ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 67. Вып. 3, 2003

УДК 533; 517.958

© 2003 г. А. П. Чупахин

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ОСОБОГО ВИХРЯ

Исследуются две инвариантные подмодели сферически частично инвариантной модели газовой динамики, называемой особым вихрем (ОВ): стационарная и однородная. Дается их полное аналитическое описание: все инвариантные функции, задающие решение, имеют представление через вспомогательную функцию и ее производные. Эта функция является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для стационарного ОВ и уравнения Шварца для однородного ОВ. Дается качественное описание движения газа в однородном ОВ, характерная черта которого – формирование газового облака из разреженной среды при движении его к наблюдателю и последующий разлет вновь до разреженного состояния (в пределе до вакуума) на бесконечности. Полностью описан барохронный однородный ОВ. Доказано, что ОВ порождается специальными начальными данными: алгебраические инварианты матрицы Якоби векторного поля скоростей зависят только от инвариантных независимых переменных – времени и радиальной координаты. Получено представление инвариантов через параметры ОВ.

Точные решения, связанные с группой вращений $SO(3)$, представляют интерес в силу ее исключительного положения среди других подгрупп группы Галилея – основной группы симметрии математических моделей механики сплошных сред. Сферически-симметричные решения в газовой и гидродинамике являются классическими и имеют многочисленные приложения. Л. В. Овсянников [1] открыл "особый вихрь" – частично инвариантное относительно группы $SO(3)$ решение уравнений гидродинамики, для которого радиальная составляющая вектора скорости сферически-симметрична, но касательная к сферам компонента вектора скорости отлична от нуля. Такое название этого решения объясняется тем, что специальному начальному распределению его поля скоростей отвечает вихрь, имеющий в сферических координатах нулевую радиальную компоненту всюду на сфере, кроме ее полюсов, в которых он обращается в бесконечность. Термин "особый вихрь" (ОВ), в силу своей краткости и выразительности, переносится и на весь класс таких решений, который более точно и длинно может быть назван сферически частично инвариантными (симметрическими) или $SO(3)$ частично инвариантными решениями. Это широкий класс физически содержательных точных решений. Кинематика и динамика соответствующих им движений газа достаточно сложна. В силу этого представляет интерес исследование точных решений этой подмодели, в частности инвариантных, для более детального описания движения.

В разд. 1 дается общее описание ОВ: сведение уравнений газовой динамики к инвариантной и переопределенной системам, приведение последней в инволюцию (вывод условий совместности). Переопределенная система проинтегрирована в конечном виде на решениях инвариантной.

Свойство матрицы Якоби векторного поля скоростей ОВ иметь алгебраические инварианты и собственные значения, зависящие только от инвариантных независимых переменных, доказано в разд. 2. Оно дает инвариантную, не зависящую от формул представления, характеристику решения. Это свойство – общее для широкого класса регулярных частично инвариантных решений.

Стационарный особый вихрь (СОВ) описан в разд. 3. Инвариантная система для него сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка и конечным соотношениям, выражающим все искомые функции через его решение; СОВ определен вне шара радиуса $r_* > 0$.

В разд. 4, 5 исследуется однородный особый вихрь (ООВ) для политропного газа. Инвариантная подсистема в этом случае сводится к неоднородному уравнению Шварца для вспомогательной функции h. Все искомые функции выражаются через нее и ее производные. Инварианты матрицы Якоби поля скоростей и собственные значения на этом решении зависят только от времени.

В разд. 6 доказано, что для показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ уравнение Шварца, имеющее третий порядок, распадается на нелинейное уравнение первого порядка и линейное уравнение второго порядка, решение которого определяет правую часть нелинейного уравнения. Этот результат, имеющий общий характер, служит основой для изучения качественных свойств движения газа в ООВ, изложенных в разд. 7 и 8. Для движения газа в ОВ характерны стадия уплотнения газового образования (облака), формирующегося из разреженной среды при приближении к наблюдателю, и последующая стадия разлета и разрежения. Возможны как конечный, так и бесконечный интервалы существования решения.

Барохронный ООВ исследуется в разд. 8. Для него дается описание траекторий частиц газа как прямолинейных образующих трехмерного однополостного гиперболоида в пространстве событий $\mathbb{R}^4$ $(t, \mathbf{x})$ и многообразия коллапса.

1. Подмодель особый вихрь [1]. В пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$ наряду с декартовыми координатами $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и соответствующими компонентами вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ вводятся сферические координаты (r, θ, φ) по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{1.1}$$

и компоненты вектора скорости (U, V, W) [2]. На сферах $r = \mathrm{const}$ радиальная компонента скорости U равна величине нормальной составляющей вектора скорости, а вектор $\mathbf{u}_\tau = (V, W)$ – его касательная компонента. В плоскости, касательной к сферам, удобно ввести модуль $|\mathbf{u}_\tau|$: $H = \sqrt{V^2 + W^2}$ и угол ω его отклонения от меридиана (фиг. 1):

$$V = H\cos\omega, \quad W = H\sin\omega \tag{1.2}$$

В координатах (1.1), (1.2) уравнения газовой динамики имеют вид

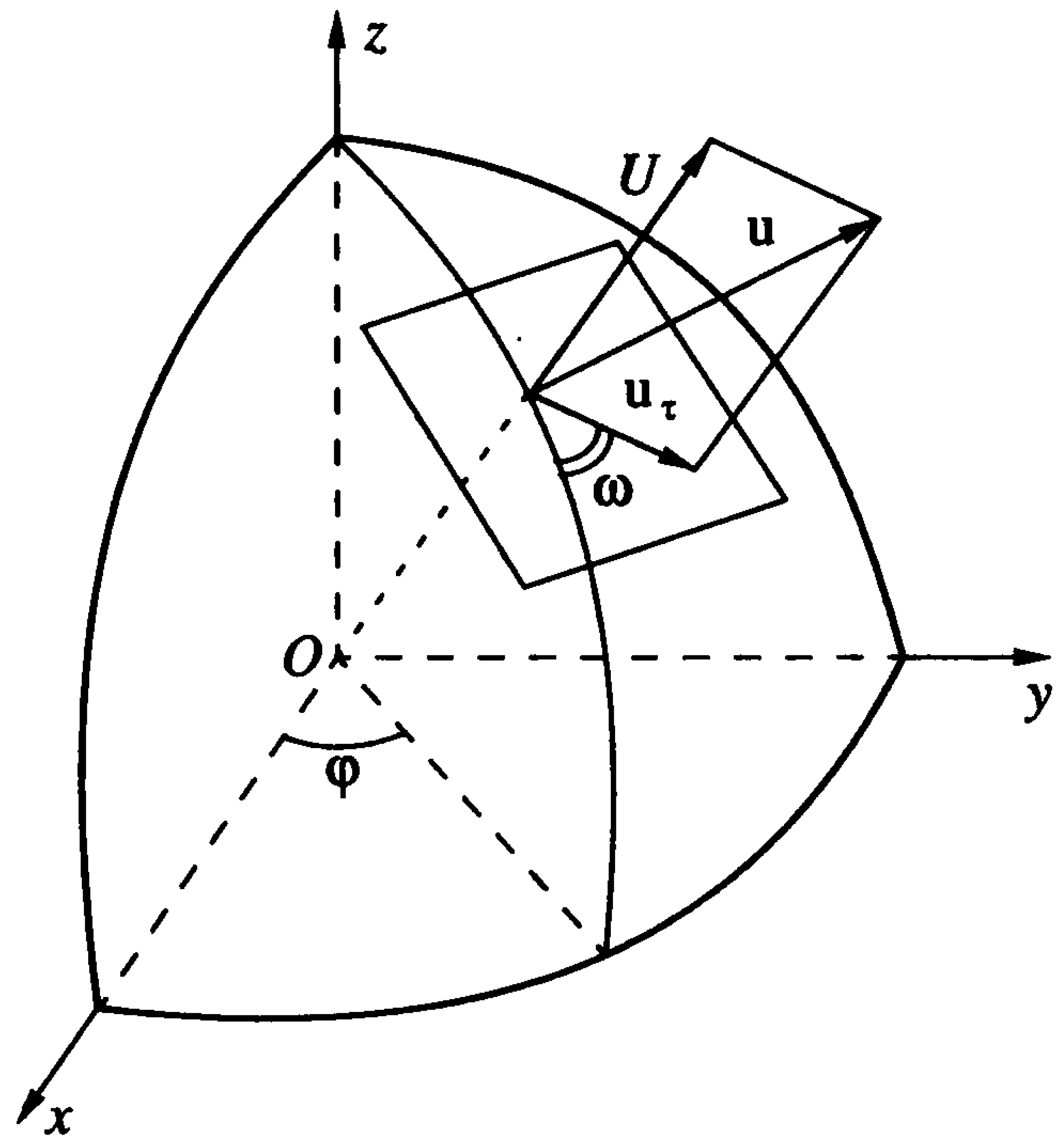
$$\begin{aligned}
&DU + \rho^{-1}p_r = r^{-1}H^2\\
&DH^2 + 2(\rho r)^{-1}H(\cos\omega p_\theta + (\sin\theta)^{-1}\sin\omega p_\varphi) = -2r^{-1}UH^2\\
&D\omega + (\rho r)^{-1}((\sin\theta)^{-1}\cos\omega p_\varphi - \sin\omega p_\theta) = -r^{-1}H\operatorname{ctg}\theta\sin\omega\\
&D\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad DS = 0, \quad p = f(\rho, S)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где ρ – плотность, p – давление, S – энтропия газа. Функция f задает уравнение состояния газа. Операторы D и div имеют вид

