимает вид  $DEFHO$ . В треугольнике  $GHO$  в этот момент времени находится невозмущенный газ.

Перейдем к безразмерным переменным, в которых скорость звука в невозмущенном газе равна единице, длину стенки  $BO$  выбираем равной единице, тогда в финальный момент времени  $t = 0$  звуковое возмущение  $GH$  приходит в точку  $O$ . Таким образом, произвол в задании начальной геометрии сжимаемого объема – длина отрезка  $AO$ .

Поставим задачу о нахождении точного решения, описывающего течение вдали от стенок  $BOB_1$  и  $B_1OB_2$  (фиг. 1) – в области, примыкающей к  $AA_2$  и ограниченной характеристическими поверхностями. На фиг. 2 указанной части сжимаемого объема соответствует область  $DEG$  ( $GE$  – характеристическая поверхность). Среди решений будем искать такие, которые без образования ударных волн приводят к неограниченному росту плотности при приближении к финальному моменту времени.

Согласно известным результатам [3, 4] потенциал скорости можно искать в виде

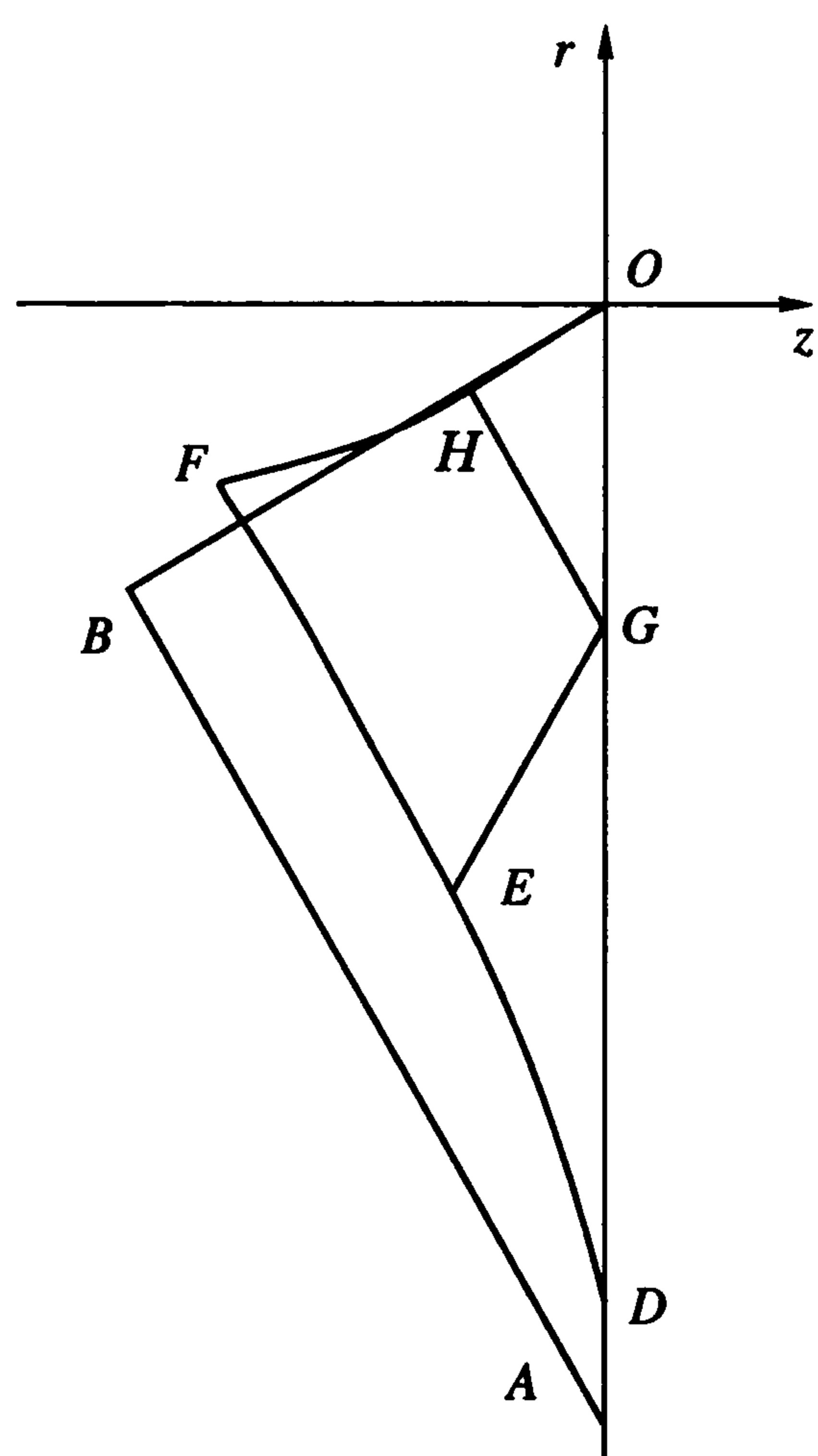
$$\Phi(t, z, r) = (t + 1)K - t(\Gamma(\xi, \eta) - 1/2(\xi^2 + \eta^2)), \quad K = \text{const}$$

