УДК 531.01

© 2003 г. М. В. Дерябин

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается задача о качении без проскальзывания симметричного шара по неподвижной поверхности и ее обобщения. Доказыватся, что при достаточно общих предположениях о природе внешних сил система обладает гладкой инвариантной мерой.

Качение шара без проскальзывания по неподвижной поверхности – классический пример неголономной системы [1]. Как правило, у неголономных систем отсутствует инвариантная мера в отличие от гамильтоновых систем, всегда обладающих стандартной инвариантной мерой (более того, сохраняется симплектическая 2-форма) [2]. Пожалуй, один из самых известных примеров – "кельтский камень" [3], вращения которого в одном направлении асимптотически устойчивы, а в другом – неустойчивы (см., например, [4, 5]).

В задаче о качении симметричного шара по поверхности в основном исследовались частные случаи (особый вид поверхностей), в которых у системы есть дополнительные первые интегралы [6–8]; оказалось, что во всех исследованных частных случаях в системе есть и гладкая инвариантная мера. Ниже доказывается, что мера есть и в общем случае при условии, что внешняя сила приложена к центру шара и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, которые фактически означают, что в системе отсутствует диссипация; типичный пример – сила тяжести. Этот результат справедлив и в "предельной" задаче, когда радиус шара стремится к нулю.

Существование инвариантной меры имеет принципиальное значение для динамики системы. В случае потенциальных внешних сил у системы есть первый интеграл – интеграл энергии. Если уровень энергии – компактное многообразие, то на него можно ограничить систему (и она будет сохранять некоторую меру на этом многообразии) и пользоваться эргодическими теоремами, например, теоремой Пуанкаре о возвращении, теоремой Биркгофа и т.д. [9]. Другое очевидное следствие существования инвариантной меры – отсутствие асимптотической устойчивости и аттракторов.

1. Постановка задачи. В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим качение без проскальзывания полностью симметричного шара радиуса r и массы m по поверхности Σ, задаваемой (локально) гладкими функциями. Под полностью симметричным шаром подразумевается шар, у которого центр масс совпадает с геометрическим центром и центральный тензор инерции – шаровой. На шар действует внешняя сила, точка ее приложения – центр шара.

Уравнения движения шара по поверхности Σ удобно записывать, не используя уравнения Даламбера – Лагранжа, в следующей форме:

$$m\dot{v} = R + F, \quad J\dot{\omega} = -rN \times R, \quad v = r\omega \times N \tag{1.1}$$

где J – момент инерции шара относительно центра, v – скорость центра шара, ω – угловая скорость шара, R – сила реакции поверхности Σ, F – внешняя сила, N – единичная нормаль к поверхности Σ в точке касания шара поверхности, направленная к центру шара. Неголономная связь, определяемая последним уравнением (1.1), есть условие того, что шар катится без проскальзывания. Будем полагать, что кривизна поверхности Σ достаточно мала (или что радиус шара r мал), так что шар всегда касается поверхности только в одной точке.

Замечание 1. Вообще говоря, при формально-аксиоматическом определении движения систем со связями (как, например, постулирование принципа Даламбера – Лагранжа) остаются непроясненными как физический смысл основных принципов, так и границы применимости теоретических моделей. Оказывается, что классическая неголономная модель – предельный случай реализации связи силами вязкого трения (см., например, [9–11]). О моделях сухого трения в задачах качения твердых тел см. [12, 13].

Введем поверхность Σ', по которой движется центр шара. Очевидно, что исходная поверхность Σ – волновой фронт для поверхности Σ' (она является огибающей волновых фронтов (сфер радиуса r) для каждой точки Σ').

Утверждение 1. Нормаль к поверхности Σ', проведенная из центра шара, совпадает с N – нормалью к поверхности Σ в точке касания шара поверхности.

Этот факт известен в теории движения волновых фронтов, приведем более наглядное его доказательство. Пусть шар касается поверхности Σ в точке x. Возьмем нормаль N к поверхности Σ в этой точке. Множество допустимых векторов скоростей центра шара – это плоскость, ортогональная этой нормали. Но любой вектор скорости центра шара лежит в касательной плоскости к поверхности Σ' в точке x', где эту поверхность пересекает прямая, проходящая параллельно N через точку x касания шара с поверхностью Σ. Значит, отрезок $[x, x']$, параллельный N, будет ортогонален и поверхности Σ'.