$$\begin{aligned}
D &= \partial_t + U\partial_r + r^{-1}H(\cos\omega\partial_\theta + (\sin\theta)^{-1}\sin\omega\partial_\varphi)\\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= r^{-2}(r^2U)_r + (r\sin\theta)^{-1}((H\cos\omega\cos\theta)_\theta + (H\sin\omega)_\varphi)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) для уравнения состояния общего вида допускают алгебру Ли L_{11} (алгебра Галилея, расширенная равномерным растяжением переменных $(t, \mathbf{x})$). Алгебра $SO(3)$, соответствующая группе вращений $SO(3)$, является подалгеброй L_{11} и имеет в координатах (1.1) и (1.2) базис

$$\begin{aligned}
X &= -\sin\varphi\partial_\theta - \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi + (\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\partial_\omega\\
Y &= \cos\varphi\partial_\theta - \sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi + (\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\partial_\omega\\
Z &= \partial_\varphi
\end{aligned} \tag{1.5}$$



Фиг. 1

В базовом пространстве переменных (t, r, θ, φ, U, H, ω, ρ, S) алгебра $SO(3)$ с операторами (1.5) имеет инварианты t, r, U, H, ρ, S. Величина ω является лишней функцией. Таким образом, алгебра $SO(3)$ с операторами (1.5) порождает регулярные частично инвариантные решения уравнений (1.3) ранга 2 и дефекта 1. Для них инвариантные функции U, H, ρ, S зависят только от инвариантных независимых переменных t, r, а ω – вообще говоря, функция всех независимых переменных t, r, θ, φ. Представление искомых регулярных частично инвариантных решений имеет вид

$$U = U(t, r), \quad H = H(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad S = S(t, r), \quad \omega = \omega(t, r, \theta, \varphi) \qquad (1.6)$$

После подстановки представления (1.6) в систему (1.3) получаются фактор-уравнения, которые, согласно общей теории [3], распадаются на инвариантную подсистему

$$D_0 U + \rho^{-1} p_r = r^{-1} H^2, \quad D_0(rH) = 0, \quad D_0 S = 0, \quad p = f(\rho, S) \qquad (1.7)$$

где $D_0 = \partial_t + U\partial_r$ и переопределенную систему для функции ω

$$\begin{aligned} k\sin\theta D_0\omega + \sin\theta\cos\omega\omega_\theta + \sin\omega\omega_\varphi &= -\cos\theta\sin\omega \\ \sin\theta\sin\omega\omega_\theta - \cos\omega\omega_\varphi &= \cos\theta\cos\omega + h\sin\theta \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Здесь введены вспомогательные инвариантные функции

$$k = r/H, \quad h = k(\rho^{-1} D_0\rho + r^{-2}(r^2 U)_r) \qquad (1.9)$$

Предполагается, что $H \neq 0$. Если $H = 0$, то в силу соотношений (1.2) касательная компонента $\mathbf{u}_\tau$ вектора скорости равна нулю; в этом случае система (1.3) описывает известные сферически-симметричные движения газа.

Переопределенная система (1.8) совместна в силу уравнения

$$kD_0 h = h^2 + 1 \qquad (1.10)$$

Уравнения (1.9) и (1.10) дополняют инвариантную систему (1.7) до замкнутой относительно функций U, H, ρ, S и h. Система (1.8), (1.10) находится в инволюции и ее общее решение зависит от одной произвольной функции двух переменных.

Вводятся новые независимые переменные: лагранжева координата $\xi = \xi(t, r)$ и модифицированное время $\tau = \tau(t, r)$ согласно уравнениям

$$D_0\xi = 0, \quad \xi(0, r) = r, \quad kD_0\tau = 1, \quad \tau(0, r) = 0 \tag{1.11}$$

Тогда $kD_0 = \partial_\tau$, решение (1.10) с условием $h(0, r) = 0$ имеет вид $h = \operatorname{tg}\tau$. Определяется величина

$$\eta = \cos\tau\sin\theta\cos\omega - \sin\tau\cos\theta \tag{1.12}$$

и величина ζ, неявно определяемая соотношением

$$\sqrt{1-\eta^2}\sin(\zeta+\varphi) = \cos\tau\cos\theta\cos\omega + \sin\tau\sin\theta \tag{1.13}$$

Общее решение системы (1.8), выраженное в неявной форме, имеет вид

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{1.14}$$

с произвольной функцией F.

Ранее [1] было описано поведение сферических траекторий частиц газа (проекций траекторий на единичную сферу) и доказано, что любая из них является большой окружностью сферы, а скорость перемещения частицы по ней, относительно времени τ, равна единице. Среди начальных данных задачи Коши выделяется значение $\omega_0 = \pi/2$, которое удовлетворяет условиям однозначности и определенности решения на всей сфере.

Представление полной картины движения особого вихря (ОВ) сводится, тем самым, к определению радиального движения частиц газа, описываемого системой (1.7), (1.9), (1.10). Эта система была проинтегрирована [1] в двух случаях: для установившихся течений несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) и автомодельных движений газа с уравнением состояния $p = A\rho + B$ (A, B – постоянные), для которых $U = 0$; была также поставлена задача полного группового анализа системы, описывающей радиальные движения газа. Описание однородного особого вихря (ООВ) в идеальной несжимаемой жидкости дано в [4].

2. Начальные данные и матрица Якоби для особого вихря. Инвариантные и частично инвариантные решения имеют, как правило, специальные начальные данные. Так, например, матрица Якоби $J = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$ поля скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ в барохронном движении во все моменты времени имеет алгебраические инварианты, зависящие только от времени [5], следовательно, для барохронных движений газа начальное поле скоростей $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0, \mathbf{x})$ обладает тем свойством, что алгебраические инварианты матрицы $J_0 = \partial\mathbf{u}_0/\partial\mathbf{x}$ являются вещественными постоянными. Оказывается, подобное свойство справедливо и для особого вихря.

Напомним формулы, задающие матрицу Якоби $J = (\nabla_i u^j)$ векторного поля скоростей $\mathbf{u} = (U, V, W)$ в сферических координатах (r, θ, φ) через ковариантные производные [6]

$$\nabla_i u^j = \begin{Vmatrix} U_r & U_\theta - V & U_\varphi - W\sin\theta \\ r^{-1}V_r & r^{-1}(U_\theta + U) & r^{-1}(V_\varphi - W\cos\theta) \\ (r\sin\theta)^{-1}W_r & (r\sin\theta)^{-1}W_\theta & r^{-1}(W_\varphi/\sin\theta + U + V\operatorname{ctg}\theta) \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Алгебраические инварианты матрицы Якоби (2.1) поля скоростей ОВ (1.2), (1.6) являются функциями только инвариантных независимых переменных t, r и представляются формулами

$$k_1 = r^{-2}(r^2U)_r - r^{-1}hH \tag{2.2}$$

$$k_2 = r^{-2}(rU^2)_r + r^{-1}HH_r - r^{-1}hHU_r - r^{-2}hUH \tag{2.3}$$

$$k_3 = r^{-2}(U - hH)(UU_r + HH_r) \tag{2.4}$$

Доказательство. Напомним, что алгебраический инвариант k_i порядка i матрицы J есть сумма главных миноров порядка i; так, например, k_1 – след матрицы, а k_3 – определитель J (для трехмерных матриц).