$\xi = z/t, \eta = r/t$  – автомодельные переменные. Для нахождения функции  $\Gamma$  надо решать уравнение

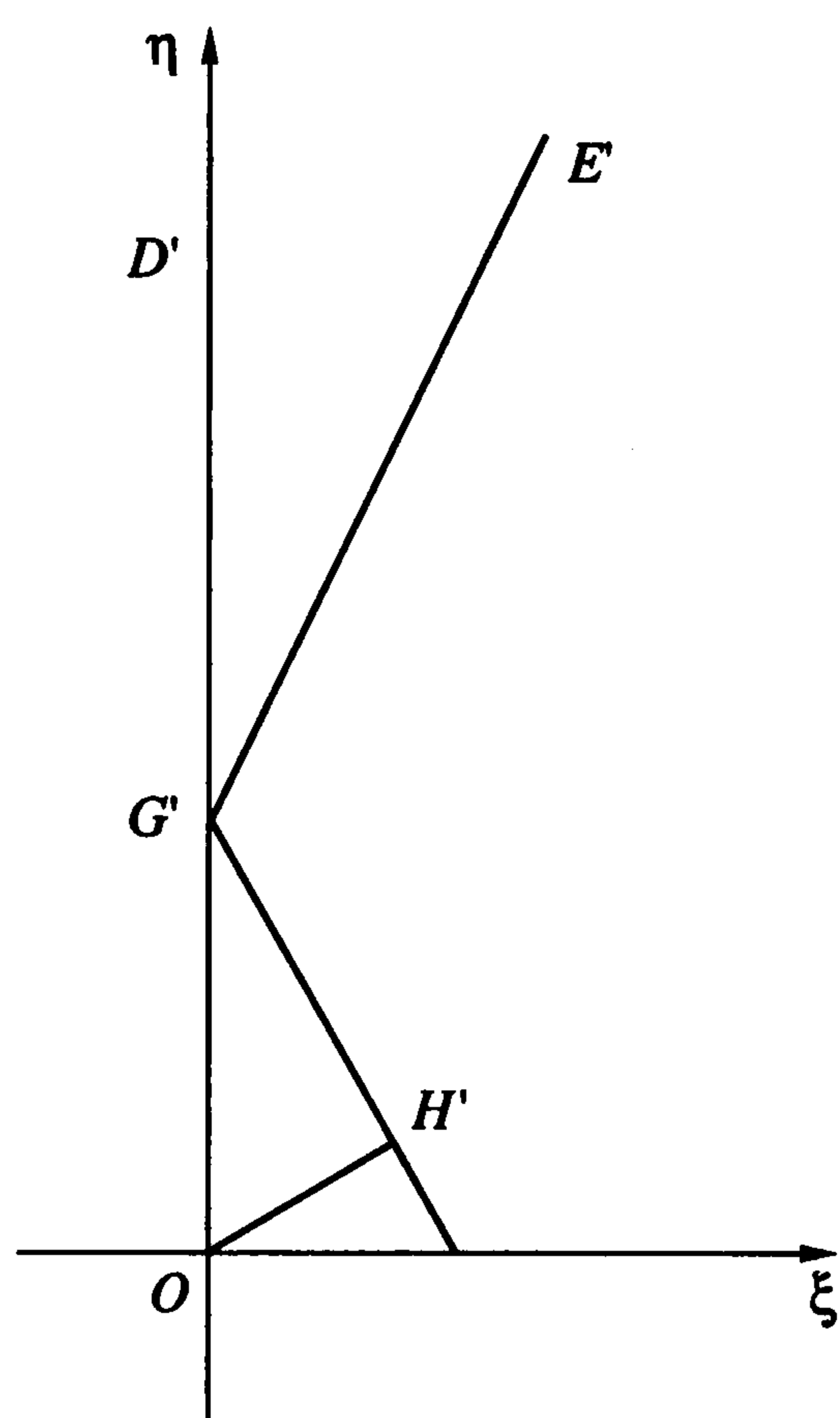
$$\Gamma_\xi^2(\Gamma_{\xi\xi} - 1) + 2\Gamma_\xi\Gamma_\eta\Gamma_{\xi\eta} + \Gamma_\eta^2(\Gamma_{\eta\eta} - 1) - c^2(\Gamma_{\xi\xi} + \Gamma_{\eta\eta} - 3 + \eta^{-1}\Gamma_\eta) = 0 \quad (1.1)$$