Зафиксируем поверхность Σ' и при изменении радиуса шара r будем менять поверхность Σ. Это – эквивалентная (и, вообще говоря, более удобная) постановка исходной неголономной задачи, которая восходит еще к Раусу. Движение шара будет по-прежнему описываться уравнениями (1.1), при этом единичный вектор N – нормаль к поверхности Σ', проведенная из центра шара (в силу утверждения 1); центр шара движется по этой поверхности.

Обозначим $w = r\omega$ и поделим второе и третье уравнения системы (1.1) на r. Тогда получаем уравнения

$$m\dot{v} = F + R, \quad M\dot{w} = -N \times R, \quad v = w \times N \tag{1.2}$$

не содержащие r и в точности совпадающие с системой (1.1), в которой $r = 1$. Здесь $J = Mr^2$, величина M не зависит от r. В дальнейшем будем пользоваться системой (1.2); исходная система (1.1) восстанавливается из (1.2) заменами $w = r\omega$ и $J = Mr^2$.

Утверждение 2. Уравнения предельной задачи при $r \to 0$ эквивалентны системе (1.2).

Действительно, уравнения (1.2) вообще не меняются при изменении радиуса шара r, так как выше было принято считать фиксированной именно поверхность Σ'. Таким образом, предельные уравнения эквивалентны исходной системе (1.1), где $r = 1$, они не вырождаются и не переходят, например, в уравнения движения точки по поверхности Σ' под действием силы F.

2. Уравнения движения. Выразим реакцию R из первого уравнения системы (1.2) и подставим во второе. Получим

$$M\dot{w} = -N \times (m\dot{v} - F) = -N \times \left(m\frac{d}{dt}(w \times N) - F\right) = -N \times (m((\dot{w} \times N) + (w \times \dot{N})) - F)$$

Здесь $\dot{N}$ – вектор с компонентами $(\partial N_i/\partial x^j)v_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, x^i – декартовы координаты.

Поскольку $M\dot{w} = -N \times R$, производная $\dot{w}$ ортогональна нормали N; следовательно,

$$N \times (\dot{w} \times N) = \dot{w}$$

Поэтому из предыдущего равенства получаем

$$(M+m)\dot{w} = -mN\times(w\times\dot{N})+N\times F \tag{2.1}$$

Введем скалярную переменную $u = (w, N)$: проекция угловой скорости шара на нормаль к поверхности. Заметим, что

$$w = uN - v\times N, \quad N\times(w\times\dot{N}) = -u\dot{N}$$

Умножим уравнение (2.1) справа векторно на N. Получим

$$(M+m)(\dot{w}\times N) = mu\dot{N}\times N+(N\times F)\times N$$

Отсюда следует, что

$$\dot{w}\times N = \frac{d}{dt}(w\times N)-w\times\dot{N} = \dot{v}-(uN-v\times N)\times\dot{N}$$

Таким образом,

$$(M+m)(\dot{v}-(uN-v\times N)\times\dot{N}) = mu\dot{N}\times N+(N\times F)\times N$$

Поскольку $(N, \dot{N}) = 0$, то $(v\times N)\times\dot{N} = (v, \dot{N})N$, и

$$\dot{v}+(v,\dot{N})N = \frac{M}{M+m}uN\times\dot{N}+\frac{1}{M+m}(F-(F,N)N) \tag{2.2}$$

Умножим теперь уравнение (2.1) скалярно на N. Получим

$$(M+m)(\dot{w},N) = 0$$

Поэтому

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}(w,N) = (w,\dot{N})$$

Следовательно,

$$\dot{u} = ((\dot{N}\times N), v) \tag{2.3}$$

Вместе с соотношением $\dot{x} = v$ уравнения (2.2), (2.3) образуют замкнутую систему уравнений. Если формально положить $M = 0$, то уравнение (2.2) будет описывать движение точки массы m по поверхности Σ' под действием силы F. Система (2.2), (2.3) была получена ранее [7] из других соображений в случае, когда F – сила тяжести.

Замечание 2. Пусть сила F – потенциальная. Тогда у системы уравнений (2.2), (2.3) есть первый интеграл (интеграл энергии). Он получается стандартным способом: умножим скалярно уравнение (2.2) на $(M + m)v$, а (2.3) – на Mu, сложим и воспользуемся тем, что $(N, v) = 0$.