Вычислим первый инвариант на решении (1.2), (1.6)

$$k_1 = \mathrm{div}\,\mathbf{u} = k_{10} + k_{11} \tag{2.5}$$

$$k_{10} = r^{-2}(r^2U)_r, \quad k_{11} = (r\sin\theta)^{-1}H((\cos\omega\sin\theta)_\theta + (\sin\omega)_\varphi)$$

Для этого перепишем уравнение неразрывности в виде

$$D_0\ln\rho + k_{10} + k_{11} = 0, \quad D_0 = \partial_t + U\partial_r \tag{2.6}$$

Сумма первых двух слагаемых в первом равенстве (2.6) равна h/k в силу второго равенства (1.9); следовательно, $k_{11} = -\,h/k$. Подставляя это значение k_{11} в равенство (2.5) и используя первое равенство (1.9), получим формулу (2.2).

Доказательство формул (2.3) и (2.4) проводится непосредственным вычислением и гораздо более громоздко. Оно существенно использует второе уравнение переопределенной системы (1.8) для лишней функции, т.е. формулы (2.3), (2.4) справедливы в силу второго уравнения системы (1.8).

Следствие. Начальные данные для ОВ являются специальными. Матрица Якоби начального поля скоростей имеет алгебраические инварианты, зависящие только от r.

Для регулярных частично инвариантных решений типов (1, 1) и (1, 2) уравнений газовой динамики[1] матрица Якоби векторного поля скоростей обладает свойством, сформулированным в теореме 1. Это позволяет выдвинуть следующую гипотезу: Для всех регулярных частично инвариантных решений матрица Якоби векторного поля скоростей имеет алгебраические инварианты, зависящие только от инвариантных независимых переменных.

Замечания. 1°. Такое свойство матрицы J инвариантным образом выделяет класс начальных данных соответствующего решения.

2°. Свойство проверяется явно вычислением инвариантов матрицы Якоби для всех решений[1]. Интересно, что оно, в отличие от формул представления решения, имеет инвариантную формулировку.

Для анализа решений полезно знание и собственных значений матрицы J.

Лемма 1. Собственные значения λ_i матрицы Якоби (2.1) поля скоростей ОВ (1.2), (1.6) являются функциями только инвариантных независимых переменных t, r и представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r^{-1}(U - hH) \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2}(U_r + r^{-1}U \pm ((U_r - r^{-1}U)^2 - 4r^{-1}HH_r)^{1/2}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] *Чупахин А.П.* Небарохронные подмодели типов (1, 2) и (1, 1) уравнений газовой динамики: Препринт № 1–99. Новосибирск: СО РАН, Ин-т гидродинамики, 1999.

Действительно, подстановка выражений (2.7) в представления инвариантов

$$k_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad k_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad k_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

приводит к формулам (2.2)–(2.4).

3. Стационарный особый вихрь. Система (1.7), (1.9), (1.10), описывающая радиальные движения газа, допускает алгебру Ли с оператором $T = \partial_t$. Решения, инвариантные относительно этой алгебры, можно сразу строить как регулярные частично инвариантные решения уравнений газовой динамики (1.3) относительно подалгебры с базисом T, X, Y, Z (см. работу, цитированную в сноске 1). Эти решения имеют ранг 1 и дефект 1 и представляются в виде

$$U = U(r), \quad H = H(r), \quad \rho = \rho(r), \quad S = S(r), \quad \omega = \omega(r, \theta, \varphi) \tag{3.1}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (1.7) и (1.10) дает уравнения

$$\begin{gathered} UU' + \rho^{-1}p' = r^{-1}H^2, \quad U(rH)' = 0, \quad US' = 0, \quad kUh' = h^2 + 1 \\ k = r/H, \quad h = k[U(\ln\rho)' + r^{-2}(r^2U)'] \end{gathered} \tag{3.2}$$

где штрих обозначает производную по r.

Из системы (3.2) следует, что $U \neq 0$ (в случае $U = 0$ последнее уравнение (3.2) приводит к противоречию). Следовательно, подмодель описывает изэнтропические движения газа $S = \text{const}$. Из второго уравнения (3.2) следует $rH = r_0H_0$, где r_0, $H_0 = \text{const}$. Обозначим $a_0 = r_0H_0$. Тогда $k = r^2/a_0$ и из четвертого уравнения (3.2) следует представление

$$U = a_0(h^2 + 1)/r^2h' \tag{3.3}$$

Подставляя выражение (3.3) в последнюю формулу (3.2) для h и интегрируя, получим

$$\rho = R_0|h'|/\sqrt{1 + h^2} \tag{3.4}$$

где постоянная $R_0 > 0$. Следовательно, все искомые функции представлены через функцию $h(r)$ и ее производные. Давление определяется из уравнения состояния. Функция h является решением первого уравнения в (3.2), которое один раз интегрируется

$$\frac{1}{2}U^2 + I(\rho) + \frac{a_0^2}{2r^2} = b_0 \tag{3.5}$$

где $I(\rho) = \int dp/\rho$ – энтальпия газа, постоянная $b_0 > 0$.

Уравнение (3.5) представляет собой инвариантный интеграл Бернулли. Для газа с политропным уравнением состояния $p = \rho^\gamma$ ($\gamma > 1$ – показатель адиабаты) соотношение (3.5) принимает вид

$$\begin{gathered} |h'|^{\gamma+1} + \kappa\frac{a_0^2 - 2b_0r^2}{2r^2}(1 + h^2)^{(\gamma-1)/2}h'^2 + m_0\frac{(1 + h^2)^{(\gamma+3)/2}}{r^4} = 0 \\ \kappa = \gamma^{-1}(\gamma - 1)R_0, \quad m_0 = (a_0^2\kappa)/2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Функция $h = h(r)$ – решение уравнения (3.6) – определяет радиальную компоненту скорости и плотность по формулам (3.3) и (3.4). Она входит также в интегралы ξ, η,

ζ (1.11)–(1.14), определяющие сферическое движение частиц газа. Таким образом, отыскание стационарного особого вихря (СОВ) сводится к интегрированию уравнения (3.6).

Обозначим

$$r_* = a_0/\sqrt{2b_0} \tag{3.7}$$

Из интеграла Бернулли (3.5) следует, что СОВ определен не во всем пространстве, а при $r \geq r_*$. Как и газовый источник, СОВ не может иметь точечный характер: величина r_* (3.7) определяет минимальный радиус сферы, из которой "исходит" СОВ. Это свойство имеет место и для СОВ в идеальной несжимаемой жидкости [1].

4. Однородный особый вихрь (политропный газ). Рассмотрим газ с политропным уравнением состояния $p = S\rho^\gamma$. Инвариантная подсистема (1.7), (1.9), (1.10) допускает алгебру Ли, задаваемую оператором растяжения

$$K = r\partial_r + U\partial_U + H\partial_H + \alpha\rho\partial_\rho + (\alpha+2)p\partial_p \tag{4.1}$$

с произвольным параметром $\alpha \in \mathbb{R}$. Переменная t является инвариантом оператора K, и по нему можно построить инвариантное решение ранга 1, имеющее представление

$$U = A(t)r, \quad H = C(t)r, \quad \rho = r^\alpha R(t), \quad p = r^{\alpha+2}P(t) \tag{4.2}$$

Представления для энтропии

$$S = r^m s(t), \quad s(t) = PR^{-\gamma}, \quad m = \alpha + 2 - \alpha\gamma \tag{4.3}$$

и скорости звука

$$c^2 = \gamma p/\rho = \gamma r^2 B, \quad B = R^{-1}P \tag{4.4}$$

следуют из уравнения состояния. Инвариантные функции (4.2)–(4.4) являются однородными по переменной r, что дает основание назвать это решение однородным особым вихрем (ООВ).