где квадрат скорости звука равен

$$c^2 = \kappa(\Gamma - 1/2(\Gamma_\xi^2 + \Gamma_\eta^2)), \quad \kappa = \gamma - 1 \quad (1.2)$$



Фиг. 2



В плоскости автомодельных переменных решение уравнения (1.1) надо построить в неограниченной области  $D'G'E'$  (фиг. 3),  $G'E'$  – характеристика,  $E'$  и  $D'$  – бесконечно удаленные точки. Из непрерывного примыкания течения к области покоя в точке  $G' = (0, \eta_0)$  следуют равенства

$$\Gamma(0, \eta_0) = \kappa^{-1} - 1/2\eta_0^2, \quad \Gamma_\eta(0, \eta_0) = \eta_0 \quad (1.3)$$

Условие непротекания через линию симметрии  $DG$  можно записать в виде

$$\Gamma_\xi(0, \eta) = 0 \quad (1.4)$$

Будем искать решение вида  $\Gamma = \Gamma(\eta)$ . В этом случае исходная задача сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Gamma_\eta^2(\Gamma_{\eta\eta} - 1) - c^2(\Gamma_{\eta\eta} - 3 + \eta^{-1}\Gamma_\eta) = 0, \quad c^2 = \kappa(\Gamma - 1/2\Gamma_\eta^2) \quad (1.5)$$

с начальными данными (1.3); условие (1.4) выполняется автоматически.

**2. Сведение уравнения для потенциала скорости к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.** Предлагается следующий вид решения уравнения (1.5):

$$\eta(a) = \eta_0 \exp\left(\int_a^{a_0} \frac{da}{s(a)}\right), \quad \Gamma(a) = a\eta^2 \quad (2.1)$$

Постоянные  $\eta_0$  и  $a_0$  будут определены позже. Выражения для производных функций  $\Gamma$

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \left(\frac{d\eta}{da}\right)^{-1} \frac{d\Gamma}{da} = (2a - s)\eta \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{d\eta^2} = \left(\frac{d\eta}{da}\right)^{-1} \frac{d}{da} \left(\frac{d\Gamma}{d\eta}\right) = s \frac{ds}{da} - 3s + 2a$$

подставим в уравнение (1.5). После упрощений получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $a(s)$

$$\frac{da}{ds} = G(s, a) = \frac{s((2a - s)^2(2 + \kappa) - 2\kappa a)}{2(2a - 3s - 1)(2a - s)^2 + \kappa(4(a - s) - 3)((2a - s)^2 - 2a)} \quad (2.3)$$

и рассмотрим для него задачу Коши с начальным условием  $a(0) = \tilde{a} > 0$  при разных значениях  $\tilde{a}$ .