3. Инвариантная мера. Пусть поверхность Σ' задается (локально) в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) уравнением $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тогда в проекциях на оси x^1, x^2 из уравнения (2.1) следует система

$$\ddot{x}^i+\left(\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k-\frac{1}{M+m}g^{ij}Q_j\right) = \frac{M}{M+m}uA^i_j\dot{x}^j, \quad i,j,k = 1,2 \tag{3.1}$$

где g^{ij} – индуцированная метрика на поверхности Σ', выраженная через локальные координаты (x^1, x^2) на Σ', Γ^i_{jk} – символы Кристоффеля, согласованные с метрикой g^{ij}, а Q – обобщенная сила, определяемая проекцией силы F на поверхность Σ'. Если бы правые части уравнений (3.1) равнялись нулю, то получили бы обычные уравнения Лагранжа (разрешенные относительно ускорений) для движения точки по поверхности Σ'. Ясно, что если исходная сила F потенциальная, то и сила Q тоже будет потенциальной.

Лемма 1. Величины $A^i_j\dot{x}^j$ $(i, j = 1, 2)$ в правых частях уравнений (3.1) можно представить в виде

$$A^1_j\dot{x}^j = h_1/\tilde{f}, \quad A^2_j\dot{x}^j = -h_2/\tilde{f}$$

где

$$h_1 = (f_{12}v^1 + f_{22}v^2)/\tilde{f}, \quad h_2 = (f_{11}v^1 + f_{12}v^2)/\tilde{f}, \quad \tilde{f} = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}$$

$$f_i = \partial f/\partial x^i, \quad f_{ij} = \partial^2 f/\partial x^i \partial x^j, \quad v^i = \dot{x}^i, \quad i, j = 1, 2$$

Доказательство проводится прямым вычислением: нужно найти первые две компоненты трехмерного вектора $N \times \dot{N}$. Имеем

$$N = (f_1, f_2 - 1)/\tilde{f}$$

$$\dot{N} = -(f_1h_2 + f_2h_1)(f_1, f_2 - 1)/\tilde{f}^2 + (h_2, h_1, 0) =$$

$$= (-f_1f_2h_1 + (1 + f_2^2)h_2, -f_1f_2h_2 + (1 + f_1^2)h_1, f_1h_2 + f_2h_1)/\tilde{f}^2$$

Имея компоненты векторов N и $\dot{N}$, нетрудно найти их векторное произведение.

Теорема 1. Пусть система вида (3.1) (произвольной размерности n) замкнута добавлением уравнения относительно u:

$$\dot{u} = U(x, \dot{x}, t) \tag{3.2}$$

где U – произвольная гладкая функция от x и $\dot{x}$, а A^j_i – функции от x, t. Пусть силы Q имеют вид

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial V}{\partial x^i} + g_{ij}B^j_k\dot{x}^k + Q^*_i$$

где $V = b_i(x, t)\dot{x}^i + V_0(x, t)$ – обобщенный потенциал, матрица $B(x, t)$ имеет нулевой след, а непотенциальные силы Q^*_i не зависят от скоростей. Пусть след матрицы A равен нулю: $\mathrm{tr}A = A^1_1 + \ldots + A^n_n = 0$. Тогда у системы (3.1), (3.2) есть гладкая инвариантная мера.

Грубо говоря, условия теоремы, накладываемые на обобщенные силы Q, выполняются, если в системе отсутствует диссипация. Например, эти условия заведомо выполнены, если система (3.1) – натуральная лагранжева система при $M = 0$, причем квадратичная часть функции Лагранжа есть $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j/2$.

Доказательство. Классические уравнения Лагранжа второго рода получаются из системы (3.1) "опусканием индексов". Сделаем преобразование Лежандра по скоростям $\dot{x}^i$: $p_i = g_{ij}\dot{x}^j + b_i$. Получим "возмущенные уравнения Гамильтона"

$$\begin{gathered}\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + u\tilde{A}^j_i p_j + \tilde{B}^j_i p_j + \tilde{Q}_i, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{u} = U(p, x, t) \\ \tilde{A}^j_i = g_{ik}\frac{M}{M+m}A^k_l g^{lj}, \quad \tilde{B}^j_i = g_{ik}B^k_l g^{lj}\end{gathered} \tag{3.3}$$

где слагаемые $\tilde{Q}_i$ не зависят от импульсов p.