Для решения (4.2) имеют место формулы

$$\rho^{-1}\nabla p = (\alpha+2)B\mathbf{x}, \quad \rho^{-1}p_r = (\alpha+2)Br \tag{4.5}$$

В этом случае все функции времени A, C, R, P в (4.2), определяющие инвариантную часть решения, также выражаются через функцию h и ее производные (своеобразный потенциал решения). Функция $h(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка – уравнению Шварца с определенной правой частью [7]. Лишняя функция ω по-прежнему определяется из конечного соотношения (1.14), после того как найдена функция h.

Займемся теперь получением представлений всех инвариантных функций (4.2) через функцию h и ее производные и выводом уравнения для h. В этом разделе штрих обозначает производную искомых функций по времени.

Подставляя представления для H и U во второе уравнение (1.7), получим

$$A = -C'/(2C) \tag{4.6}$$

Для функций (4.2)

$$\rho^{-1}D_0\rho + r^{-2}(r^2U)_r = R^{-1}R' + (\alpha+3)A$$

Подставляя это выражение в формулу (1.9) для h и учитывая, что $k = C^{-1}$, получим

$$h = C^{-1}[\ln RC^{-(\alpha+3)/2}]' \tag{4.7}$$

Из уравнения (1.10) следует представление

$$C = h'/(1+h^2) \tag{4.8}$$

Подставляя выражение (4.8) в равенство (4.7), получим

$$R = R_0(1+h^2)^{-(\alpha+2)/2}(h')^{(\alpha+3)/2} \tag{4.9}$$

где R_0 – постоянная интегрирования.

Подставив в уравнение для скорости звука

$$D_0c^2 + (\gamma-1)c^2\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

выражение (2.2) для $\operatorname{div}\mathbf{u}$ и c^2 из (4.4), получим

$$B'/B - C'/C - (\gamma-1)[\ln(1+h^2)^{1/2}C^{3/2}]' = 0$$

После интегрирования этого уравнения один раз получим представление

$$B = B_0(1+h^2)^{-\gamma}(h')^{(3\gamma-1)/2} \tag{4.10}$$

где $B_0 = \text{const}$. Удобнее описывать решение, задавая c^2 вместо p. Соотношения (4.4), (4.9) и (4.10) устанавливают связь этих величин в данном решении. Заметим, что из физического смысла величин ρ и c^2 и представлений (4.2), (4.4) и (4.9), (4.10), следует, что $R_0 > 0$, $B_0 > 0$.

Формулы (4.6), (4.8), (4.9), (4.10) задают представления всех искомых функций (4.2) через h. Искомое уравнение для h получается из первого уравнения (1.7), которое после подстановки представления (4.2) в силу (4.5) превращается в уравнение Риккати для A

$$A' + A^2 + (\alpha+2)B = C^2 \tag{4.11}$$

Подставляя в уравнение (4.11) представления для A, B, C через h, приходим к искомому уравнению Шварца. Окончательный результат сформулируем в виде утверждения.

Теорема 2. Подмодель ОВ, инвариантная относительно алгебры (4.1), задается представлением инвариантных функций (4.2)–(4.4), в котором функции A, B, C, R выражаются через вспомогательную функцию h по следующим формулам:

$$\begin{gathered} A = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{|h'|}{1+h^2}\right)', \quad B = B_0(1+h^2)^{-\gamma}|h'|^{(3\gamma-1)/2} \\ C = (1+h^2)^{-1}h', \quad R = R_0(1+h^2)^{-(\alpha+2)/2}|h'|^{(\alpha+3)/2} \end{gathered} \tag{4.12}$$

где $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, $\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр подмодели, $B_0 > 0$ и $R_0 > 0$ – постоянные интегрирования. Функция $h(t)$ – решение уравнения Шварца

$$\{h\} \equiv \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 = 2(\alpha+2)B_0\frac{|h'|^{(3\gamma-1)/2}}{(1+h^2)^{\gamma}} \tag{4.13}$$

Дальнейшее исследование ООВ сводится к анализу решения уравнения (4.13). К сожалению, имеется немного результатов о представлении и качественных свойствах его решения.

5. Алгебраические инварианты матрицы Якоби и начальные данные для однородного особого вихря. Для ООВ теорема 1 принимает более конкретный вид.

Лемма 2. Для однородного особого вихря, описанного в теореме 2, алгебраические инварианты и собственные значения матрицы Якоби являются функциями только времени и задаются формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= 3A - hC, \quad k_2 = 3A^2 - 2hAC + C^2 \\ k_3 &= A^3 - hA^2C + C^2A - hC^3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\lambda_1 = A - hC, \quad \lambda_{2,3} = A \pm iC \tag{5.2}$$

Действительно подстановка представления решения (4.2) в формулы (2.2)–(2.4) и (2.5) дает выражения (5.1) и (5.2).

Формулы (5.2) с использованием функции h, определяющей ООВ, имеют вид

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\ln|h'|)', \quad \lambda_{2,3} = -\left(\frac{1}{2}\ln\frac{|h'|}{1+h^2} \pm i\operatorname{arctg} h\right)'$$

Замечание. Начальные данные для ООВ задаются специальными матрицами Якоби J_0 с постоянными инвариантами. Матрицы J во все моменты времени имеют инварианты, зависящие только от времени. Но эти матрицы отличны от матриц Якоби, определяющих барохронные решения, поскольку удовлетворяют разным матричным уравнениям Риккати.

Отыскание решения вида (4.2) сводится к решению уравнения Шварца (4.13). Покажем, что начальные данные для него

$$h_0 = h(0), \quad h_0' = h'(0), \quad h_0'' = h''(0) \tag{5.3}$$

являющиеся произвольными постоянными, выражаются через физические начальные данные

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0, \mathbf{x}), \quad \rho_0 = \rho(0, \mathbf{x}), \quad c_0 = c(0, \mathbf{x})$$

решения (4.2).

Из формул (1.2), (4.2) следуют выражения для физических начальных данных решения

$$\begin{aligned} U_0 &= A(0)r, \quad V_0 = C(0)r\cos\omega_0, \quad W_0 = C(0)\sin\omega_0 \\ \rho_0 &= r^{\alpha}R(0), \quad c_0^2 = \gamma r^2 B(0) \end{aligned} \tag{5.4}$$

с постоянными $A(0)$, $C(0)$, $R(0)$, $B(0)$. Функция $\omega_0 = \omega(0, r, \theta, \varphi)$ задает начальные данные для системы (1.8).

Используем формулы (4.12) для связи начальных данных (5.3) и чисел $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$, $R(0)$ в (5.4). Удобнее воспользоваться представлением $h = \operatorname{tg}\tau$, где $\tau = \tau(t)$ – модифицированное время (1.11). Тогда производные h' и h'' однозначно выражаются в терминах функции τ и ее производных, начальные данные (5.3) пересчитываются через $\tau_0 = \tau(0)$, $\tau_0' = \tau'(0)$, $\tau_0'' = \tau''(0)$. Уравнение (4.13) можно переписать для функции τ – оно по-прежнему будет уравнением Шварца, но с измененной правой частью. Конкретные формулы здесь не очень важны, хотелось бы подчеркнуть, что начальные данные (5.3) выражаются через физические начальные данные (5.4) для ООВ

$$\cos\tau_0 = \left(\frac{R(0)}{R_0}\right)^{\gamma}\frac{B(0)}{B_0}C^{(\alpha\gamma+1)/2}(0), \quad \tau_0' = C(0), \quad \tau_0'' = -2A(0)C(0)$$

6. Интегралы уравнения Шварца при $\gamma = 5/3$. Случай исключительного значения адиабаты является выделенным с точки зрения интегрирования уравнения Шварца (4.13), принимающего вид

$$\{h\} = 2(\alpha+2)B_0h'^2/(1+h^2)^{5/3} \tag{6.1}$$

Лемма 3. Функция $h = h(t)$, являющаяся решением уравнения Шварца

$$\{h\}_t = \Phi(h)h_t'^2 \tag{6.2}$$

($\Phi(h)$ – заданная функция), связана соотношением

$$h_t'(C_1 + C_2t)^2 = Q^2(h) \tag{6.3}$$

(C_1, C_2 – постоянные) с решением $Q = Q(h)$ линейного уравнения

$$\frac{d^2Q}{dh^2} - \frac{1}{2}\Phi(h)Q = 0 \tag{6.4}$$

Доказательство. Согласно известным результатам [7, 8] имеем следующую цепочку равенств. Уравнение (6.2), после изменения ролей переменных, принимает вид

$$\{t\}_h = -\Phi(h) \tag{6.5}$$

Пусть $t_h' > 0$, тогда общее решение уравнения (6.4) представляется формулой

$$Q = \frac{1}{\sqrt{t_h'}}(C_1 + C_2t(h)) \tag{6.6}$$

где $t = t(h)$ – общее решение уравнения (6.5); C_1, C_2 – произвольные постоянные. Обращая зависимость $t = t(h)$ и возводя обе части равенства (6.6) в квадрат, приходим к соотношению (6.3).