При  $s = 0$  знаменатель правой части уравнения (2.3) обращает в нуль только при

$$a = 0, \frac{1}{2}, a_*; \quad a_* = \frac{3\kappa}{4(\kappa + 1)} \quad (2.4)$$

При остальных значениях  $\tilde{a}$  выполняется равенство  $G(0, \tilde{a}) = 0$ ; значит, в окрестности точки  $s = 0$  справедливо представление

$$a = \tilde{a} + A_1 s^2 + o(s^2), \quad A_1 = \text{const} \neq 0$$

Отсюда следует

$$s \sim |A_1|^{-1/2} |a - \tilde{a}|^{1/2}, \quad \left| \int_{\tilde{a}}^{a_0} \frac{da}{s} \right| < \infty$$

Таким образом, решение уравнения (1.1) будет определено только для  $\eta \leq \text{const} < \infty$ , а в таком случае данное решение описывает сжатие газа до некоторой конечной степени сжатия.

*Особая точка уравнения (2.3).* При  $\tilde{a} = a_*$  функция  $G$  в точке  $(0, a_*)$  имеет особенность. Определим  $s_1 = a - a_*$ ,  $s_2 = s$ , в числителе и знаменателе правой части уравнения (2.3) выделим слагаемые, линейные по  $s_1, s_2$ :

$$\frac{ds_1}{ds_2} = G(s_2, a_* + s_1) = \frac{a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + f_1(s_1, s_2)}{a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + f_2(s_1, s_2)} \quad (2.5)$$

$$\frac{f_i(s_1, s_2)}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \rightarrow 0, \quad s_1^2 + s_2^2 \rightarrow 0; \quad \left. \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right|_{s_1 = s_2 = 0} \quad (2.6)$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -\frac{3\kappa^2(\kappa + 4)}{4(\kappa + 1)^2}$$

$$a_{21} = \frac{3\kappa(2 - \kappa)}{\kappa + 1}, \quad a_{22} = -\frac{3\kappa(2\kappa^2 + \kappa - 4)}{2(\kappa + 1)^2}$$

Можно проверить, что при  $\kappa < 2$  выполняются неравенства

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0 \quad (2.7)$$

Из формул (2.5)–(2.7) следует [7], что особая точка – седло.

Будем искать такое решение уравнения (2.3), для которого  $\lim_{s \rightarrow +0} a(s) = a_*$ . Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{a_{12}s_2}{a_{21}s_1 + a_{22}s_2}$$

у которого есть два решения, обладающие свойством  $s_1 \rightarrow 0$  при  $s_2 \rightarrow 0$ :

$$s_1 = k_i s_2, \quad i = 1, 2; \quad k_2 < 0 < k_1 < 1$$

где  $\text{col}(k_i, 1)$  – собственные векторы матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$  [8]. Доопределим

$$G(0, a_*) = k_1 = \frac{-2\kappa^2 - \kappa + 4 + \sqrt{-8\kappa^3 + 9\kappa^2 + 24\kappa + 16}}{4(-\kappa^2 + \kappa + 2)}$$

после чего можно численно решать уравнение (2.3).

**3. Свойства решения уравнения (1.5). Результаты расчетов.** *Непрерывное примыкание решения к области покоя.* Начальное условие  $a(0) = a_*$  для уравнения (2.3) гарантирует, что соответствующее решение уравнений (1.1) и (1.5) растет неограниченно при  $\eta \rightarrow \infty$ . Определим  $\eta_0$ , при котором выполняются условия (1.3). Из формул (1.3), (2.1) и (2.2) следует, что в точке  $\eta = \eta_0$  должны выполняться равенства