Дивергенция правой части системы (3.3) равна сумме произведения u на след матрицы $\tilde{A}$ и следа матрицы $\tilde{B}$. Но след матрицы – инвариант, поэтому

$$\mathrm{tr}\tilde{A} = \frac{M}{M+m}\mathrm{tr}A = 0, \quad \mathrm{tr}\tilde{B} = \mathrm{tr}B = 0$$

Значит, в фазовом пространстве (p, x, u) сохраняется стандартный объем.

Следствие. В классической задаче о качении шара по поверхности и в предельной задаче, когда радиус шара стремится к нулю, есть гладкая инвариантная мера, если внешняя сила удовлетворяет условию теоремы (например, обладает обобщенным потенциалом).

Доказательство. По лемме 1 в рассматриваемой системе $A_1^1 + A_2^2 = 0$. О связи с предельной задачей, когда радиус шара $r \to 0$, см. утверждение 2.

Замечание 3. Пусть все функции не зависят явно от времени, силы Q потенциальны. Тогда в задаче о качении шара функцию U можно найти из условия того, что функция $H + Mu^2/2$ – первый интеграл (см. замечание 2). Действительно, поскольку

$$\frac{dH}{dt} + Mu\dot{u} = 0$$

то из уравнений (3.3) получаем

$$u\tilde{A}_i^j p_j \frac{\partial H}{\partial p_i} + MuU(p, x) = 0$$

Следовательно,

$$MU = -\tilde{A}_i^j p_j \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.4}$$

4. Обсуждение. Доказанная теорема решает вопрос существования инвариантной меры как в общей задаче о качении без проскальзывания симметричного шара по поверхности при достаточно общих предположениях о природе внешних сил, так и в предельном случае, когда радиус шара стремится к нулю. Этот предельный случай интересен сам по себе как пример системы со "скрытыми движениями": движение частицы по поверхности определяется не только локальными координатами на касательном (или кокасательном) расслоении, но и некоторым дополнительным параметром u – "спином" частицы. С этой точки зрения особенно интересна система (3.3), (3.4) как обобщение задачи о качении шара.

Была рассмотрена [14] интересная "обратная" задача: выпуклое тело с шаровым тензором инерции катится по неподвижной сфере (поле сил отсутствует); из результатов можно вывести существование инвариантной меры и в "прямой" задаче о качении шара по выпуклой поверхности в случае, когда внешняя сила зависит только от положения системы.

Можно рассмотреть другую предельную задачу, когда радиус шара не меняется, но момент инерции $M \to 0$. Это означает, что масса шара стягивается к его центру. Система (3.3) регулярна при $M \to 0$ (коэффициенты $\tilde{A}_i^j$ – величины порядка M при $M \to 0$); в пределе при $M = 0$ получаем гамильтонову систему относительно переменных (p, x). Такой подход позволяет пользоваться богатым аппаратом теории возмущений для анализа динамики в случае малых M. Интересно сравнить систему (3.3) при малых значениях M с так называемыми "слабо неголономными" системами, см. [15].

Автор благодарит В.В. Козлова за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (00-15-96146).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С.А.* Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 300 с.
2. *Козлов В.В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. No 3. С. 85–107.
3. *Walker G.T.* On a dynamical top // Qurt. J. Pure Appl. Math. 1896. V. 28. P. 175–184.
4. *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418–426.
5. *Маркеев А.П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой поверхности // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575–582.
6. *Routh E.J.* The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. New York: Dover, 1905. 484 p.
7. *Hermans J.* A symmetric sphere rolling on a surface // Nonlinearity. 1995. V. 8. № 4. P. 493–515.
8. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A.* Rolling of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics // Reg. and Chaot. Dyn. 2001. V. 7. № 2. P. 201–220.
9. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Динамические системы. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
10. *Бренделев В.Н.* О реализации связей в неголономной механике // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 481–487.
11. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
12. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
13. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
14. *Ярощук В.А.* Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1992. № 6. С. 26–30.
15. *Татаринов Я.В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. No 1. С. 25–33.

Москва
e-mail: derjabin@mvd.pvt.msu.su

Поступила в редакцию
26.XI.2002