Следствие. Критические точки t_* функции $h = h(t)$ задают нули функции $Q = Q(h)$; значения h, при которых $h'(t_*) = 0$, обращают Q в нуль: $Q(h) = 0$.

Доказательство следует из соотношения (6.3).

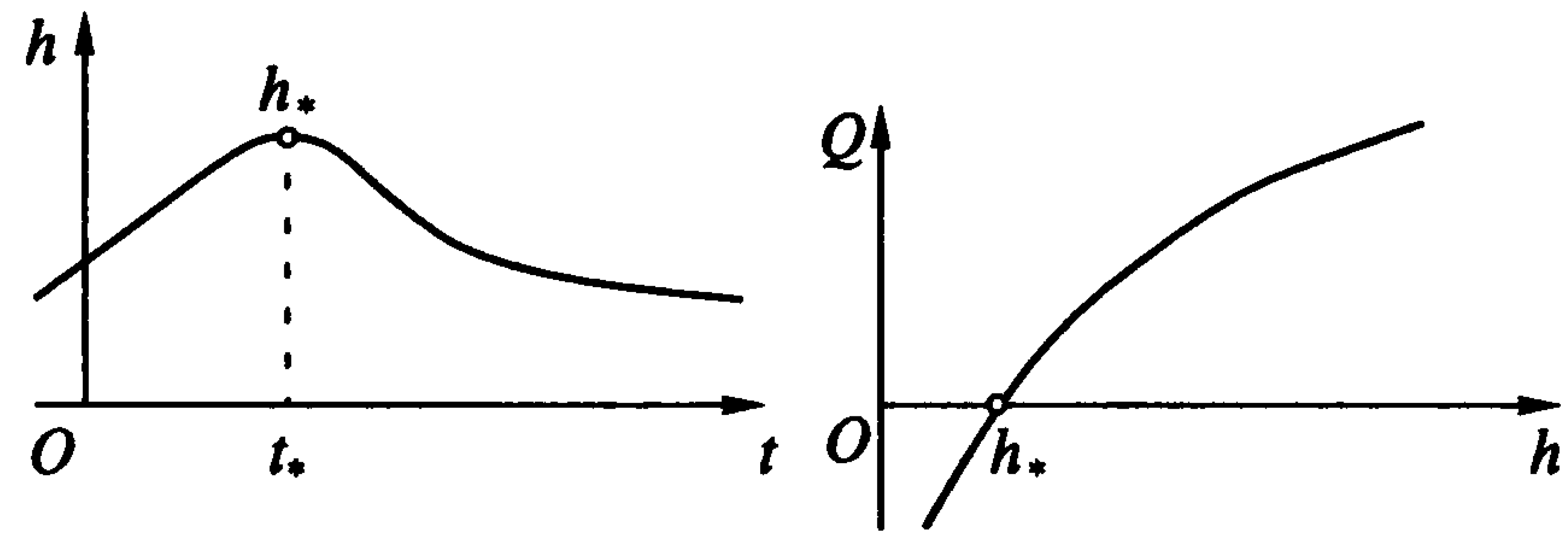
7. Качественное описание радиального движения газа при $\gamma = 5/3$. Сведение уравнения Шварца (6.1) к уравнениям (6.3) и (6.4) позволяет описать радиальное движение газа. Интегрируя уравнение траекторий $dr/dt = U$ для функции U (4.2), получим

$$r^2(1+h^2)^{-1}h' = r_0^2C_0 \tag{7.1}$$

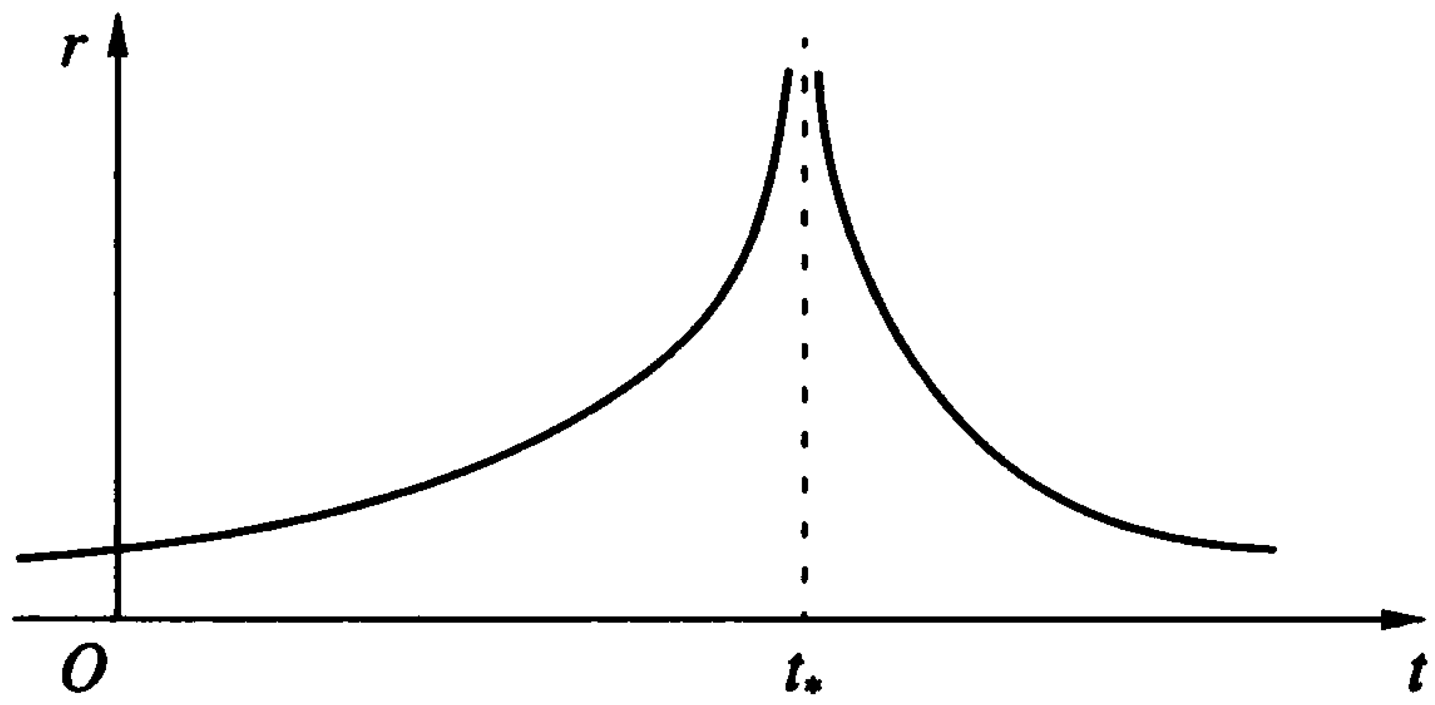
где r_0, $C_0 = C(0)$ – постоянные интегрирования. Формула (7.1) определяет лагранжеву координату $\xi = r|C|^{1/2}$ (1.11) для данного решения. Уравнение (7.1) задает контактную характеристику на данном решении, т.е. определяет поверхность, "сотканную" из траекторий. Она является поверхностью вращения вокруг оси Ot в пространстве событий $\mathbb{R}^4(t, \mathbf{x})$, огибающей семейство сфер с центрами в точках оси Ot и радиусами, задаваемыми уравнением (7.1): $r^2(t) = r_0^2\, C_0/C(t)$.