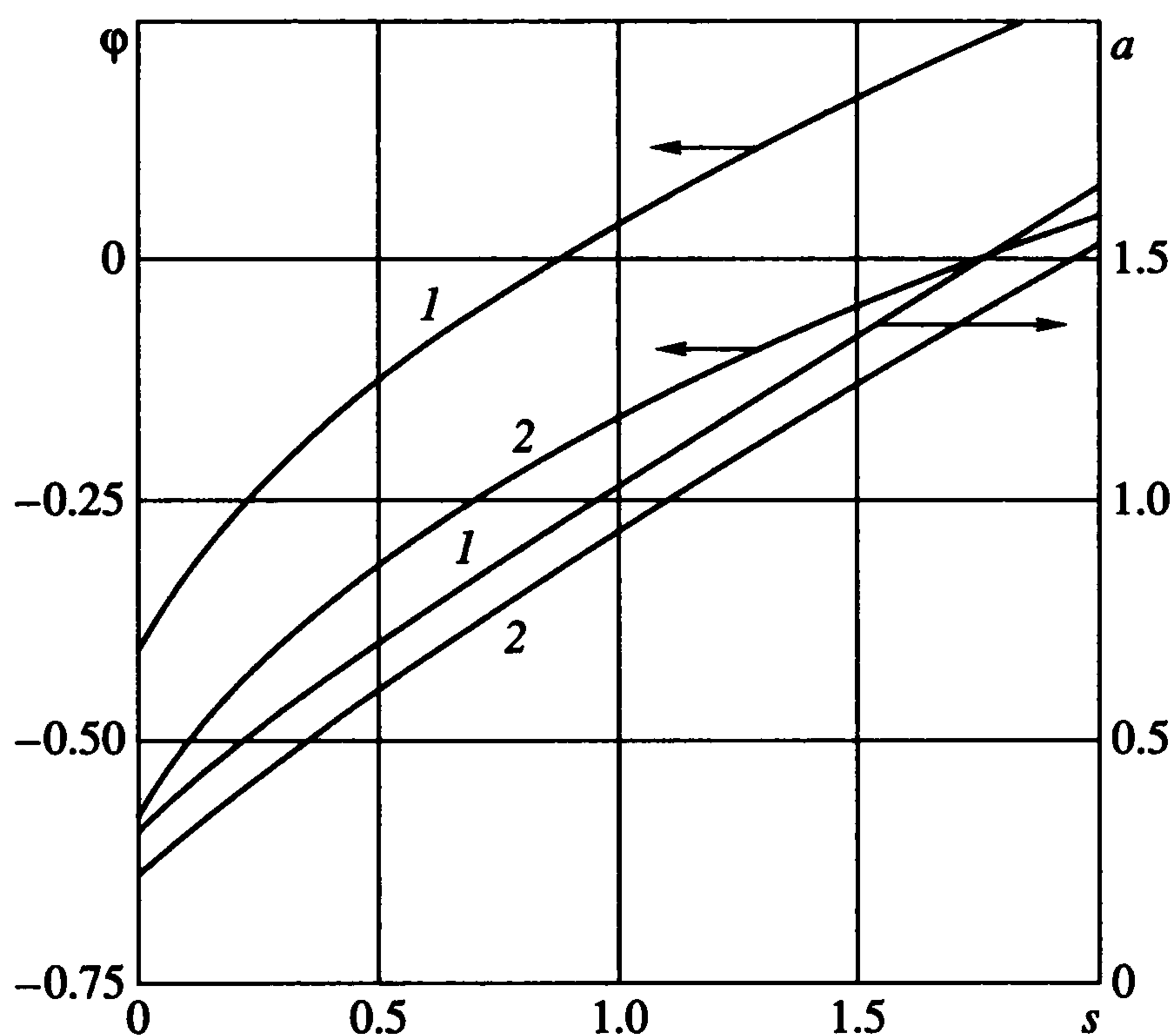
$$\Gamma - \eta^2/2 = (a - 1/2)\eta^2 = \kappa^{-1}, \quad \Gamma_\eta - \eta = (2a - s - 1)\eta = 0$$

Численно определим значение  $s_0$  – корень уравнения

$$\varphi(s) = 2a(s) - s - 1 = 0 \quad (3.1)$$

положим

$$a_0 = a(s_0), \quad \eta_0 = (\kappa(a_0 - 1/2))^{-1/2}$$



Фиг. 4

Результаты вычисления функции  $a(s)$  и  $\varphi(s)$  представлены на фиг. 4 для  $\gamma = 5/3$  (при этом  $s_0 = 0,866$ ,  $a_0 = 0,933$ ,  $\eta_0 = 1,86$ , кривые 1) и для  $\gamma = 7/5$  (в этом случае  $s_0 = 1,78$ ,  $a_0 = 1,39$ ,  $\eta_0 = 1,68$ , кривые 2).