Вычислим значения плотности и скорости звука в частице, т.е. при $r = r(t)$, определяемом уравнением (7.1). Получим

$$\rho = r_0R_0|C_0|^{3/5}\frac{|h'|^{3/2}}{1+h^2}, \quad c^2 = \frac{5}{3}r_0^2C_0\frac{|h'|}{(1+h^2)^{3/2}} \tag{7.2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Из уравнения (7.1) следует, что картина движения газа определяется числом критических точек функции $h(t)$. Действительно, для дифференцируемой функции h согласно уравнению (7.1) $r \to +\infty$ при $t \to t_*$, где t_* – критическая точка функции h, в которой $h'(t_*) = 0$.

Из формул (7.2) следует, что критическая точка функции h является точкой вакуума: $\rho(t_*) = c(t_*) = 0$. Согласно интегралу (6.3) критические точки функции h совпадают с нулями функции $Q(h)$, которая является решением уравнения (6.4). Из общей теории [9] известно, что число нулей решения линейного уравнения второго порядка (6.4) зависит от знака коэффициента Ф. Для уравнения (6.1)

$$\Phi = 2(\alpha+2)B_0(1+h^2)^{-5/3}$$

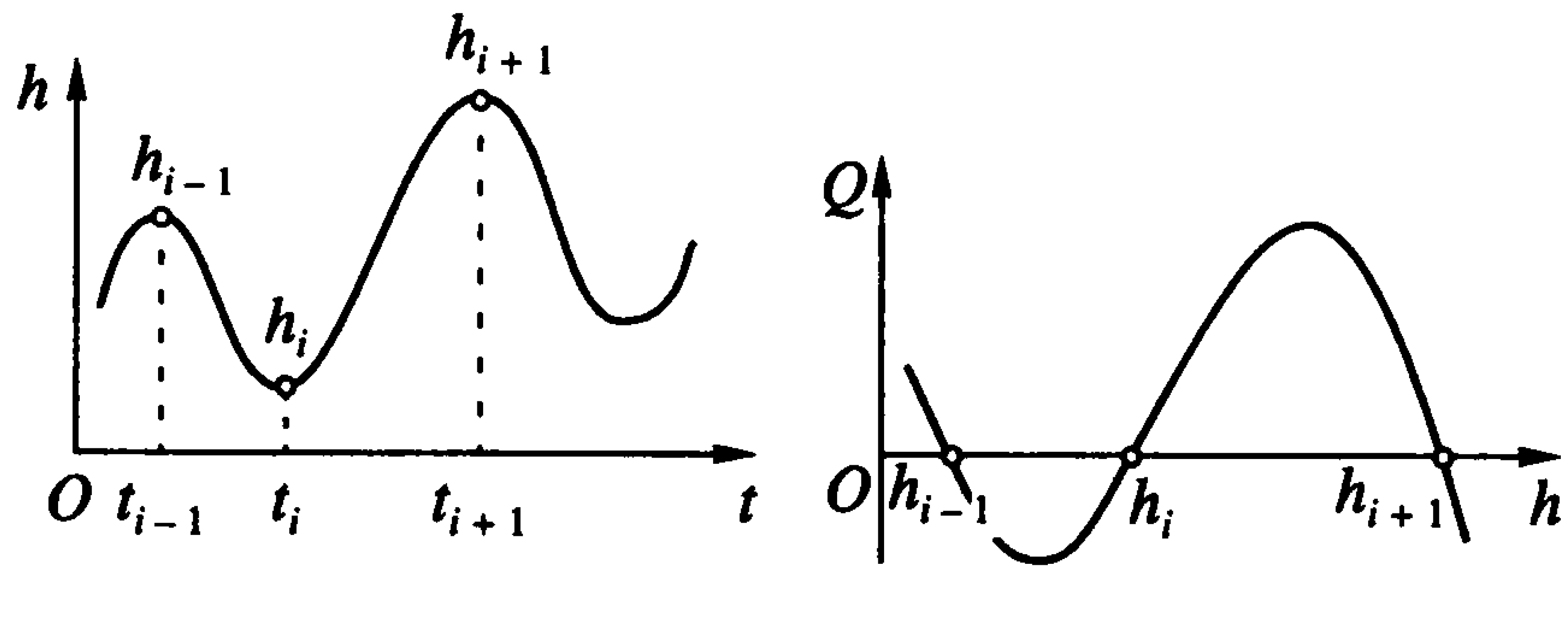
Следовательно, $\operatorname{sign}\Phi = \operatorname{sign}(\alpha + 2)$, поскольку $B_0 > 0$ в силу соотношений (4.4) и (4.12).

Разберем возможные случаи.

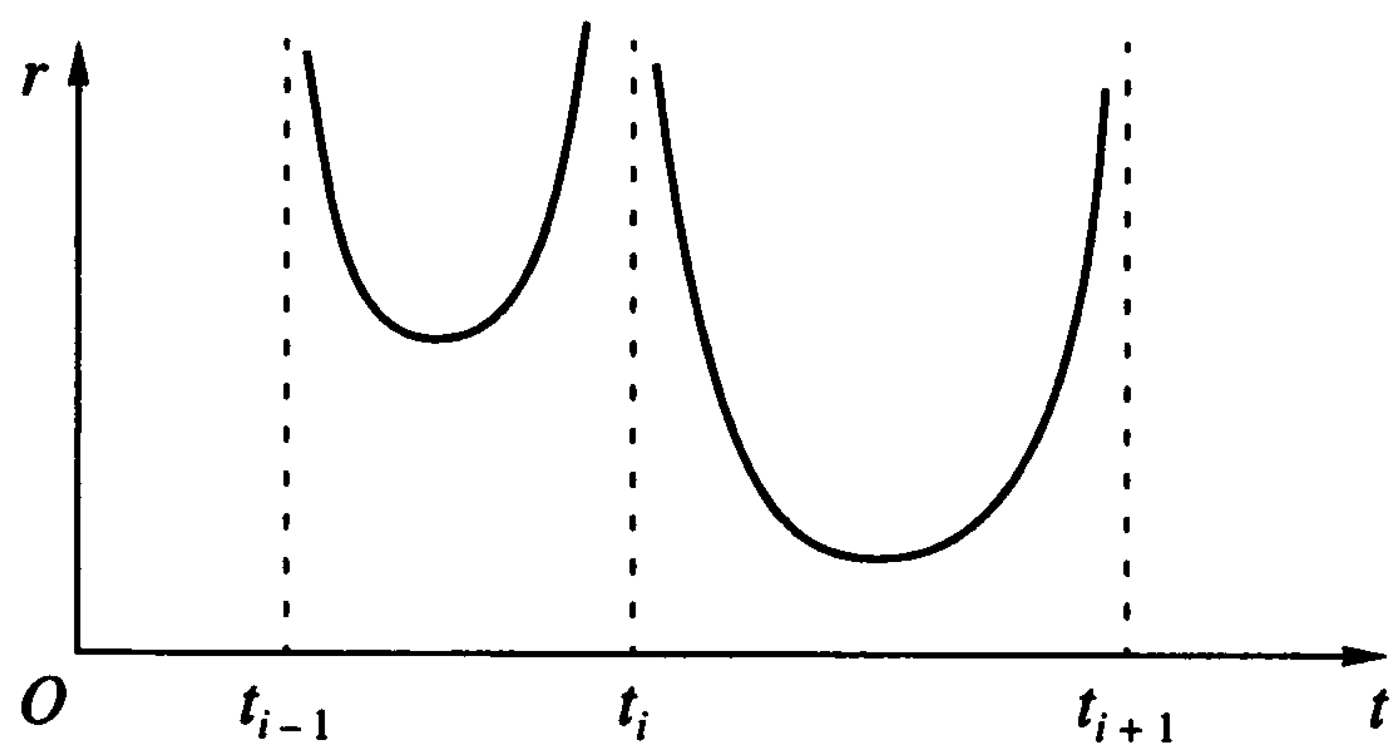
А. Пусть $\Phi > 0$, т.е. $\alpha + 2 > 0$. Тогда каждое ненулевое решение уравнения (6.4) имеет не более одного нуля; следовательно, оно отлично от нуля при всех достаточно больших значениях h.

В этом случае функция $h(t)$ имеет не более одной критической точки $h'(t_*) = 0$ при $t = t_*$, так что $Q(h_*) = 0$ для $h_* = h(t_*)$. Качественное поведение функций $h = h(t)$ и $Q = Q(t)$ в этом случае изображено на фиг. 2. Из соотношений (7.1) и (7.2) следует, что $r \to +\infty$, $c \to 0$, $\rho \to 0$ при $t \to t_*$. Решение определено на интервалах $(-\infty, t_*)$ и $(t_*, +\infty)$. Частицы газа уходят на бесконечность при $t \to t_* \pm 0$, плотность газового облака при этом уменьшается, стремясь к предельному состоянию вакуума (фиг. 3).

Б. Пусть $\Phi < 0$, т.е. $\alpha + 2 < 0$. Тогда каждое нетривиальное решение $Q(h)$ уравнения (6.6), как и его производная, имеет бесконечно много нулей, т.е. каждое решение совершает бесконечное множество колебаний; расстояния между соседними нулями остаются при этом ограниченными.



Фиг. 4



Фиг. 5

Пусть $h_i = h(t_i)$, $i \in N$ – нули решения: $Q(h_i) = 0$. Тогда в критических точках t_i имеем $h'(t_i) = 0$ (фиг. 4). Согласно равенству (7.1) частицы газа уходят на бесконечность: $r \to +\infty$ при $t \to t_i$. При этом $c(t_i) \to 0$, $\rho(t_i) \to 0$. Движение газа определено в каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) и описывается следующим образом. Разреженное газовое облако ($t = t_i$), уплотняясь, приближается к наблюдателю на минимальное расстояние $r_{\min}$, а затем удаляется от него, распыляясь до предельного состояния вакуума на бесконечности при $t = t_{i+1}$ (фиг. 5). Контактные характеристики, т.е. поверхности в $\mathbb{R}^4$ $(t, \mathbf{x})$, сплошь состоящие из траекторий, являются поверхностями вращения с осью вращения Ot, образующие которых изображены на фиг. 3, 5.

Полное описание движения газа возможно при привлечении уравнения (1.4), задающего движение частиц на сферах $r = \text{const}$, и сложения этого движения с радиальным. Было показано [1], что в особом вихре каждая частица газа в процессе движения не покидает плоскости, положение которой в пространстве $\mathbb{R}^4$ $(t, \mathbf{x})$ зависит от начальных данных: положения и скорости частицы газа. В целом эти решения описывают движение облака газа, формирующегося при достаточно большом r из разреженной газовой среды. Режимы движения А и Б, описанные выше, различаются временами существования: бесконечным в случае А, поскольку решение определено на интервале $(-\infty, t_*)$ или $(t_*, +\infty)$, либо конечным (t_i, t_{i+1}) для случая Б.

Более детальное описание движения связано с наличием простых частных решений уравнения Шварца и анализом решений уравнения (1.14) при конкретных функциях F.

8. Барохронный однородный особый вихрь. Уравнение Шварца (4.13) при $\alpha = -2$ и любом γ имеет простое общее решение

$$h = (at + b)/(ct + d) \tag{8.1}$$

в котором постоянные интегрирования a, b, c, d, такие, что $\Delta = ad - bc \neq 0$, связаны одним условием. Его определим позднее так, чтобы формулы, представляющие решение, имели наиболее простой вид. Функция (8.1) определяет неизэнтропическое барохронное решение уравнений газовой динамики, поскольку из соотношений (4.2) и (4.3) следует

$$p = P(t), \quad \rho = r^{-2}R(t), \quad S = r^{4\gamma}PR^{-\gamma} \tag{8.2}$$

Решение (8.2) может быть названо барохронным однородным особым вихрем. Математические основы теории барохронных движений газа изложены ранее [5]. Барохронное движение газа имеет следующие характерные особенности[2].

1°. Частицы газа движутся по прямолинейным траекториям, скорость частиц постоянна вдоль траекторий, но различна для разных частиц газа. О специальных начальных данных, обеспечивающих такое движение, упоминалось в разд. 2.

2°. Траекторное отображение, сопоставляющее начальное положение каждой частицы с ее положением в момент времени $t > t_0$, вырождается в некоторый конечный момент времени $t = t_c$. Это соответствует коллапсу плотности: $\rho \to +\infty$ при $t \to t_c$ на многообразии Σ_c, размерность которого меньше размерности движения. Так, при барохронном движении ограниченного объема газа он коллапсирует при $t = t_c$ в часть поверхности, кривой или точку в зависимости от степени вырождения траекторного отображения. Физически такое движение можно трактовать как сверхсильное сжатие объема газа поршнем специальной конфигурации, образованным контактными характеристиками, давление на котором меняется со временем по заданному закону.

Пусть условие, налагаемое на постоянные a, b, c, d, о котором говорилось выше, имеет вид $ab + cd = 0$. Тогда в качестве трех существенных постоянных, от которых зависит решение, можно выбрать числа a, c и σ_0, такие, что

$$b = -\sigma_0 c, \quad d = \sigma_0 a, \quad \Delta = \sigma_0(a^2 + c^2)$$

Формулы (4.2), задающие решение в случае функции h вида (8.1), принимают вид

$$U = rt/(t^2 + \sigma_0^2), \quad \rho = |\Delta|^{1/2}/(r^2|ct + d|) \tag{8.3}$$

Уравнения радиального движения частиц газа $dr/dt = U$ интегрируются:

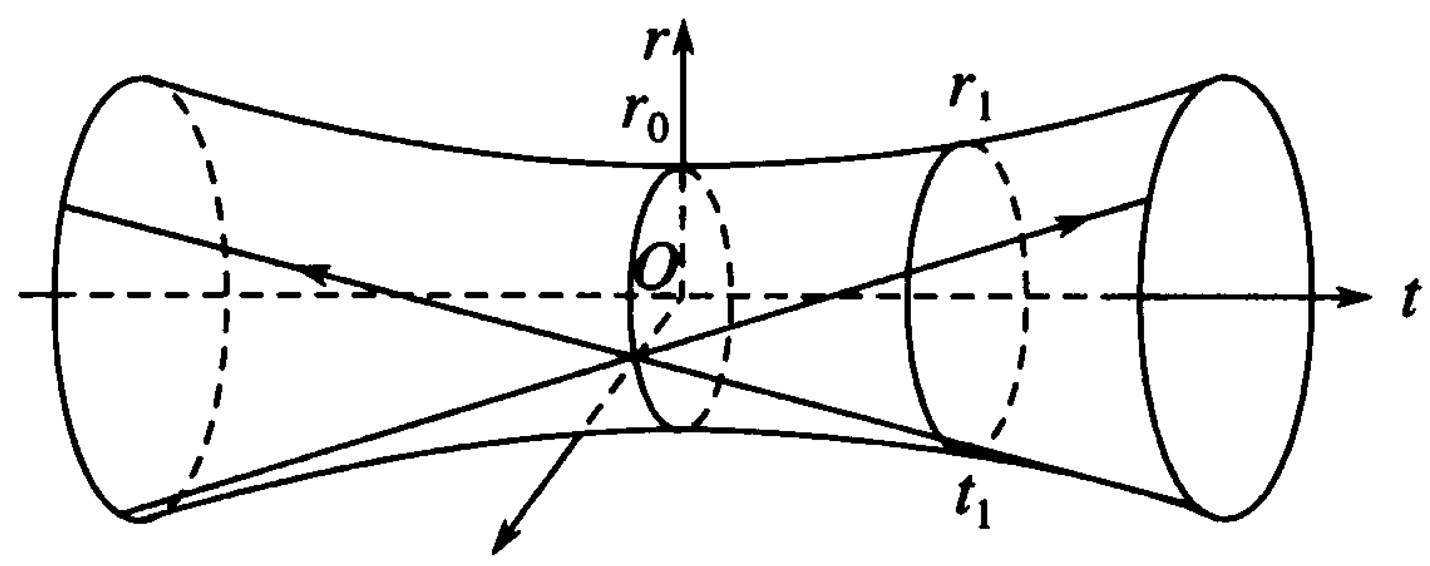
$$(r/r_0)^2 - (t/\sigma_0)^2 = 1 \tag{8.4}$$