**Характеристика  $G'E'$ .** Направления характеристик уравнения (1.1) имеют вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\Gamma_\xi \Gamma_\eta \pm \sqrt{\Gamma_\xi^2 \Gamma_\eta^2 - (\Gamma_\xi^2 - c^2)(\Gamma_\eta^2 - c^2)}}{\Gamma_\xi^2 - c^2}$$

Учитывая, что в области  $D'G'E'$  плоскости автомодельных переменных решение имеет вид  $\Gamma = \Gamma(\eta)$ , для нахождения характеристики  $G'E'$ , выходящей из точки  $G' = (0, \eta_0)$ , необходимо решить задачу Коши

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sqrt{\Gamma_\eta^2 - c^2}}{c}, \quad \eta(0) = \eta_0 \tag{3.2}$$

Подкоренное выражение в числителе правой части уравнения (3.2) равно

$$\Gamma_\eta^2 - c^2 = (1 + 1/2\kappa)\Gamma_\eta^2 - \kappa\Gamma = \eta^2\psi(s)$$

$$\psi(s) = (1 + 1/2\kappa)(2a - s)^2 - \kappa a$$

Для  $\gamma = 7/5$  и  $\gamma = 5/3$  численно проверено, что функция  $\psi(s)$  строго положительная. В знаменателе стоит скорость звука – положительная величина. Таким образом, на характеристике  $G'E'$  не происходит параболического вырождения уравнения (1.1). Для построения решения во всем объеме  $DFHO$  (фиг. 2) далее необходимо решать задачу в области  $H'G'E'$  с данными на характеристиках  $G'H'$  и  $G'E'$  (фиг. 3).

**Асимптотические оценки скорости, плотности и затрат энергии.**

**Утверждение.** В некоторый момент времени  $t_0 > -1$  рассмотрим область  $DEG$ . Для любой частицы газа из области  $DEG$  существуют постоянные  $R_*$ ,  $V_*$  и  $D_*$ , зависящие от координаты  $r$  частицы газа в момент времени  $t = t_0$ , такие, что при  $t \rightarrow 0$  справедливы асимптотические соотношения

$$r(t) \sim R_*(-t)^{1-2a_*}, \quad v(t) \sim V_*(-t)^{-2a_*}, \quad \rho(t) \sim D_*(-t)^{-4a_*/\kappa} \tag{3.3}$$

причем

$$R_{\max} \leq R_* \leq R_{\min} < 0, \quad 0 < V_{\min} \leq V_* \leq V_{\max},$$

$$0 < D_{\min} \leq D_* \leq D_{\max},$$

$$R_{\max}, R_{\min}, V_{\max}, V_{\min}, D_{\max}, D_{\min} = \text{const} \neq 0$$

где постоянные  $R_{\max}, V_{\max}, D_{\max}$  не зависят от выбора частицы и величины  $t_0$ .

Доказательство. Для некоторой выбранной частицы определим асимптотику величины  $\eta(t)$  при  $t \rightarrow -0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \eta - \Gamma_\eta = (1 - 2a_*)\eta - (s + 2(a - a_*))\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{t} \left( \frac{dr}{dt} - \eta \right) = \frac{1}{t} (-2a_* - s - 2(a - a_*))\eta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Разделяем переменные в последнем уравнении

$$\frac{dt}{t} = \int \frac{d\eta}{(-2a_* - s - 2(a - a_*))\eta} = \int \frac{d\eta}{-2a_*\eta} + f_0$$

$$f_0 = \int f_1 d\eta, \quad f_1 = \frac{f_2}{2a_*\eta(-2a_* + f_2)}, \quad f_2 = -s - 2(a - a_*)$$