Движение частиц газа в пространстве $\mathbb{R}^4$ $(t, \mathbf{x})$ происходит по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения, задаваемого уравнением (8.4). Он является огибающей поверхностью семейства двумерных сфер с центрами в точках оси Ot и радиусами

$$r = r_0\sqrt{1 + \sigma_0^{-2}t^2} \tag{8.5}$$

На однополостном гиперболоиде существуют два семейства прямолинейных образующих. По образующим первого семейства частицы газа движутся в сторону возрастания времени – в будущее, по прямым второго семейства – в прошлое. Уравнения газовой динамики инвариантны относительно обращения времени: $t \to -t$, $\mathbf{u} \to -\mathbf{u}$. Эта инволюция меняет местами образующие двух семейств. Начальные данные для каждой частицы газа задаются лагранжевыми координатами, т.е. положением частицы на гиперболоиде и скоростью, которая сохраняется постоянной вдоль траекторий частиц. Полное движение газа складывается из описанного выше радиального движения и сферического, описываемого интегралом (1.14). Иллюстрацией может служить движение газа, занимающего при $t = 0$ шар радиуса r_0. Во все последующие мо-

[2] *Чупахин А. П.* Барохронные движения газа. Общие свойства и подмодели типов (1, 2) и (1, 1): Препринт № 4–98. Новосибирск: СО РАН, Ин-т гидродинамики, 1998.



Фиг. 6

менты времени газ, расширяясь по закону (8.3), занимает также шар радиуса (8.5) (фиг. 6).

Для описания коллапса в таком движении, наступающего при $t \to t_c = -d/c$, необходимо привлекать уравнение (1.14) для сферического движения. Рассмотрим частный случай движения газа, не зависящего от долготы φ. Тогда уравнение (1.14) для функции ω принимает вид

$$\sin\theta\cos\omega = h\cos\theta + \sqrt{1+h^2}F(\xi) \tag{8.6}$$

Из него следует, что функция F лагранжевой переменной ξ, определяемая начальным распределением газа, не может быть произвольной и подчиняется лишь условию $|F| \le 1$. Действительно, следствием уравнения (8.6) является соотношение

$$\sin(\theta - \psi) = \sqrt{\frac{1+h^2}{\cos^2\omega + h^2}}F, \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{h}{\cos\omega}$$

откуда и следует указанное выше ограничение на F.

Подставляя в равенство (8.6) функцию (8.1), получим

$$\begin{aligned} |ct+d|\sin\theta\cos\omega &= \varepsilon(at+b)\cos\theta + \sqrt{a^2+c^2}(t^2+\sigma_0^2)^{1/2}F(\xi) \\ \varepsilon &= \operatorname{sign}(ct+d) \end{aligned} \tag{8.7}$$

Уравнение (8.7) в любой момент времени $t \ne t_c$ задает функцию $\omega = \omega(t, r, \theta)$. При $t = t_c$ его левая часть обращается в нуль и оно связывает лишь независимые переменные, задавая еще одно уравнение многообразия коллапса. Следовательно, многообразие коллапса является одномерной кривой и задается в пространстве событий $\mathbb{R}^4$ (t, **x**) уравнениями

$$\Sigma_c\colon t = t_c, \quad r = r_0\sqrt{1+\sigma_0^{-2}t_c^2}, \quad \cos\theta = \varepsilon F(\xi) \tag{8.8}$$

Многообразие Σ_c лежит на двумерной сфере и является, в общем случае, частью дуги $\theta = \theta_c$, что следует из выражения (7.1) для лагранжевой переменной: $\xi = r^2C$. Его вид зависит от функции F.

9. Заключение. Проведенный качественный анализ инвариантных подмоделей ОВ показывает, что для них соответствующее движение газа можно изучить с бóльшей полнотой, нежели в общем случае.

1°. Уравнения радиального движения газа сводятся для этих подмоделей к одному обыкновенному дифференциальному уравнению специфическому для каждой из них. Все инвариантные функции представляются через решение этого уравнения – функцию h и ее производные. Для СОВ это уравнение имеет первый порядок, но не является автономным и не интегрируется в квадратурах. Исследование качественных свойств его решения представляется самостоятельной задачей. Доказано, что СОВ определен не во всем пространстве, а при $r \geq r_* > 0$.

Для ООВ уравнение для h является уравнением Шварца с рациональной относительно h и h' правой частью. Для показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ уравнение "распадается" на два: нелинейное уравнение первого порядка и линейное уравнение второго порядка, решение которого задает правую часть первого уравнения. Исследованы осциллирующие и неосциллирующие решения второго уравнения. Им отвечают движения газового облака, формирующегося на большом расстоянии от наблюдателя из разреженной среды и приближающегося к нему на некоторое минимальное расстояние, после чего начинается стадия ухода и разрежения облака. Различным видам решения соответствуют конечные или бесконечные временные интервалы существования решения.

Полностью описан барохронный ООВ.

2°. Доказано, что ОВ обладает интересным свойством. Алгебраические инварианты матрицы Якоби J поля скоростей этого решения зависят только от инвариантных независимых переменных. Найдены представления для них и для собственных значений J. Тем самым, для матрицы J_0 начального поля скоростей инварианты зависят только от r. Сформулирована гипотеза, что подобное свойство справедливо для всех регулярных частично инвариантных решений. Представляет интерес описание векторных полей такого вида; это было сделано лишь для барохронных решений, для которых матрица J_0 имеет постоянные инварианты [5].

3°. Для описания подмоделей ОВ двухшаговый алгоритм построения точных решений эквивалентен одношаговому. СОВ и ООВ могут быть построены как частично инвариантные подмодели относительно четырехмерных подалгебр алгебры симметрии уравнений газовой динамики за один шаг, а также как инвариантные подмодели ОВ – за два шага. Для инвариантных решений Л.В. Овсянниковым [10] установлены условия эквивалентности одно- и многошагового алгоритмов (лемма ЛОТ). Для частично инвариантных решений такие условия пока неизвестны. Предварительные соображения показывают, что они не будут сильно отличаться от условий леммы ЛОТ. Так, для алгебры L_{13}, допускаемой уравнениями газовой динамики в случае политропного газа с произвольным показателем адиабаты γ, инвариантная подсистема ОВ допускает алгебру, являющуюся факторалгеброй нормализатора алгебры $L_3 = \langle X, Y, Z\rangle$ в L_{13}. Эта алгебра L_4 имеет базис операторов

$$\partial_t, \quad t\partial_t + \mathbf{x}\partial_\mathbf{x}, \quad t\partial_t - \mathbf{u}\partial_\mathbf{u} - 2p\partial_p, \quad \rho\partial_\rho + p\partial_p$$

СОВ порождается алгеброй $\langle\partial_t\rangle$, а ООВ – оператором (4.1), являющимся линейной комбинацией трех операторов растяжения из L_4.

Полный список инвариантных и частично инвариантных подмоделей ОВ может быть получен при изучении группового свойства уравнения из разд. 1. Часть этих подмоделей содержится в оптимальных системах подалгебр алгебры симметрии уравнений газовой динамики для политропного газа с произвольным показателем адиабаты γ и исключительным значением $\gamma = 5/3$[3]. Исследование этих подмоделей представляется перспективной задачей.

Автор благодарит Л.В. Овсянникова за обсуждения результатов работы.

[3] *Головин С.В.* Оптимальная система подалгебра для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа: Препринт № 5–96. Новосибирск: СО РАН, Ин-т гидродинамики, 1996; *Черевко А.А.* Оптимальная система подалгебра для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$: Препринт № 4–96. Новосибирск: СО РАН, Ин-т гидродинамики, 1996.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00523) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96163).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
4. *Чупахин А.П.* Гидродинамика с квадратичным давлением. 1. Общие результаты // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 1. С. 27–35.
5. *Чупахин А.П.* О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.I. М.: Наука, 1973. 536 с.
7. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М; Л.: Гостехиздат, 1941. 398 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Hartman P.* Ordinary Dyfferential Equations. N.Y., etc.: Wiley, 1964 = *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
10. *Овсянников Л.В.* Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 740–742.

Новосибирск
e-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
12.III.2002 г.