Оценим величины  $f_0, f_1$  и  $f_2$ . Так как при  $a \rightarrow +a_*$  выполняются асимптотические соотношения

$$s = (a - a_*)/k_1 + o(a - a_*), \quad \eta = \eta_0 \exp\left(\int_a^{a_0} \frac{da}{s}\right) \sim \text{const} \times (a - a_*)^{-k_1}$$

то

$$f_2 = -s - 2(a - a_*) \sim \text{const} \times (a - a_*) \sim \text{const} \times \eta^{-1/k_1}$$

Следовательно,  $f_0$  – ограниченная функция. Окончательно получаем

$$-t = e^{f_0} \eta^{\frac{1}{2a_*}}, \quad \eta = e^{-f_0} (-t)^{-2a_*} \sim \text{const} \times (-t)^{-2a_*}, \quad t \rightarrow -0$$

В качестве постоянной  $R_{\max}$  можно выбрать значение  $R_2$  для точки  $D$ , фиг. 2. Справедливость второй оценки (3.3) следует из формулы (3.4). Первые две формулы (3.3) доказаны.

Перейдем к доказательству последней формулы (3.3). Исследуем закон движения некоторой выбранной частицы. Уравнение для координаты  $z$  интегрируется в явном виде

$$dz/dt = -\Gamma_\xi + \xi = z/t, \quad z = z_0 t, \quad z_0 = \text{const} \quad (3.5)$$

Из первого соотношения (3.3), следует, что

$$z(t) = o(r(t)), \quad \xi(t) = o(\eta(t)), \quad t \rightarrow 0$$

В формулу (1.2) подставляем выражение функции  $\Gamma$  через величины  $a$  и  $\eta$ :

$$c^2 = \alpha(s)\eta^2, \quad \alpha(s) = \kappa(a(s) - 1/2(2a(s) - s)^2)$$

причем

$$\alpha(0) = \kappa a_*(1 - 2a_*) > 0$$

Учитывая определение скорости звука

$$c^2 = \partial p / \partial \rho, \quad p = A\rho^\gamma$$

получаем

$$\rho \sim c^{2/\kappa} \sim \eta^{2/\kappa}$$

Утверждение доказано.

Работа поршня идет на увеличение кинетической ( $E_k$ ) и внутренней ( $E_i$ ) энергий газа. Пусть  $V$  – объем, занятый газом,  $u_{\max}$  и  $\rho_{\max}$  – соответственно наибольшие значения скорости и плотности, тогда (интегралы берутся по объему  $V$ )

$$E_k = 1/2 \int u^2 \rho dV \leq 1/2 u_{\max}^2 \int \rho dV \leq 1/2 m u_{\max}^2$$

$$E_i = \int p dV \leq \rho_{\max}^{\gamma-1} \int \rho dV \leq m \rho_{\max}^{\gamma-1}$$

По аналогии с известным подходом [3] предполагаем, что наибольший порядок роста газодинамических величин наблюдается в области  $DEG$ , фиг. 2. Используя оценки скорости и плотности (последние две оценки (3.3)), получаем

$$E_k \sim \text{const } E_i \sim \text{const} (-t)^{-4a_*}, \quad t \rightarrow 0$$

**Заключительные замечания.** Сведения задачи о нахождении автомодельного потенциала скорости к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с ограниченным промежутком интегрирования позволяет говорить о том, что для исходной задачи получено точное решение.

Предложенный подход позволяет, во-первых, найти такое решение уравнения (1.1), которое обеспечивает неограниченный рост газодинамических величин в исходной задаче; во-вторых, провести качественный анализ свойств полученного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96042 и 02-01-00047).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 444–448.
2. Сидоров А.Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 732–735.
3. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
4. Сидоров А.Ф. Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 2. С. 199–202.
5. Кукушкин В.А. О двумерном взаимодействии волн сжатия Римана // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 431–443.
6. Кукушкин В.А. Оценки оптической толщины для некоторых процессов неограниченного сжатия газа // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 580–589.
7. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: Akademie Verlag, 1959 = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.